# PRINCIPIO DI INDUZIONE

Provare $\forall n \in \mathbb{N}$ che

$$a_n = 7^{n+2} + 8^{2n+1}$$

è multiplo di 57

Calcolare $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{15^n}$

- Base dell'induzione: provo per $n=0$

$$a_0 = 7^2 + 8^1 = 57 \Longrightarrow \text{è multiplo di } 57$$

- Ipotesi induttiva: Supposta vera l'espressione per $n$, provo che è valida anche per $n+1$

$$a_n = 7^{n+2} + 8^{2n+1}$$

$$a_{n+1} = 7^{(n+1)+2} + 8^{2(n+1)+1}$$

$$a_{n+1} = 7^{(n+2)+1} + 8^{(2n+1)+2}$$

57+7

$$a_{n+1} = 7 \cdot 7^{(n+1)} + 64 \cdot 8^{2n+1}$$

$$\stackrel{!}{=} 7 \cdot 7^{(n+1)} + 7 \cdot 8^{2n+1} + 57 \cdot 8^{2n+1}$$

$$= 7\underbrace{\left(7^{n+2} + 8^{2n+1}\right)}_{a_n} + \underbrace{57 \cdot 8^{2n+1}}$$

è multiplo di 57 per ipotesi induttiva

è multiplo di 57 per definizione

Quindi $a_{n+1}$ è multiplo di 57

Ho provato che $a_n$ è multiplo di 57 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{15^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7^{n+2} + 8^{2n+1}}{15^n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{7^{n+2}}{15^n} + \frac{8^{2n+1}}{15^n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[7^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{7}{15}\right)^n}_{\to 0} + 8\underbrace{\left(\frac{64}{15}\right)^n}_{\to +\infty}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

---

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

$n! = n \cdot (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$n! = n \cdot (n-1)!$

$5! = 5 \cdot 4!$

Base dell' induzione: provo per $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 2! - 1$$

$1 = 1 \longrightarrow$ Provato per $n = 1$

Ipotesi induttiva: Supposto vero per $n$, provo per $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = (n+1+1)! - 1 = \boxed{(n+2)! - 1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!}_{\text{Per ipotesi}} + (n+1)\cdot(n+1)!$$

Per ipotesi $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = (n+1)! - 1 + (n+1)\cdot(n+1)!$$

$$= (n+1)!\,(1+n+1) - 1$$

$$= (n+1)!\,(n+2) - 1 = \boxed{(n+2)! - 1}$$

L'espressione è vera per $\forall n \in \mathbb{N}^+$

$$\lim_{x\to0^+} \underbrace{\tan x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

FORMA INDETERMINATA $0 \cdot \infty$

$$= \lim_{x\to0^+} \underbrace{\frac{\tan x}{x}}_{\to 1} \cdot x \ln x = \lim_{x\to0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{1/x} \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{\left(-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}\right)} = \lim_{x\to0^+} (-x) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$$

FORMA INDETERMINATA $1^{\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\right)^{2n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\Bigg[\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}_{\to e}\Bigg]^{-2}=e^{-2}$$

$$f(x) = \ln\left| x^2 - 5x + 4 \right|$$

**Dominio**: $\left| x^2 - 5x + 4 \right| > 0$

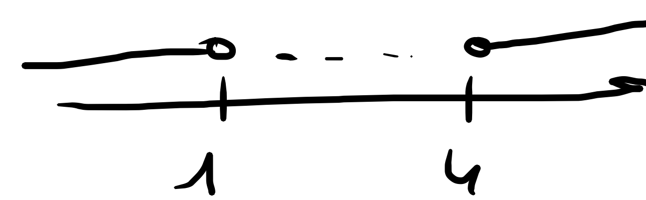
Cerco $x^2 - 5x + 4 \neq 0$

$$(x-4)(x-1) \neq 0 \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$x^2 - 5x + 4 \geq 0$

eq. ass. $x^2 - 5x + 4 = 0$ $\quad x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$




$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 - 5x + 4) & x < 1 \vee x > 4 \\ \ln(-x^2 + 5x - 4) & +1 < x < 4 \end{cases}$$