Ex 1, 2

lunedì 17 gennaio 2022 17:03

① $A \in M(2\times 2, \mathbb{R})$ SIMMETRICA

$\Rightarrow$ A HA SOLO AUTOVALORI REALI ED

È DIAGONALIZZABILE

A SIMMETRICA $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(c-\lambda) - 2b =$$

$$= \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2.$$

$\Rightarrow P_A(\lambda) = 0$ SE E SOLO SE

$$\lambda = (a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac + 4b^2}$$

$$= (a+c) \pm \sqrt{a^2+c^2-2ac+4b^2}$$

$$= (a+c) \pm \sqrt{\underbrace{(a-c)^2+4b^2}_{\geq 0}}$$ REALI ✓

! λ AUTOVALORE DI A $\Leftrightarrow$ λ RADICE DI $P_A(\lambda)$

$\Rightarrow$ A HA SOLO AUTOVALORI REALI ✓✓.

- A È DIAGONALIZZABILE?

A HA AUTOVALORI
$$\begin{cases} \lambda_1 = a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2} \\ \lambda_2 = a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}. \end{cases}$$

A È DIAGONALIZZABILE SE E SOLO SE MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA m_A E MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA m_G COINCIDONO PER TUTTI I

SUOI AUTOVALORI.

! SI HA SEMPRE $1 \le m_G(\lambda_i) \le m_A(\lambda_i) \ \forall \lambda_i$.

- SE $\lambda_1 \neq \lambda_2$

ABBIAMO $1 \le m_G(\lambda_i) \le m_A(\lambda_i) = 1 \quad \forall i = 1,2$

$\Rightarrow m_G(\lambda_i) = m_A(\lambda_i) \ \forall i = 1,2$

$\Rightarrow$ A DIAGONALIZZABILE ✓.

- ALTRIMENTI:

$\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2} = a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}$

$\Leftrightarrow (a-c)^2+4b^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-c=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ DIAGONALE ✓✓✓.

⑳ DIRE DI CIASCUNA DELLE $\langle \cdot , \cdot \rangle_j : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ SE È UNA FORMA SESQUILINEARE HERMITIANA, E IN CASO POSITIVO DIRE SE È UN PRODOTTO SCALARE, E SCRIVERE LA SUA MATRICE RISPETTO ALLA BASE CANONICA DI $\mathbb{C}^2$.

PROMEMORIA

- FORMA SESQUILINEARE:

$\langle \lambda z, w \rangle = \bar{\lambda} \langle z, w \rangle$

$<z, \lambda w> = \lambda <z, w>$

$<z+z', w> = <z, w> + <z', w>$

$<z, w+w'> = <z, w> + <z, w'>$

- HERMITIANA:

$<z, w> = \overline{<w, z>}$

- PRODOTTO SCALARE:

$<z, z> \in \mathbb{R}$

$<z, z> \geq 0$

$<z, z> = 0 \iff z = \underline{0}$

- $<z, w>_1 = z_1 w_1 - i z_1 w_2 + i z_2 w_1.$

SESQUILINEARE?

FISSO $\lambda \in \mathbb{C}$.

$<\lambda z, w>_1 = \lambda z_1 w_1 - i \lambda z_1 w_2 + i \lambda z_2 w_1 =$

$= \lambda (z_1 w_1 - i z_1 w_2 + i z_2 w_1) = \lambda <z, w> \underset{\substack{\uparrow \\ \text{IN GENERALE}}}{\neq} \bar{\lambda} <z, w>$

$\longrightarrow$ NON È SESQUILINEARE.

- $<z, w>_2 = \bar{z}_1 w_1 - i \bar{z}_1 w_2 - i \bar{z}_2 w_1$

FISSO $\lambda \in \mathbb{C}$.

- $<\lambda z, w>_2 = \overline{\lambda z_1} w_1 - i \overline{\lambda z_1} w_2 - i \overline{\lambda z_2} w_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RACCOLGO } \bar{\lambda} \\ (\overline{\lambda z_i} = \bar{\lambda} \bar{z}_i)}}{=}$

$= \bar{\lambda} <z, w>_2$ ✓.

- $\langle z, \lambda w \rangle_2 = \bar{z}_1 \lambda w_1 - i \bar{z}_1 \lambda w_2 - i \bar{z}_2 \lambda w_1 \underset{\uparrow \text{RACCOLGO } \lambda}{=}$

  $= \lambda \langle z, w \rangle_2$ ✓.

