Esercitazione 21/01

con appunti belli :)

Integrale per parti

Dalla formula della derivata del prodotto:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\Rightarrow \int f'g = \int fg' + fg$$

ES. 1

$$\int \log x \, dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\log x}_{g} \, dx =$$

$$= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - x + c$$

ES. 2

$$\int \log(x^2+3) dx = \int 1 \cdot \log(x^2+3) dx =$$

$$= x \log(x^2+3) - \int \frac{2x^2}{x^2+3} dx =$$

$$= x \log(x^2+3) - 2\left[\int \frac{x^2+3}{x^2+3} dx - \int \frac{3}{x^2+3} dx\right]$$

$$= x\log(x^2+3) - 2x + \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \int \frac{\cancel{3}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx$$

$$= x\log(x^2+3) - 2x + 2\sqrt{3}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

ES. 3

Utilizzo per abbassare gli esponenti di un x^m:

$$\int \underbrace{x}_{g}\,\underbrace{\sin x}_{f'}\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx =$$

RIESCO A ISOLARE f CHE SO INTEGRARE

$$= -x\cos x + \text{sen}\,x + c$$

DOMANDA CON $\cos^2 x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + 1\right)$$

Infatti: $\cos^2 x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x =$

$$= \cos(2x) + 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x = \cos(2x) + 1$$

Una volta ricavata questa formula possiamo usarla per calcolare

$$\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi} x\left(\frac{\cos(2x)+1}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} x\cos(2x)\,dx + \int_0^{\pi} x\,dx\right] =$$

Calcolo per parti $\int x\cos(2x)dx$:

$$\int x\cos(2x)\,dx = x\cdot\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} - \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{x\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + c$$

Così ho l'integrale di partenza:

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

LIMITE TRIGONOMETRICO
(lungo: applicare 3 volte de l'Hopital)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x - \tan^2 x}{x^4}$$

Chiamo $g(x) = x \operatorname{sen} x - \tan^2 x$:

$$g'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x - \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$$

$$g''(x) = \cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x$$

$$- 2 \left(\frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x + 2 \cos x \operatorname{sen} x \tan x}{\cos^4 x} \right)$$

$$= 2 \cos x - x \operatorname{sen} x - \frac{2}{\cos^4 x} - 4 \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$$

$$g'''(x) = -2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - x \cos x$$

$$-2 \left(\frac{4 \cos^3 x \operatorname{sen} x}{\cos^8 x} \right) - 4 \left(\frac{2 \tan x + 2 \cos x \operatorname{sen} x \cdot tg^2 x}{\cos^4 x} \right)$$

Quindi: $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^4} =$

NOTA CHE AD OGNI STEP SI RIOTTIE= NE UNA FORMA $\frac{0}{0}$ CHE PERMETTE DI RIUSARE DE L'HOP.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{g'''(x)}{24x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} -\frac{3\sin x}{24x} - \frac{\cancel{x}\cos x}{24\cancel{x}} - \frac{\sin x}{3x\cos^5 x} - \frac{\tan x}{3x\cos^4 x} - \frac{\sin x \, tg^2 x}{3x\cos^3 x} =$$

$$= -\frac{1}{8} - \frac{1}{24} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{-3-1-16}{24} = \frac{-20}{24}$$

$$= -\frac{5}{6}$$

ES. LIMITE INTEGRALE

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\operatorname{atan}^2 x}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=$$

$$f'(x)=\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arctan}^2 x)}{\operatorname{arctan}^2 x}\cdot\frac{2\operatorname{arctan} x}{1+x^2}$$

De l'Hopital:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arctan}^2 x)}{\operatorname{arctan}^2 x}\cdot\frac{2\operatorname{atan}}{1+x^2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\boxed{\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{atan}^2 x)}{\operatorname{atan}^2 x}}\cdot\boxed{\frac{\operatorname{atan} x}{x}}\frac{1}{(1+x^2)}=1$$

$\to 1$ $\to 1$

ESERCIZIO NUMERI COMPLESSI

$$z^3=i\bar{z}\iff(a+ib)^3=i(a-ib)$$

$$\iff a^3-ib^3+3a^2ib-3ab^2=ia+b$$

$$\begin{cases}a^3-3ab^2=b\\ b^3-3a^2b=-a\end{cases}$$

SOLUZIONE $a=0$ $b=0$, inoltre $a=0 \Leftrightarrow b=0$. Per cercare altre soluzioni suppongo quindi $a,b \neq 0$

$$\begin{cases} a^3 - b(3ab+1) = 0 \\ b^3 - a(3ab+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3ab+1 = a^3/b \\ b^3 - a^4/b = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{ha sol. } a = \pm b$$

se $a=b$ nella 1^a ho $a^2 = -1/2$ ↯

se $a=-b$ nella 1^a ho $a = \pm 1/\sqrt{2}$

MANCANO

- Taylor
- Studio di funzione
- Primitiva a tratti