

G.V. MARGAGLIOTTI

**Appunti di
Fisica Nucleare
a.a. 2021/22**

©2021 G.V.Margagliotti

email: giacomo.margagliotti@ts.infn.it

Tel: 040-5583376

Indice

1	Introduzione	9
1.1	I costituenti fondamentali della materia	9
1.2	Elementarità	9
1.3	Il nucleo atomico	10
1.4	Tabella dei nuclidi	14
1.5	Unità di misura e scale dimensionali	16
2	Proprietà del nucleo atomico	19
2.1	Masse dei nuclei	19
2.2	Misura di masse nucleari	21
2.2.1	Metodi spettrometrici	21
2.2.2	Misura di masse tramite reazioni nucleari	22
2.3	Dimensioni dei nuclei	25
2.4	Misura delle dimensioni dei nuclei	25
2.4.1	Raggio di carica: atomi muonici	25
2.4.2	Raggio di carica: nuclei speculari	30
2.4.3	Raggio di carica: diffusione diffrattiva	32
2.5	Natura delle forze nucleari e dimensioni dei nuclei	36
2.5.1	Distribuzione della materia in un nucleo	37
2.5.2	Energia di legame nucleare	38
2.5.3	Neutron drip line	45
2.5.4	Spin dei nuclei	46
2.5.5	Parità e nuclei	49
2.5.6	Momenti elettrici e magnetici dei nuclei	51
2.5.7	Misure dei momenti elettrici e magnetici dei nuclei	55
2.5.8	Isospin	57
2.6	La misura di Rutherford	62
3	Struttura dei nuclei e modelli nucleari	69
3.1	Modello a gas di Fermi	69
3.2	Il modello a Shell	74
3.2.1	Ipernuclei	75
3.2.2	Il potenziale del modello a Shell	79

3.2.3	Nucleoni di valenza	83
4	Instabilità dei nuclei	85
4.1	Decadimento radioattivo di una sola sostanza	87
4.1.1	Misure di vite medie	90
4.2	Decadimento radioattivo di più sostanze	92
4.3	Tecniche radioattive di datazione	99
5	Decadimenti nucleari	105
5.1	Generalità	105
5.2	Radioattività α	107
5.2.1	Energetica dei decadimenti α	107
5.2.2	Soglia di instabilità	110
5.2.3	Teoria del decadimento α	112
5.3	Radioattività β	125
5.3.1	Conversione interna	125
5.3.2	Decadimento β	126
5.3.3	Regole di Sargent	133
5.3.4	Teoria di Fermi dell'interazione debole	134
5.3.5	Il calcolo di Fermi	135
5.3.6	Emissione ritardata di nucleoni	142
5.4	Radioattività γ	144
5.4.1	Energetica dei decadimenti γ	144
5.4.2	Regole di selezione per decadimenti γ	145
6	Processi d'urto	149
6.1	Sezioni d'urto	149
6.1.1	Lunghezza di attenuazione	152
6.1.2	Luminosità	153
6.1.3	Sezione d'urto in funzione dell'impulso	153
6.1.4	Sezione d'urto invariante	154
6.1.5	Probabilità di transizione e sezione d'urto	155
6.2	Approccio quantistico al concetto di sezione d'urto	155
7	Reazioni nucleari in regime non relativistico	157
7.1	Leggi di conservazione	158
7.2	Energetica delle reazioni nucleari	159
7.3	Diffusione da potenziale Coulombiano	164
7.3.1	Sezione d'urto di Mott	168
7.4	Diffusione da potenziale nucleare	171
7.5	Diffusione in onde parziali	174
7.6	Modello ottico	178
7.7	Reazioni con formazione del nucleo composto	181
7.8	Reazioni dirette	183

7.9 Reazioni di risonanza	184
8 Fisica dei neutroni	191
8.1 Sorgenti di neutroni	192
8.2 Assorbimento e moderazione dei neutroni	195
8.3 Reazioni con neutroni e sezioni d'urto	198
9 Radioisotopi e medicina nucleare	203
9.1 Diagnostica per immagini	204
9.2 Produzione di radioisotopi	208
10 La forza nucleare	213
10.1 Sistema legato nucleone-nucleone	214
10.1.1 La diffusione nucleone-nucleone	214
10.1.2 Il deutone	219
10.2 Il potenziale di Yukawa	220
10.3 Analogia atomico-molecolare	225
11 Termodinamica nucleare	229
11.1 Descrizione termodinamica di un nucleo	231
11.2 Fasi della materia nucleare	235
12 Interazioni fra ioni pesanti relativistici	245
12.1 Questo argomento $\longrightarrow$ Valentina Zaccolo	245
13 Fissione nucleare	247
13.1 Teoria elementare della fissione	248
13.2 Sezioni d'urto di fissione	255
13.3 Reazione a catena controllata	256
13.4 Il reattore nucleare preistorico di Oklo	260
14 Fusione nucleare	265
14.1 Caratteristiche della fusione	267
14.1.1 Rilascio energetico	267
14.1.2 Rateo di fusione	267
A Richiami di Relatività ristretta	275
A.1 Coordinate parallele e trasverse	278
A.2 Legge relativistica del moto di una particella	280
B Cinematica relativistica del decadimento in due corpi	283
C La scoperta del neutrone	287
D Applicazioni decadimento α	289
D.0.1 Convertitore termoelettrico a plutonio	289

Capitolo 1

Introduzione

1.1 I costituenti fondamentali della materia

La ricerca dei mattoni fondamentali della materia ha condotto alla scoperta di strutture sempre più piccole che sono via via risultate a loro volta sistemi composti da strutture ancora più piccole. Alla fine del 19° secolo si era ormai convinti che la materia fosse composta da atomi. L'esistenza di un centinaio di elementi diversi con proprietà periodicamente ricorrenti, era però una chiara indicazione che anche gli atomi possedessero una struttura interna e non fossero *indivisibili*.

Il moderno concetto di atomo si sviluppò agli inizi del 20° secolo grazie soprattutto ai risultati degli esperimenti effettuati da Geiger e Mardsen su stimolo di Rutherford.

