Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2021-2022, sessione invernale, secondo appello

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Si ponga per $a, b \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + a + bx^2 & \text{se } x \le 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(*i*) Si determinino $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che f sia di classe C^2 in $\mathbb{R}$.

Abbiamo $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. La continuità richiede $f(0) = 1 + a = 0$

$\Rightarrow a = -1$.

$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (-\sin x + 2bx) = 0 \quad \forall b$

$f'_s(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \Rightarrow f \in C^1 \ \forall b.$

$(f')'_s(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)}{x} \overset{\text{Hop.}}{=} \lim_{x\to 0^-} f''(x) = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

$(f')'_d(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} (-\sin x + 2bx)' = -\cos 0 + 2b = -1 + 2b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$

(*ii*) Stabilire, spiegandone in dettaglio le ragioni, se esistono valori di a, b tali che $f(x)$ e' in $C^\infty(\mathbb{R})$.

Quindi, $f \in C^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a = -1$ e $b = \frac{1}{2}$.

Se fosse $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, avremmo $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n. \Rightarrow f(x) = o(x^n) \ \forall n$

Ma per $x \ge 0$ $f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^4)$

$= \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = \frac{x^4}{4!}(1 + o(1)) \ne o(x^4)$

ESERCIZIO N. 2. Si stabilisca il numero delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^5 + 2|z|^2 = 1$. $\ast$

$z = r(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$

$$\begin{cases} r^5 \cos(5\vartheta) + 2r^2 = 1 \\ r^5 \sin(5\vartheta) = 0 \end{cases}$$

Deve essere $\sin(5\vartheta) = 0$ $\Rightarrow$ $\cos(5\vartheta) \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

per $\cos(5\vartheta) = -1$ otteniamo

$2r^2 = 1 + r^5$ che ha una soluzione per $r = 1$

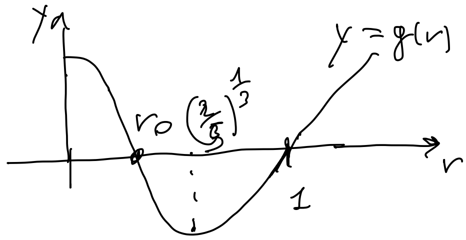
vediamo se ci sono altre soluzioni. Poniamo

$g(r) \doteq r^5 + 1 - 2r^2$ $\quad g'(r) = 5r^4 - 2r = r(5r^3 - 2) = 0$

per $r = 0, \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$,

$g'(r) < 0$ per $0 < r < \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

$g'(r) > 0$ per $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} < r$



Soluzioni di $g(r) = 0$ $\quad r = r_0, 1$

$\Rightarrow$ 10 soluzioni di $\ast$

Per $\cos(5\vartheta) = 1$ consideriamo $h(r) = r^5 + 2r^2 - 1$

ove $h(0) = -1$, $h(+\infty) = +\infty$ $\quad h'(r) = 5r^4 + 4r >$ per $r > 0$.

Questo implica h è strettamente crescente ed $h(r) = 0$ ha esattamente una soluzione r_1, con $0 < r_1 < 1$, visto che $h(1) = 2$

Infine, verifichiamo se $r_1 \neq r_0$. Se fosse $r_1 = r_0$ avremmo

$$r_0^5 - 2r_0^2 + 1 = 0 = r_0^5 + 2r_0^2 - 1 \iff 2r_0^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ma allora $0 = r_0^5 + 2r_0^2 - 1 = r_0^5 = 2^{-\frac{5}{2}}$, assurdo.

Allora $r_0 \neq r_1$ e questo ci consente di concludere che le soluzioni di $\ast$ sono 15.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Studiare la funzione

$$f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

• si determini il dominio di definizione calcolando il comportamento di f alle estremitá del dominio ;

Siccome, posto $g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) & t \neq 0 \\ 0 & t=0 \end{cases}$, risulta $g \in C^0([0,x])\ \forall x>0$ e $\lim_{t\to 0^-} \frac{g(t)}{\frac{1}{t}} = -\infty$; risulta $g \in L[0,x]\ \forall x>0$ e $g \notin L[x,0]\ \forall x<0$.

$\Rightarrow$ dominio $f = [0,+\infty)$. Abbiamo $f(0)=0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x (1+o(1))\,dt = +\infty$

• si calcoli $f'(x)$ e si trovino eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) > 0$ per $x>0$ e

$f'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. Quindi f è strettamente crescente con 0 il punto di minimo assoluto

• si stabilisca dove $f(x)$ e' concava e dove e' covessa; Per $x>0$

$f''(x) = \left(-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}(x^2-2x+1) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}(x-1)^2 \geq 0$

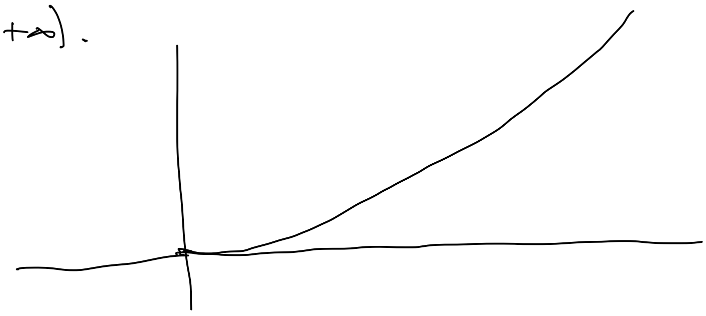
$\Rightarrow f$ convessa

• si stabilisca se esistono rette asintotiche e si tracci il grafico . $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_1^x \left[\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)-1\right]dt + f(1)-1\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \left(-\frac{1}{t}+\frac{3}{2}\frac{1}{t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) + f(1) - 1 = -\infty$ perché $\frac{3}{2}\frac{1}{t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right) \in L[1,+\infty)$

mentre $\frac{1}{t} \notin L[1,+\infty)$.



ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = x^5 + x^3 + x$:

(*i*) dimostrare che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e' biettiva;

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ suriettiva

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow f$ strett crescente

$\Rightarrow f$ è biettivo

(*ii*) denotando con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione inversa, dimostrare che g ha derivate di qualsiasi ordine;

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{5x^4 + 3x^2 + 1}$ per ogni y e per $x = g(x)$

quindi $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \Rightarrow g''(y) = -\frac{1}{(f'(g(y)))^2} f''(g(y))\, g'(y)$

Supponiamo che $g(y)$ sia derivabile fino all'ordine n. Allora $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$ è derivabile fino all'ordine n, cioè $g(y)$ è derivabile fino all'ordine $n+1$. Allora $g \in C^\infty(\mathbb{R})$

(*iii*) calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 2 di g;

$f(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$, $g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$, $g''(0) = 0$ (visto che g è dispari, come f). Cioè $P_2(y) = y = P_1(y)$

(*iv*) valutare l'errore $|g(1) - p_2(1)|$. La cosa più semplice è osservare che

$P_2(1) = 1$ mentre $g(1) = x_0$ dove $x_0^5 + x_0^3 + x_0 = 1$.

Deve essere $0 < x_0 < 1$. quindi $0 < P_2(1) - g(1) = 1 - x_0 < 1$.