

# Geometria 1

## Programma del corso

Docente: Prof. Daniele Zuddas

A. A. 2021-2022

Insiemi, relazioni, funzioni, operazioni binarie, cenni sui gruppi e sui campi. Numeri complessi, congruenza. Algoritmo di Euclide per il massimo comun divisore, campi  $\mathbb{Z}_p$ .

Spazi vettoriali numerici reali e complessi, spazi vettoriali astratti. Combinazioni lineari e dipendenza lineare. Sottospazi vettoriali, generatori, spazi vettoriali finitamente generati, esistenza delle basi, dimensione, completamento della base. Combinazioni lineari di famiglie arbitrarie di vettori, cenni sugli spazi vettoriali di dimensione infinita, spazio dei polinomi. Intersezione e somma di sottospazi vettoriali, formula di Grassmann, somma diretta.

Matrici, applicazioni lineari, isomorfismi, matrice inversa, gruppo degli automorfismi di uno spazio vettoriale, gruppo lineare generale, matrice del cambiamento di base.

Sistemi lineari, forma matriciale, spazio delle soluzioni, sistemi a gradini, operazioni elementari. Metodo di eliminazione di Gauss. Traslazioni, sottospazi affini, giacitura.

Teorema di struttura per sistemi lineari, soluzione generale. Nucleo e immagine di un'applicazione lineare, rango, teorema della dimensione. Teorema di Rouché-Capelli.

Teorema di determinazione di un'applicazione lineare, invarianza della dimensione, classificazione degli spazi vettoriali di dimensione finita. Spazio delle applicazioni lineari e isomorfismo con lo spazio delle matrici.

Cenni sulle permutazioni, gruppo simmetrico, cicli e trasposizioni, segno e parità di una permutazione, proprietà moltiplicativa.

Determinante, formula di Leibniz, matrici triangolari, multilinearità e alternanza. Teorema di Binet, determinante della matrice inversa, matrici simili. Minori, cofattori e sviluppo di Laplace. Formula per la matrice inversa, teorema di Cramer, teorema di Kronecker.

Forme lineari e spazio vettoriale duale, base duale, equazioni di sottospazi affini.

Diagonalizzazione di endomorfismi, autovalori e autovettori, polinomio caratteristico, molteplicità algebrica e geometrica, teorema fondamentale dell'algebra (senza dimostrazione), basi diagonalizzanti, teorema di diagonalizzazione, diagonalizzabilità nel caso complesso.

Forme bilineari, matrici congruenti, prodotti scalari, spazi vettoriali Euclidei, ortogonalità, complemento ortogonale, norma, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, distanza Euclidea, disuguaglianza triangolare, angolo tra due vettori. Sistemi di vettori ortogonali, ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, basi ortonormali (solo in dimensione finita), formule per il prodotto scalare e per la norma. Matrici ortogonali, isometrie lineari, proiezione ortogonale. Cenni sul prodotto vettoriale.

Caso complesso: forme sesquilineari, spazi vettoriali Hermitiani, matrici Hermitiane, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz complessa. Autovalori di matrici Hermitiane.

Endomorfismi autoaggiunti, ortogonalità degli autospazi, teoremi spettrali per endomorfismi autoaggiunti Euclidei e Hermitiani. Matrici unitarie, automorfismi unitari, teorema spettrale unitario. Decomposizione ai valori singolari (SVD).