Un atomo è composto da un nucleo denso circondato da una nuvola di elettroni. Il nucleo è a sua volta scomponibile in costituenti più piccoli, i *nucleoni*, e questi sono prevalentemente di due tipi: *protoni* e *neutroni*.

Prima della scoperta del neutrone (Chadwick 1932) si pensava che i nuclei contenessero protoni ed elettroni, ma come si vedrà questi ultimi non possano essere annoverati fra i costituenti dei nuclei.

1.2 Elementarità

È fin da subito importante chiarire il criterio con cui stabilire se un sistema fisico osservato è un oggetto elementare, cioè privo di struttura interna e che si comporta a tutti gli effetti come un punto materiale, nel senso che non può assorbire energia dall'esterno trasformandola in energia interna. Tutta l'energia trasferita dall'esterno a una particella elementare si deve quindi ritrovare come energia cinetica di quest'ultima. Se il sistema ha gradi di libertà interni, parte dell'energia trasferita può eccitarli, per cui l'energia cinetica associata al moto del baricentro del sistema non dà conto di tutta l'energia trasferita.

Nel descrivere il mondo microscopico non si può prescindere dalle leggi della meccanica quantistica, per cui l'energia dei gradi di libertà interni di una particella non si distribuisce in modo continuo, ma può assumere solo una serie discreta di valori, $E_0, E_1, E_2, \dots$. Quindi per mettere in luce l'esistenza di gradi di libertà interni e determinare di conseguenza l'eventuale natura composita di una particella, si deve trasferire un'energia almeno pari alla soglia $E_s = E_1 - E_0$. Sondando la particella con energie inferiori ad E_s , essa si comporta a tutti gli effetti come elementare. Per questo motivo lo studio della struttura interna delle particelle richiede energie sempre più elevate. Una conseguenza inevitabile è anche che il carattere *elementare* di una particella non può essere definitivamente *dimostrato sperimentalmente*: quanto si può affermare è soltanto che fino a una certa scala d'energia la particella in esame si comporta come una particella elementare. In base a queste considerazioni è possibile stabilire che una particella non è elementare anche senza essere in grado di osservarne i componenti, semplicemente sulla base della sua capacità di assorbire energia per eccitazione dei modi interni.

1.3 Il nucleo atomico

Si può dire che la fisica nucleare sia nata nel 1896, anno in cui H. Becquerel osservò che una lastra fotografica vergine e protetta dalla luce, era stata "impressionata" da radiazioni emanate da frammenti di minerale d'uranio, scoprendo così, accidentalmente, la radioattività.

Nel 1904 J.J. Thomson propose un modello di atomo in cui immaginava che il volume dell'atomo stesso fosse costituito da una distribuzione diffusa di carica positiva nella quale erano immerse le cariche negative elettroniche in modo simile a come lo sono *le uvette passite in un panettone* e tali da rendere l'atomo elettricamente neutro nella sua globalità.

Nel 1909 E. Rutherford ideò e sovrintese l'esperimento che porta il suo nome, ma fu eseguito da H.W. Geiger ed E. Marsden, in cui bombardando con particelle α un bersaglio costituito da un sottile foglio d'oro, si voleva sottoporre ad analisi il modello di Thomson. Sorprendentemente la diffusione osservata di particelle α contraddiceva l'ipotesi di Thomson, mostrando che l'attraversamento del bersaglio d'oro produceva un numero di particelle α deviate ad angoli grandi più elevato di ben 5 ordini di grandezza rispetto a quanto si potesse prevedere da semplici fluttuazioni statistiche basate sull'ipotesi dell'atomo alla Thomson. Rutherford analizzando i risultati dell'esperimento, nel 1911 propose che ciò fosse dovuto al fatto che l'atomo non va considerato come un *panettone* ma piuttosto come una specie di *sistema planetario*, con le cariche positive concentrate in un *nucleo* piccolo, duro e massivo, posto al centro e gli elettroni, molto leggeri, che orbitano attorno

a questo nucleo sottoposti al suo potenziale coulombiano.

La stima delle dimensioni del nucleo che Rutherford ottenne, $10^{-15} \div 10^{-14}$ m, lo portò ad affermare che un atomo è sostanzialmente *vuoto*, essendo le dimensioni delle *orbite atomiche* dell'ordine di 10^{-10} m. La constatata

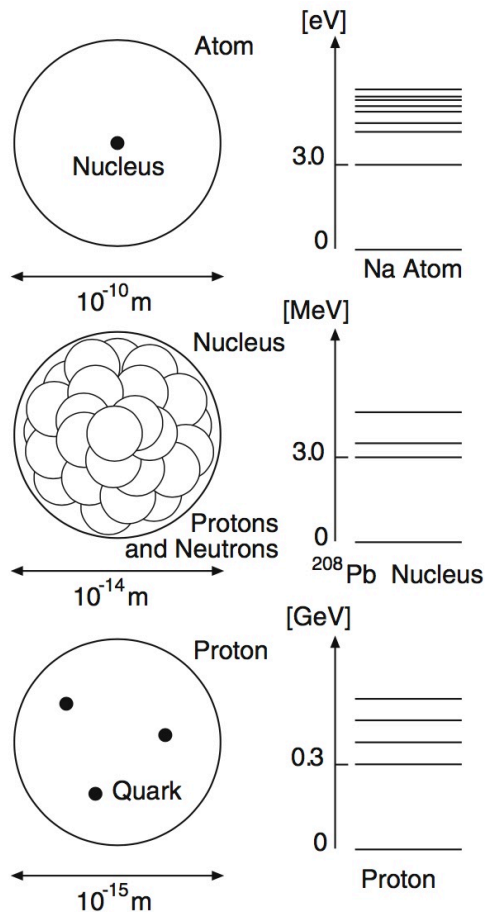


Figura 1.1: Scale dimensionali del mondo atomico, nucleare e subnucleare

durezza del nucleo lo portò poi a proporre un'immagine strutturale *naïf* ma per molti versi estremamente realistica, in cui lo si immagina come costituito da un raggruppamento di sferette quasi rigide (nucleoni), a massimo impacchettamento, da cui la forma che tende ad una sfera all'aumentare del numero A di nucleoni, di volume direttamente proporzionale ad A , per cui il raggio R di questa "sfera", proporzionale alla radice cubica del volume, lo è di conseguenza anche ad $A^{1/3}$:

$$R(A) = r_0 A^{1/3} \quad (1.1)$$

con r_0 parametro da determinare.