- $\langle z + z', w \rangle = \overline{(z_1 + z_1')} w_1 - i \overline{(z_1 + z_1')} w_2 - i \overline{(z_2 + z_2')} w_1$

  $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{PROP.} \\ \text{DISTRIBUTIVA}}}{=} \bar{z}_1 w_1 - i \bar{z}_1 w_2 - i \bar{z}_2 w_1 + \bar{z}_1' w_1 - i \bar{z}_2' w_2 - i \bar{z}_1' w_2$

  $= \langle z, w \rangle_2 + \langle z', w \rangle_2$ ✓.

- ANALOGO PER $\langle z, w + w' \rangle_2 = \langle z, w \rangle_2 + \langle z, w' \rangle_2$ ✓.

HERMITIANA?

$\overline{\langle z, w \rangle_2} = \overline{\bar{z}_1 w_1 - i \bar{z}_1 w_2 - i \bar{z}_2 w_1} =$

$= \bar{\bar{z}}_1 \bar{w}_1 - (\bar{i}) \bar{\bar{z}}_2 \bar{w}_1 - (\bar{i}) \bar{\bar{z}}_1 \bar{w}_2 =$

$= z_1 \bar{w}_1 \underbrace{-(-i)}_{=+i} z_2 \bar{w}_1 \underbrace{-(-i)}_{=+i} z_1 \bar{w}_2 \neq \langle w, z \rangle$ ✗

- $\langle z, w \rangle_3 = \bar{z}_1 w_1 - i \bar{z}_1 w_2 + i \bar{z}_2 w_1$

- SESQUILINFARE?

  ANALOGA A $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ ✓. (CAMBIANO SOLO I COEFFICIENTI E NON GLI $z_i, \bar{z}_i, w_i, \bar{w}_i$)

- HERMITIANA?

  $\overline{\langle z, w \rangle_3} = \bar{\bar{z}}_1 \bar{w}_1 - (\bar{i}) \bar{\bar{z}}_1 \bar{w}_2 + (\bar{i}) \bar{\bar{z}}_2 \bar{w}_1 =$

  $= z_1 \bar{w}_1 - (-i) z_1 \bar{w}_2 + (-i) z_2 \bar{w}_1 =$

  $= \bar{w}_1 z_1 + i \bar{w}_2 z_1 - i \bar{w}_1 z_2 = \langle w, z \rangle$ ✓✓.

- PRODOTTO SCALARE?

$$\langle z,z\rangle = z_1\bar{z}_1 - i\bar{z}_1 z_2 + i\bar{z}_2 z_1 =$$

$$= |z_1|^2 + i\left(\bar{z}_2 z_1 - \underbrace{\bar{z}_1 z_2}\right) =$$

$$= |z_1|^2 + i\left(z_1\bar{z}_2 - \overline{(z_1\bar{z}_2)}\right) = \circledast.$$

IN GENERALE, PER $t = a+ib \in \mathbb{C}$ $(a,b \in \mathbb{R})$:

$$t - \bar{t} = a+ib-(a-ib) = (a-a)+i(b+b) = 2ib.$$

ma $t-\bar{t} = 2i(\mathrm{Im}(t))$.

$$\to \circledast = |z_1|^2 + i(2i\,\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)) = |z_1|^2 - 2\,\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2).$$

$$\Rightarrow \langle z,z\rangle_3 \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{C}^2.$$

- $\langle z,z\rangle_3 \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$?

$z_1 = a+ib,\quad z_2 = c+id,\quad z = (z_1,z_2)$

$$\Rightarrow \langle z,z\rangle_3 = |z_1|^2 - 2\,\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2) =$$

$$= (a^2+b^2) - 2\,\mathrm{Im}\left((a+ib)(c+id)\right) =$$

$$= (a^2+b^2) - 2\,\mathrm{Im}\left((ac-bd)+i(bc+ad)\right)$$

$$= (a^2+b^2) - 2(bc+ad).$$

$\to$ NON È SEMPRE ≥ 0!

$b=0 \to \langle z,z\rangle_3 = a^2 - 2ad$

ma PRENDO $d = a \to \langle z,z\rangle_3 = a^2 - 2a^2 = -a^2 < 0$! ✗

MATRICE RISPETTO LA BASE CANONICA?

$$M_e(\langle\cdot,\cdot\rangle_3) = \begin{pmatrix} \langle e_1,e_1\rangle_3 & \langle e_1,e_2\rangle_3 \\ \langle e_2,e_1\rangle_3 & \langle e_2,e_2\rangle_3 \end{pmatrix}.$$

$$\langle e_1,e_1\rangle_3 = \langle (\underset{\underset{z_1}{\uparrow}}{1},\underset{\underset{z_2}{\uparrow}}{0}),(\underset{\underset{w_1}{\uparrow}}{1},\underset{\underset{w_2}{\uparrow}}{0})\rangle_3 =$$

$$= \underset{\underset{=1}{\uparrow}}{\bar{1}}\cdot 1 - i\,\bar{1}\cdot 0 + i\,\underset{\underset{=0}{\uparrow}}{\bar{0}}\cdot 1 = 1$$

