Ex1

mercoledì 26 gennaio 2022 14:28

EX1

$$A := S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

MATRICE ORTOGONALE S t.c. ^tSAS SIA DIAGONALE ?

TROVARE $S \iff$ TROVARE BASE ORTONORMALE DI AUTOVETTORI DI A.

! SE METTIAMO $\sin\alpha = 0$ $\Rightarrow A$ È GIÀ DIAGONALE $\Rightarrow S = I$ ✓✓. $\rightarrow$ SUPPONIAMO $\sin\alpha \neq 0$

STEP1: AUTOVALORI DI A

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\cos\alpha - \lambda)(-\cos\alpha - \lambda) - \sin^2\alpha =$$

$$= \lambda^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

$\Rightarrow$ AUTOVALORI $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$.
($\leftrightarrow$ RADICI DI $P_A(\lambda)$)

STEP2: A DIAGONALIZZABILE?

(ABBIAMO VISTO IN GENERALE A 2x2 SIMM. $\Rightarrow$ DIAG ✓)

A DIAGONALIZZABILE $\iff m_A(\lambda_i) = m_G(\lambda_i) \ \forall i = 1, 2$.

$$1 \leq m_G(\lambda_i) \leq m_A(\lambda_i) = 1$$

$$\Rightarrow m_G(\lambda_i) = m_A(\lambda_i) = 1 \ \forall i = 1, 2 \ ✓✓.$$

STEP3: AUTOSPAZI

• AUTOSPAZIO DI $\lambda_1 = 1$

$$A - \lambda_1 I = A - I = \begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

$m_G(\lambda_1) = 1 \Rightarrow A - \lambda_1 I$ HA RANGO $1 = \underset{\uparrow\ \text{rg max}}{2} - \underset{\uparrow\ m_G(\lambda_1)}{1}$

$\Rightarrow$ RIDUCENDO PER RIGHE SO DI POTER OTTENERE $\begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathrm{Aut}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \text{SOLUZIONI DI} \\ (\cos\alpha - 1)x + \sin\alpha\, y = 0 \end{pmatrix} \underset{\sin\alpha \neq 0}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = -\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} x \right\} =$$

$$= \left\langle \left(1, \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \right\rangle = \langle (\sin\alpha, 1 - \cos\alpha) \rangle.$$

• AUTOSPAZIO DI $\lambda_2 = -1$?

$$A - \lambda_2 I = A + I = \begin{pmatrix} \cos\alpha + 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha + 1 \end{pmatrix}$$

COME PRIMA, $\mathrm{rg}(A+I) = 2 - \underbrace{m_G(\lambda_2)}_{=1} = 1$

$\Rightarrow$ POSSIAMO RIDURRE FINO AD OTTENERE

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha + 1 & \sin\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Aut}(\lambda_2) = \begin{pmatrix} \text{SOLUZIONI DI} \\ (\cos\alpha + 1)x + \sin\alpha\, y = 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = -\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} x \right\} =$$

$$= \left\{ \left(x, -\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} x\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle 1, -\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} \right\rangle = \langle (-\sin\alpha, \cos\alpha + 1) \rangle.$$

$\Rightarrow$ BASE DI AUTOVETTORI

$$\mathcal{B} = \{ \underbrace{(\sin\alpha, 1 - \cos\alpha)}_{\mathrm{Aut}(\lambda_1)}, \underbrace{(-\sin\alpha, \cos\alpha + 1)}_{\mathrm{Aut}(\lambda_2)} \}$$

STEP4: ORTONORMALIZZIAMO

GLI AUTOSPAZI SONO $\perp$ 2 A 2, QUINDI BASTA ORTONORMALIZZARE SU OGNI AUTOSPAZIO.

• ORTONORMALIZZIAMO $\mathrm{Aut}(\lambda_1)$

$$\|(\sin\alpha, 1 - \cos\alpha)\| = \sin^2\alpha + (1 - \cos\alpha)^2 =$$

$$= \sin^2\alpha + 1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha = 2(1 - \cos\alpha)$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{(\sin\alpha, 1 - \cos\alpha)}{\|(\sin\alpha, 1 - \cos\alpha)\|} = \left(\frac{\sin\alpha}{2(1 - \cos\alpha)}, \frac{1}{2} \right)$$

• ORTONORMALIZZIAMO $\mathrm{Aut}(\lambda_2)$

$$\|(-\sin\alpha, 1 + \cos\alpha)\| = \sin^2\alpha + (1 + \cos\alpha)^2 =$$

$$= \sin^2\alpha + 1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha = 2(1 + \cos\alpha)$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{(-\sin\alpha, 1 + \cos\alpha)}{\|(-\sin\alpha, 1 + \cos\alpha)\|} = \left(-\frac{\sin\alpha}{2(1 + \cos\alpha)}, \frac{1}{2} \right).$$

CONCLUSIONE

$\mathcal{B}' = \{ u_1, u_2 \}$ BASE O.N. DI AUTOVETTORI

$$\Rightarrow S = (u_1 \mid u_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sin\alpha}{2(1 - \cos\alpha)} & -\frac{\sin\alpha}{2(1 + \cos\alpha)} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. ✓✓$$

$$^tSAS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$