Una specie nucleare è caratterizzata dalla carica totale e dalla massa totale del nucleo che la rappresenta. La carica netta positiva è un multiplo intero del valore assoluto della carica di un elettrone, $+Ze$, con Z il numero atomico.

La principale particella carica positiva presente in un nucleo è il protone, che costituisce anche il più semplice esempio di nucleo, quello dell'atomo di idrogeno.

Il nucleo di un atomo con numero atomico Z contiene perciò Z protoni, da cui la globale neutralità di un atomo, dati i suoi Z elettroni.

La massa di un protone è circa 200 volte superiore a quella di un elettrone ($m_p \simeq 200 m_e$) per cui spesso si può trascurare il contributo degli elettroni trattando delle masse di atomi.

Il numero di massa di una specie nucleare, indicato con A , rappresenta il numero intero più prossimo al rapporto fra la massa di un nucleo e la massa di un protone.

Per la gran parte dei nuclei si ha $A > Z$, con la differenza $A - Z$ che cresce al crescere di A . Da ciò l'evidenza che un nucleo deva contenere più oggetti massivi degli Z protoni che ne garantiscono la carica elettrica.

Inizialmente si pensò che la massa di un nucleo fosse praticamente tutta dovuta a protoni, che l'avrebbero giustificata in numero di A protoni in ogni nucleo, assieme ad $A - Z$ elettroni che ne bilanciassero la carica. Ma si capì che un certo numero di ragioni impediva che l'elettrone potesse essere un componente strutturale di un nucleo:

- Dovrebbe esserci evidenza di una forza attrattiva molto più intensa di quella coulombiana, fra gli elettroni e i protoni del nucleo, ma allora come mai questa forza non coinvolge anche gli elettroni atomici rispetto ai protoni del nucleo?
- Si può argomentare ricordando il principio di indeterminazione

$$\Delta p \Delta x \sim h \quad (1.2)$$

dove Δx rappresenta l'incertezza nella posizione dell'elettrone nel nucleo, quindi dell'ordine delle dimensioni lineari del volume nucleare, ovvero circa 10^{-14} m. Da cui un'incertezza sull'impulso dell'ordine di

$$\Delta p \sim \frac{h}{\Delta x} \sim 4.14 \times 10^{-7} \text{ MeV s m}^{-1} \quad (1.3)$$

Detta m_e la massa dell'elettrone, una grezza stima della sua energia totale nel nucleo si ottiene da

$$E_{tot}^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4 \quad (1.4)$$

assumendo che il suo impulso p_e nel nucleo sia dell'ordine di quanto appena trovato per l'incertezza Δp . Sostituendo e ricordando che $c \simeq$

3×10^8 m/s e che $m_e \simeq 0.51$ MeV/ c^2 , si ha

$$E_{tot} \simeq 124 \text{ MeV} \quad (1.5)$$

che in questo caso coinciderebbe sostanzialmente con l'energia cinetica di un ipotetico elettrone libero di muoversi nel nucleo. Ma una simile energia non è compatibile con l'esistenza di un nucleo legato, per il quale l'energia media di legame per nucleone è dell'ordine di 8 MeV, e neppure con le energie sperimentalmente misurate degli elettroni emessi da nuclei e dovuti al decadimento β , che sono al massimo dell'ordine di alcuni MeV.

- Un altro argomento viene dal considerare i valori di momento angolare totale dei nuclei, come detto al successivo paragrafo [2.5.4](#).
- Per nuclei che contenessero elettroni disaccoppiati ci si aspetterebbe di misurare valori dei momenti magnetici ben maggiori di quelli invece osservati. Per il deuterio ad esempio, se il nucleo contenesse un elettrone, ci si attenderebbe un valore del momento di dipolo magnetico superiore di circa 2000 volte rispetto a quello osservato.

La scoperta del neutrone risolse il problema, individuando in esso il componente neutro dei nuclei: un neutrone ha carica netta nulla e massa superiore a quella di un protone dello 0.14% circa.

Un nucleo con numero di massa A è quindi costituito da Z protoni ed $A - Z = N$ neutroni fra loro legati, impacchettati in volumi le cui dimensioni sono dell'ordine di 10^{-44} m³, vanno cioè da poche unità ad alcune decine di fm³ a seconda dei nuclei, con una densità media $\rho_0 \simeq 0.17$ nucleoni $\times$ fm⁻³. Ogni protone ha carica elettrica positiva pari, in valore assoluto, a quella di ogni elettrone ($q_p = 1.602 \times 10^{-19}$ C); ogni neutrone è elettricamente neutro, ma possiede un momento magnetico intrinseco non nullo pari in modulo a oltre il 68 % di quello del protone, e questo è un chiaro indizio dell'esistenza di una struttura interna per il neutrone.

La sostanziale corrispondenza fra le masse di protone e neutrone è uno dei motivi che ha suggerito di introdurre il concetto di *nucleone* inteso come particella componente di un nucleo atomico, indifferentemente dal suo specifico stato di carica elettrica, per cui un nucleo con numero di massa A e carica $+Ze$ contiene A nucleoni di cui Z protoni ed $A - Z = N$ neutroni.

Per indicare una definita specie nucleare, o nuclide X si utilizza una scrittura del tipo: A_ZX_N , dove X rappresenta il simbolo chimico. Questa scrittura è ridondante e talvolta si omette l'indicazione di N .

Nuclei con ugual numero atomico Z e diverso numero di massa A e quindi N vengono detti isotopi.

Nuclei con ugual numero di massa A e diversi numeri atomici Z ed N vengono detti iobari.

Un nucleo in uno stato eccitato è detto *isomero* del proprio stato fondamentale.