$$\langle e_1,e_2\rangle_3 = \langle (\underset{\underset{z_1}{\uparrow}}{1},\underset{\underset{z_2}{\uparrow}}{0}),(\underset{\underset{w_1}{\uparrow}}{0},\underset{\underset{w_2}{\uparrow}}{1})\rangle_3 =$$

$$= \bar{1}\cdot 0 - i\,\bar{1}\cdot 1 + i\,\bar{0}\cdot 0 = -i$$

$$\langle e_2,e_1\rangle_3 \underset{\underset{\text{HERMITIANA}}{\uparrow}}{=} \overline{\langle e_1,e_2\rangle_3} = \overline{-i} = i$$

$$\langle e_2,e_2\rangle_3 = \langle (\underset{\underset{z_1}{\uparrow}}{0},\underset{\underset{z_2}{\uparrow}}{1}),(\underset{\underset{w_1}{\uparrow}}{0},\underset{\underset{w_2}{\uparrow}}{1})\rangle =$$

$$= \bar{0}\cdot 0 - i\,\bar{0}\cdot 1 + i\,\bar{1}\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow M_e(\langle\cdot,\cdot\rangle_3) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$ ✓✓✓

!

IN GENERALE $\langle\cdot,\cdot\rangle$ È SESQUILINEARE

$\Longleftrightarrow \langle z,w\rangle = \sum a_{ij}\,\bar{z}_i\,w_j$

È HERMITIANA $\Longleftrightarrow a_{ij} = \bar{a}_{ij}$

E IN QUESTO CASO $M_e(\langle\cdot,\cdot\rangle) = (a_{ij})^{n}_{i,j=1}$

(2b) DIRE PER $\langle \cdot,\cdot \rangle_j : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ SE È BILINEARE E SIMMETRICA, E IN CASO SE È PRODOTTO SCALARE.

PROMEMORIA

FORMA BILINEARE

- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$
- $\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$

SIMMETRICA

$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

PRODOTTO SCALARE

$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$

$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \underline{0}$

- $\underline{\langle x, y \rangle_1} = \underline{x_1^2 + x_2 y_2 - 2 y_3^2}$

$$\langle \lambda x, y \rangle_1 = \lambda^2 x_1^2 + \lambda x_2 y_2 - 2 y_3^2$$

$$\underset{\uparrow \text{ex: } \lambda = 2}{\neq} \lambda \langle x, y \rangle_1 .$$

→ NON È FORMA BILINEARE

- $\langle x, y \rangle_2 = 2 x_1 y_1 + 2 x_1 y_2 + 2 x_2 y_1 + 3 x_2 y_2 - x_1 y_3 - x_3 y_1 + 4 x_3 y_3$

PROMEMORIA

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ FORMA BILINEARE $\iff \langle x, y \rangle = \sum a_{ij} x_i y_j$

$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_2$ È BILINEARE ✓

SIMMETRICA?

$$\langle y,x\rangle_2 = 2y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 + 3y_2x_2 - y_1x_3 - y_3x_1 + 4y_3x_3 = \langle x,y\rangle_2 \quad \checkmark\checkmark.$$

PRODOTTO SCALARE?

CERCHIAMO DI CAPIRE SE $\exists\ x \neq \underline{0}$ t.c. $\langle x,x\rangle_2 = 0$.

$$\langle x,x\rangle_2 = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1x_3 + 4x_3^2 =$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3^2 =$$

$$= (x_1+x_2-x_3)^2 + (x_1+x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + 2x_3^2 = \circledast$$

$\circledast \geq 0$ $\checkmark\checkmark$. $\quad \circledast = 0 \iff \underline{x} = 0$?

$$\circledast = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$\iff \underline{x} = 0$. $\rightsquigarrow$ $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ È P. SCALARE $\checkmark\checkmark\checkmark$.

STRADA ALTERNATIVA

A MATRICE ASSOCIATA A $\langle\cdot,\cdot\rangle$ $\left(\begin{array}{l} \langle x,y\rangle = \sum a_{ij} x_i y_j \\ \to A = (a_{ij}) \end{array} \right)$

$\to$ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ È PRODOTTO SCALARE $\iff$ A HA SOLO AUTOVALORI >0

$$\langle x,y\rangle_3 = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_3 + 2x_3y_3$$

$\langle x,y\rangle_3 = \sum a_{ij} x_i y_j$ $\checkmark$ $\to$ BILINEARE

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{NON È SIMMETRICA}$$

$\Rightarrow$ $\langle x,y\rangle_3$ NON È SIMMETRICA

$\Rightarrow$ NON È PRODOTTO SCALARE ✗