Ex2

mercoledì 26 gennaio 2022 14:57

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&0\\2&0&1\end{pmatrix}.$$

1) $L_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ AUTOAGGIUNTO?

2) BASE O.N. DI AUTOVETTORI?

3) $S\in O(3)$, D DIAGONALE t.c. ${}^tSAS=D$?

1) PROMEMORIA $\langle x,f(y)\rangle=\langle f(x),y\rangle$

f AUTOAGGIUNTO $\iff \exists B$ BASE O.N. t.c. $M_B^B(f)$ È SIMMETRICA (SE $K=\mathbb{R}$) / HERMITIANA (SE $K=\mathbb{C}$)

VISTO CHE $L_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(L_A)=A$ E A È SIMMETRICA $\Rightarrow L_A$ È AUTOAGGIUNTO.

PER IL TEOREMA SPETTRALE, È ANCHE DIAGONALIZZABILE ✓✓.

2) STEP 1: AUTOVALORI DI A

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&-1-\lambda&0\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(-1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-4\right)=0 \text{ SE E SOLO SE}$$

$-1-\lambda=0 \to \lambda=-1$

$(1-\lambda)^2-4=0\to(1-\lambda)^2=4\to1-\lambda=\pm2$

$\to \lambda=1\pm2\to\lambda=-1 \vee \lambda=3$

$\leadsto$ AUTOVALORI -1, CON $m_A(-1)=2$; 3, CON $m_A(3)=1$.

STEP 2: AUTOSPAZI.

$Aut(-1)$?

$$A-(-1)I=A+I=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

$\leadsto Aut(-1)=$ (SOLUZIONI DI $2x+2z=0$)

$=\{(x,y,z)\mid 2z=-2x,\ x,y\in\mathbb{R}\}$

$=\{(x,y,-x)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$

$=\langle(1,0,-1),(0,1,0)\rangle$ BASE DI $Aut(-1)$

$Aut(3)$?

$$A-3I=\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Aut(3)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases}-2x+2z=0\\-2y=0\end{cases}\right\}$

$=\{(x,0,x)\in\mathbb{R}^3\mid x\in\mathbb{R}\}=\langle(1,0,1)\rangle$

$\Rightarrow$ BASE DI AUTOVETTORI

$$\mathcal{B}=\{\underbrace{(1,0,-1),(0,1,0)}_{Aut(-1)},\underbrace{(1,0,1)}_{Aut(3)}\}$$

STEP 3: ORTONORMALIZZIAMO

- I 3 VETTORI DI $\mathcal{B}$ SONO GIÀ ORTOGONALI
- $\Rightarrow$ BASTA NORMALIZZARLI.

$$\Rightarrow \mathcal{B}'=\left\{\frac{(1,0,-1)}{\|(1,0,-1)\|},\frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|},\frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|}\right\}$$

$$=\left\{\left(\tfrac{1}{\sqrt2},0,-\tfrac{1}{\sqrt2}\right),(0,1,0),\left(\tfrac{1}{\sqrt2},0,\tfrac{1}{\sqrt2}\right)\right\}$$

BASE ORTONORMALE DI AUTOVETTORI ✓

3) UTILIZZANDO $\mathcal{B}'$, OTTENIAMO

$$S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{{}^tS}_{=S^{-1}}AS=D.\ ✓✓$$