Riportando i valori sperimentali delle masse nucleari $M(A, Z)$ su una terza coordinata ortogonale al piano $(Z; N)$, si ha una rappresentazione tridimensionale le cui sezioni con piani ortogonali al piano $(Z; N)$ e passanti per le linee $A = \text{cost.}$, mostrano che i punti rappresentativi dei nuclei appartenenti alle varie *sequenze isobariche* così individuate si dispongono approssimativamente lungo archi di parabola giacenti su tre falde distinte: sulla falda superiore ci sono i nuclei con Z ed N entrambi dispari, su quella intermedia quelli con A dispari (Z pari ed N dispari o viceversa), su quella inferiore i nuclei con Z ed N entrambi pari.

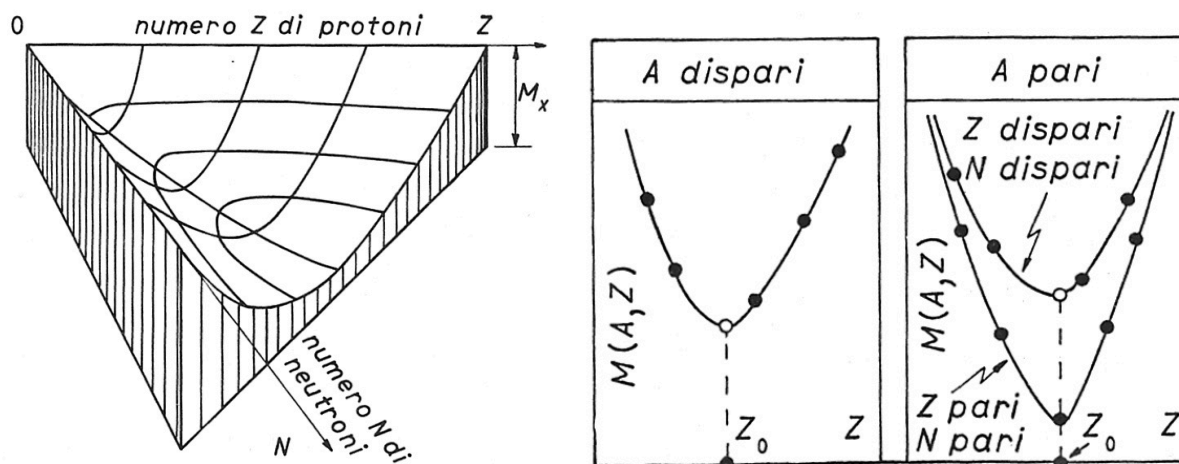


Figura 1.3: A sinistra: distribuzione tridimensionale e curve di livello isobarico delle masse nucleari in funzione di A e Z . A destra: sequenze isobariche corrispondenti a valori rispettivamente dispari e pari di A .

Un nucleo A_ZX è detto *stabile* se sopravvive indefinitamente nel tempo, *instabile* se invece si trasforma *spontaneamente* in un'altra specie nucleare ${}^{A'}_{Z'}X$ mediante un processo di decadimento.

Il valore Z_0 in corrispondenza del minimo di $M(A, Z)$ è il numero atomico dell'isobaro più stabile della particolare sequenza analizzata.

L'esame sistematico delle varie specie nucleari in funzione di A e Z mostra alcune *regolarità* utili nello studio della struttura nucleare e delle forze in gioco. I nuclei con A pari, ad esempio, hanno da uno a tre isotopi stabili, quelli con A dispari invece, uno solo; i nuclei con Z (N) pari hanno almeno due isotopi (isotoni) stabili, quelli con Z (N) dispari non ne hanno mai più di due.

Le regolarità individuate non hanno carattere di *assolutezza* e valgono solo per la gran parte dei nuclei che costituiscono una determinata famiglia nucleare.

www.nndc.bnl.gov/chart/, curato dai Brookhaven National Laboratories.

Lo studio delle *abbondanze isotopiche relative* dei vari nuclei nei materiali che compongono la Terra, i meteoriti, il Sole e le altre stelle mostra la presenza di massimi in corrispondenza ad ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{118}_{50}\text{Sn}$, ${}^{88}_{38}\text{Sr}$, ${}^{89}_{39}\text{Y}$, ${}^{90}_{40}\text{Zr}$, ${}^{138}_{56}\text{Ba}$, ${}^{139}_{57}\text{La}$, ${}^{140}_{58}\text{Ce}$, e ${}^{208}_{82}\text{Pb}$, evidenza che le specie nucleari caratterizzate da numeri Z o N appartenenti alla sequenza

$$Z, N = 2, 8, 20, 50, 82, 126 \quad (1.6)$$

posseggono proprietà particolari che ne giustificano la grande abbondanza nell'Universo. Sempre dall'analisi sistematica delle specie nucleari si desume che i nuclei della sequenza (1.6) hanno il massimo numero di isotopi stabili. Per queste e altre proprietà i numeri della sequenza (1.6) sono detti *numeri magici* e li si indica con l'aggiunta di un asterisco (Z^*, N^*).

1.5 Unità di misura e scale dimensionali

Si utilizzerà il Sistema Internazionale (SI) di misura e le varie costanti o parametri saranno sempre esplicitamente indicate. Si indicano comunque delle unità di misura specifiche, alcune di derivazione storica, e se ne discutono le conversioni rispetto alle unità del SI.

L'energia si misura tipicamente in elettron-Volt (eV), ovvero l'energia cinetica acquisita da una particella di carica elementare $e \cong 1.602 \times 10^{-19}$ C accelerata dalla differenza di potenziale di 1 Volt ($1 \text{ eV} \cong 1.602 \times 10^{-19}$ J), o in potenze multiple di ordine 3 dell'eV.

Casualmente l'elettron-Volt risulta una scala appropriata per le transizioni atomiche; quelle nucleari coinvolgono invece energie dell'ordine del MeV.

