ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 11

Trieste, 21 gennaio 2022

1. Si consideri la seguente matrice ortogonale che rappresenta una riflessione
$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$
Calcolare una matrice ortogonale S, e la sua inversa ${}^tS$, tali che ${}^tSAS$ sia diagonale.

2. (Esame del 25.01.2021)
Sia A la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Verificare che l'endomorfismo $L(A)$ di $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare canonico, è autoaggiunto e quindi diagonalizzabile. Trovare una base ortonormale di autovettori, una matrice diagonale D simile ad A e una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}AS = D$.

3. (Esame del 25.01.2021)
Sia $W \subset \mathbb{R}^3$, spazio euclideo con il prodotto scalare canonico, il sottospazio di equazione $2x_1 + x_2 = 0$. Trovare una base ortonormale di W. Completarla a una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Scrivere le matrici di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ e da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$, dove $\mathcal{C}$ denota la base canonica.

4. (Esame del 9.02.2021)
Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale ortogonale al vettore $v = (1, -1, 0)$. Determinare una base ortonormale di W. Sia $p_W\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su W; calcolare esplicitamente $p_W(x_1, x_2, x_3)$ e scrivere la sua matrice rispetto alla base canonica. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza p_W.

5. (Esame del 30.06.2021)
Considerare il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 3x_3y_3.$$
Denotiamo con e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
   a) Dati i vettori $v = (1 + \sqrt{2})e_1 + e_3$, $w = -e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^3$, calcolare le loro norme e l'angolo convesso fra v e w rispetto al prodotto scalare sopra definito.
   b) Rispetto allo stesso prodotto scalare, trovare una base ortonormale del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ generato da v_1, v_2 dove $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (3, 1, 1)$, e completarla a una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

c) Giustificare l'affermazione che si tratta di un prodotto scalare.