Una quantità che spesso ricorre è la costante di Boltzmann k_B

$$\begin{aligned} k_B &= 1.38064852(79) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = \\ &= 8.61673324(78) \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Le unità di misura lineari tipiche dell'ambito nucleare e subnucleare sono dell'ordine di 10^{-15} m, che corrispondono grosso modo alle dimensioni lineari di un nucleone; questo ha portato a introdurre la comoda unità di misura detta *fermi*, o *femtometro* ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$).

Le aree vengono tipicamente misurate in *barn*: $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2$.

La velocità c di propagazione nel vuoto di un'onda elettromagnetica, quindi anche della luce, è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale e rappresenta un limite insuperabile. Nel 1983 si è deciso di assumere come esatto (quindi privo d'errore) il valore di c ponendolo pari a

$$c = 299792458 \text{ m/s} \quad (1.8)$$

il che ha anche permesso di ridefinire l'unità di misura della lunghezza, il metro, come la distanza percorsa dalla luce in un intervallo temporale pari

a $1/299792458$ di secondo.

In relatività ristretta l'energia di una particella è legata alla sua massa m e al suo impulso p dalla formula $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$; misurando le masse in eV/c^2 e gli impulsi in eV/c , tutte le formule della cinematica relativistica si semplificano, nel senso che le tre quantità si possono sommare semplicemente senza introdurre i fattori c .

Per il fattore di conversione fra kg ed eV, considerando una massa di 1 kg, l'equivalente in energia è dato da

$$E(1 \text{ kg}) = 1 \text{ kg} \cdot c^2 \cong 9 \cdot 10^{16} \text{ kg (m/s)}^2 \cong 9 \cdot 10^{16} \text{ J} \quad (1.9)$$

Poichè $1 \text{ J} \cong 1/(1.602 \cdot 10^{-19}) \text{ eV}$, ne segue:

$$1 \text{ kg} \cdot c^2 \cong \frac{9 \cdot 10^{16}}{1.602 \cdot 10^{-19}} \cong 5.62 \cdot 10^{35} \text{ eV} \quad (1.10)$$

da cui infine

$$1 \text{ kg} \cong 5.62 \cdot 10^{35} \text{ eV}/c^2 \quad (1.11)$$

Le masse m_e dell'elettrone ed m_p del protone² che valgono rispettivamente circa $9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ e circa $1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, possono essere quindi espresse come circa $0.511 \text{ MeV}/c^2$ e circa $938.27 \text{ MeV}/c^2$; la massa m_n del neutrone vale circa $1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, ovvero $939.56 \text{ MeV}/c^2$.

Un'unità molto usata per le masse, specialmente in ambiti tecnico-applicativi e spettrometrici, è la cosiddetta *unità di massa atomica* u , definita come $1/12$ della massa atomica dell'isotopo ^{12}C del Carbonio:

$$1u = \frac{1}{12} M_{^{12}\text{C}} = 931.494 \text{ MeV}/c^2 = 1.66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (1.12)$$

Le scale temporali tipiche del mondo nucleare dipendono dai fenomeni considerati, si va da valori dell'ordine di 10^{-20} s per la frammentazione di alcuni nuclei instabili quali ^5He o ^8Be , o per l'evoluzione di alcune reazioni nucleari, a valori dell'ordine ad esempio di $10^{-12} \div 10^{-9} \text{ s}$ per decadimenti γ , o a valori sia minori che maggiori per decadimenti β o α , che possono estendersi sino a valori di migliaia o milioni di anni.

I momenti angolari, la cui dimensione fisica è omogenea all'*azione*, si misurano in unità di $\hbar$. Il valore del quanto d'azione è

$$\hbar = h/2\pi \cong 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cong 6.582 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s} \quad (1.13)$$

I momenti magnetici μ si misurano in unità dette *magnetoni elementari*:

$$\mu = q\hbar/2M \quad (1.14)$$

²Per un elenco aggiornato dei valori delle masse di particelle e nuclei si vedano: "The Review of Particle Physics" e "Nuclear Wallet Cards" del Brookhaven National Laboratory

con q il valore assoluto della carica elettrica della particella ed M la sua massa. Si considerano usualmente il *magnetone di Bohr* μ_B ($q = e$ ed $M = m_e$), il *magnetone nucleare* μ_N ($q = e$ ed $M = m_p$).

Ricordando anche che $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, la costante di struttura fine è

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \cong \frac{1}{137.036} . \quad (1.15)$$

Capitolo 2

Proprietà del nucleo atomico

In molti casi la descrizione di un nucleo atomico può tutto sommato richiedere un numero relativamente ridotto di parametri: carica elettrica, estensione lineare che nell'ipotesi di una forma sferica si risolve nella conoscenza del raggio, massa, energia di legame, momento angolare totale, parità, momento di dipolo magnetico, momento di quadrupolo elettrico ed energie degli stati eccitati. Queste vengono solitamente dette *proprietà statiche* di un nucleo, per distinguerle da quelle che sono dette *proprietà dinamiche* e che comprendono probabilità di decadimento, di reazione,

2.1 Masse dei nuclei

La massa $M(A, Z)$ di un nucleo A_ZX con Z protoni e $(A - Z)$ neutroni, è minore della somma delle masse dei suoi nucleoni costituenti:

$$M(A, Z) < Zm_p + (A - Z)m_n \quad (2.1)$$

Per questo un nucleo isolato, che è un ottimo esempio di sistema fisico isolato, non può banalmente scindersi nei suoi costituenti, in quanto così facendo violerebbe il principio di conservazione dell'energia. La quantità

$$\Delta M(A, Z) = M(A, Z) - Zm_p - (A - Z)m_n \quad (2.2)$$

è detta *difetto di massa*, è negativa ed è proporzionale all'energia di legame B del nucleo. Il valore assoluto di ΔM è correlato con la minima energia richiesta per scindere il nucleo in tutti i suoi componenti. Il fatto che $B < 0$ garantisce che il nucleo resti legato, e lo sarà tanto più fortemente quanto più negativo è il valore di ΔM , e quindi di B , a parità di A .

Difetto di massa ed energia di legame sono correlati dalla

$$B = c^2 \Delta M(A, Z) \quad (2.3)$$

Si definisce quindi l'energia media $|B/A| = -B/A$ di legame per un

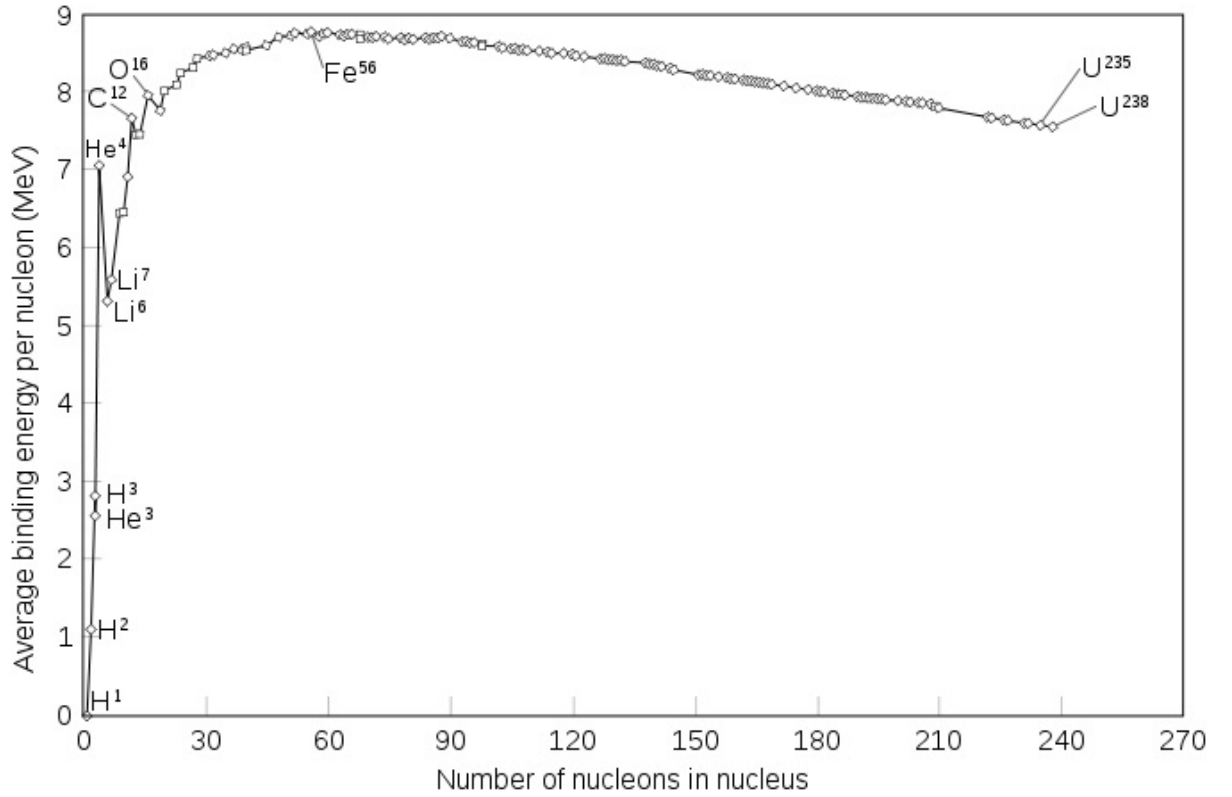


Figura 2.1: Energia media di legame per nucleone $|B/A|$, per la gran parte dei nuclei stabili.

nucleone in un nucleo A_ZX come

$$\left| \frac{B}{A} \right| = \frac{-\Delta M(A, Z)c^2}{A} = \frac{[Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z)]c^2}{A} \quad (2.4)$$

Questa quantità è stata misurata per un gran numero di nuclei stabili e mostra caratteristiche interessanti. Per i nuclei più leggeri ($A \lesssim 20$), $|B/A|$ oscilla significativamente crescendo nel contempo rapidamente con A , per poi saturare raggiungendo un massimo di poco inferiore a 9 MeV in corrispondenza ad $A = 56$, un isotopo del ferro.

Per valori di A maggiori, $|B/A|$ diminuisce molto lentamente. In pratica per un ampio intervallo di specie nucleari, dal carbonio all'uranio, $|B/A|$ si mantiene prossimo a circa 8 MeV. Queste caratteristiche hanno importanti implicazioni sulla natura della forza nucleare e sulla struttura dei nuclei. Si deduce ad esempio che se si scaricano circa 8 MeV di energia cinetica in un nucleo, trasferendoli tutti ad un suo nucleone, questo dovrebbe potersi svincolare dal legame della forza che lo trattiene nel nucleo e uscirne libero.

2.2 Misura di masse nucleari

2.2.1 Metodi spettrometrici

L'energia di legame di un nucleo può essere calcolata se è nota con precisione la corrispondente massa atomica.

La deflessione di uno ione di carica Q in una sequenza di campi elettrici e magnetici ne permette la successiva selezione in energia cinetica E_k e in impulso p . Se le velocità v degli ioni sono sufficientemente basse da potersi mantenere in approssimazione non-relativistica si ha rispettivamente $p = mv$ ed $E_k = mv^2/2$, con m la massa dello ione che si può quindi esprimere in funzione di p ed E_k

$$m = \frac{p^2}{2E_k} \quad (2.5)$$

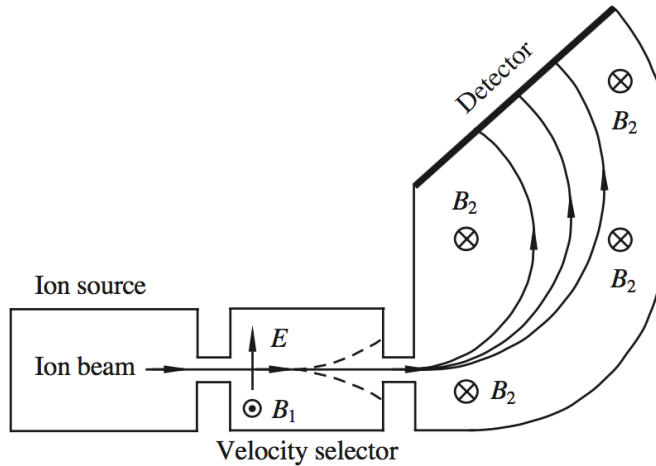


Figura 2.2: Schema di uno spettrometro di massa a deflessione; originariamente il rivelatore consisteva in una lastra fotografica.

In uno spettrometro di massa un fascio di ioni di carica Q , contenente genericamente isotopi di diverse masse m_i , attraversa una regione in cui vi sono un campo elettrico $\mathbf{E}$ e un magnetico $\mathbf{B}_1$, uniformi e fra loro ortogonali, scelti in modo da far passare attraverso una definita fenditura soltanto gli ioni di velocità $|\mathbf{v}| = E/B_1$. Ioni con velocità diverse percorreranno traiettorie, tratteggiate in figura, che non li porteranno ad imboccare la fenditura, in funzione anche dell'apertura di questa. Gli ioni che superano la fenditura, selezionati in velocità, continuano quindi la loro traiettoria in un volume occupato da un secondo campo magnetico uniforme $\mathbf{B}_2$, dove percorrono

orbite circolari di raggi r_i espressi da

$$r_i = \frac{m_i v}{QB_2} \quad (2.6)$$

Fissati Q , B_2 e v , ne risulta che ioni con un definito valore del rapporto Q/m percorrono orbite di ugual raggio e ciò permette di separare isotopi diversi rivelando i punti d'impatto degli ioni su opportuni rivelatori, come mostrato in figura 2.2.

Tenendo conto delle 2.5 e 2.6 si ha infine, per la massa dello ione

$$m_i = \frac{(QB_2 r_i)^2}{2E_k} \quad (2.7)$$

I valori delle masse così ottenuti sono però quelli degli ioni che possono non essere sempre completamente *spogliati* di tutti gli elettroni dell'atomo originario; per risalire all'effettiva massa del nucleo corrispondente bisogna dunque tener conto delle masse di tutti gli elettroni ancora legati allo ione e delle energie di legame di tali elettroni.

Sfruttando la tecnica della spettrometria di massa con acceleratori (AMS)¹ si riescono a ottenere misure di rapporti isotopici fino a 10^{-15} .

2.2.2 Misura di masse tramite reazioni nucleari

Gli spettrometri di massa funzionanti sul principio delle deflessioni elettrica e/o magnetica non sono adatti alle misure di massa per strutture a breve vita media, che prima di decadere non riescono quindi a sopravvivere abbastanza a lungo da percorrere tutto il tragitto nello spettrometro fino al rivelatore. In questi casi si possono ottenere i valori delle masse nucleari dal corretto bilancio energetico di opportune reazioni nucleari.

Si considerino due nuclei che interagiscono dando luogo a prodotti che possono differire da quelli originali, e a seconda che il processo determini un rilascio d'energia, o richieda un apporto iniziale d'energia per aver luogo, la reazione si dirà esotermica o endotermica. La differenza fra la somma delle masse dei nuclei interagenti e quella delle masse dei prodotti dell'interazione, tutte moltiplicate per c^2 , è detta Q -valore della reazione ed è chiaramente $Q > 0$ per reazioni esotermiche e $Q < 0$ per reazioni endotermiche.

Si veda ad esempio una reazione del tipo



e si supponga di conoscere già con una ben definita precisione le masse m_a , m_A e m_b di a , A e b . Lo scopo è dedurre la massa m_B di B . Si supponga

¹Ad esempio: H. Budzikiewicz e R.D. Grigsby, "Mass Spectrometry and Isotopes: a Century of Research and Discussion" - Mass Spectrometry Reviews 25 (2006) 146.

qui inoltre che le energie cinetiche in gioco siano tali da non richiedere la corretta e completa trattazione relativistica, permettendo quindi l'approccio classico approssimato nel tener conto delle conservazioni dell'energia totale e dell'impulso nel sistema di riferimento del laboratorio (SL), che sottintende il bersaglio A inizialmente a riposo.

Dette $E_{t,i}$ ed $E_{t,f}$ le energie totali disponibili nei canali di ingresso e finale della reazione [2.8](#) si ha

$$\begin{cases} E_{t,i} = E_{k,a} + m_a c^2 + m_A c^2 \\ E_{t,f} = E_{k,b} + E_{k,B} + m_b c^2 + m_B c^2 \end{cases} \quad (2.9)$$

dove $E_{k,j}$ ed m_j rappresentano rispettivamente energia cinetica e massa della j -ma particella o nucleo. La conservazione dell'energia totale richiede $\Delta E_{i,f} = E_{t,i} - E_{t,f} = 0$, da cui si ottiene

$$\begin{aligned} m_B &= \frac{E_{k,a} - (E_{k,b} + E_{k,B})}{c^2} + m_a + m_A - m_b \\ &= \frac{E_{k,a} - E_{k,b}}{c^2} - \frac{m_B v_B^2}{2c^2} + m_a + m_A - m_b \\ &= \frac{2}{2c^2 + v_B^2} \left[E_{k,a} - E_{k,b} + (m_a + m_A - m_b) c^2 \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

che permette di esprimere m_B in funzione di quantità note o comunque misurabili sperimentalmente con lo studio della reazione [2.8](#).

Dalla figura [2.3](#) si può ricostruire la cinematica classica della reazione [2.8](#) nel (SL) e per la conservazione dell'impulso si ha

$$\begin{cases} p_{x,B} = p_a - p_b \cos\vartheta \\ p_{y,B} = p_b \sin\vartheta \end{cases} \quad (2.11)$$

Un esempio importante di come determinare la massa di una particella tramite una reazione è quello della cattura di neutroni termici [2](#) da parte dell'idrogeno



ovvero la reazione nucleare inversa della *fotodisintegrazione* del deutone ${}^2\text{H}$, che fra il 1934 e il 1935 portò Chadwick e Goldhaber ad ottenere le prime accurate misure della massa del neutrone [3](#), provando nel contempo che esso

²Un neutrone è detto termico se ha velocità confrontabili con quelle di molecole d'aria a 20 °C, quindi con energie cinetiche dell'ordine o inferiori a 0.025 eV.

³J.Chadwick M.Goldhaber, "A nuclear photo-effect, disintegration of the dipion by gamma rays" - Nature 134 (1934) 237-238; J.Chadwick, M.Goldhaber, "The Nuclear Photoelectric Effect" - Proc.R.Soc.Lond. A151 (1935) 479-493.

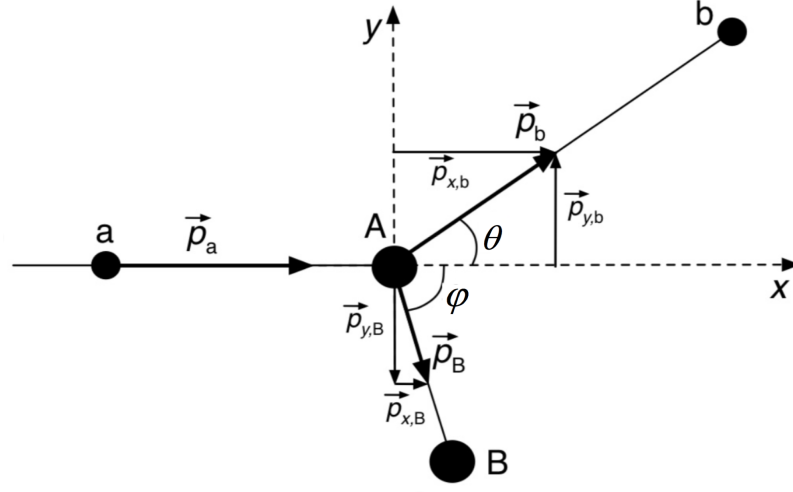


Figura 2.3: Due corpi in due corpi nel Sistema del Laboratorio.

non è uno stato legato fra protone ed elettrone.

La massa del neutrone può essere dedotta dalla conoscenza della massa del protone, di quella del deutone, nucleo di deuterio costituito da un protone e un neutrone fra loro legati, e dell'energia di legame $B(^2\text{H})$ del deutone, con

$$B(^2\text{H}) = (m_n + M_{\text{H}} - M_{2\text{H}}) c^2 \quad (2.13)$$

L'energia di legame $B(^2\text{H})$ del deutone si deduce sperimentalmente dall'energia del γ emesso durante la reazione di cattura di neutroni termici da parte di protoni. Supponendo a riposo i protoni al momento della reazione, per la ridottissima energia cinetica dei neutroni termici rispetto all'equivalente energetico della massa di un nucleone, si può con ottima approssimazione affermare che l'energia di legame di ^2H coincida con l'energia del fotone γ dello stato finale della reazione [2.12](#), sommata all'energia cinetica di rinculo del deutone⁴

$$B(^2\text{H}) = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2M_{2\text{H}}c^2} \quad (2.14)$$

Trascurando anche questa si ha infine, per la massa del neutrone

$$m_n \simeq M_{2\text{H}} - M_{\text{H}} + \frac{E_\gamma}{c^2} \quad (2.15)$$

⁴Per l'energia di rinculo del deutone, con approccio non relativistico nel sistema del centro di massa, la conservazione dell'impulso dá $\frac{E_\gamma}{c} = M_{2\text{H}}v$, da cui $v = \frac{E_\gamma}{M_{2\text{H}}c}$, e quindi l'energia cinetica del deutone è $\frac{1}{2}M_{2\text{H}}v^2 = \frac{1}{2}M_{2\text{H}}\frac{E_\gamma^2}{M_{2\text{H}}^2c^2} = \frac{E_\gamma^2}{2M_{2\text{H}}c^2}$.

L'energia del γ emesso può essere dedotta dalla misura della sua lunghezza d'onda λ_γ con notevole precisione e ciò conduce a

$$E_\gamma = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_\gamma} \simeq 2.224521 \text{ MeV} \quad (2.16)$$

La conoscenza dei valori precisi delle masse di protone e deutone per altre vie permette quindi di ottenere, per la massa del neutrone

$$\begin{aligned} m_n &\simeq 1875.612974 - 938.2720813 + 2.224521 \text{ MeV}/c^2 \simeq \\ &\simeq 939.56541(3) \text{ MeV}/c^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.3 Dimensioni dei nuclei

Per l'atomo non è possibile definire in modo semplice e univoco il valore di un parametro dimensionale, data la natura del potenziale Coulombiano responsabile del legame fra gli elettroni e il nucleo. In quel caso si cerca una definizione operativa che porta a definire il raggio di un atomo, inteso come una struttura a simmetria sferica, come la distanza media dal baricentro dell'atomo degli stati a minor energia di legame ancora popolati da elettroni di quell'atomo.

Per i nuclei la situazione è in parte differente. In essi, come si vedrà, la densità dei nucleoni e il potenziale nucleare hanno una dipendenza spaziale simile dal parametro che ne definisce le dimensioni lineari, e mostrano un valore pressoché costante fino a una breve distanza dal centro della struttura nucleare per poi crollare rapidamente a zero.

Immaginando il nucleo a simmetria sferica, questo porta abbastanza naturalmente a caratterizzarne la forma tramite due parametri, un raggio medio che si estende fino al dimezzarsi del valore della densità nucleonica rispetto al suo valore al centro, e lo spessore di una superficie sfumata, centrata sul raggio medio e che va dal valore quasi massimo della densità nucleonica, sino circa al minimo della stessa.

Il problema concreto sta poi nel definire con chiarezza cosa si cerca di descrivere e come, ovvero se si vuol dare una descrizione dell'estensione della distribuzione di carica elettrica o della distribuzione di massa di un nucleo, e le due cose sono imprescindibilmente legate al modo con cui si indaga l'una o l'altra.

2.4 Misura delle dimensioni dei nuclei

2.4.1 Raggio di carica: atomi muonici

La forza nucleare ha un ridottissimo raggio d'azione; se infatti si considera l'atomo e il fatto che la sua struttura è spiegata ottimamente dalle sole inte-

razioni elettromagnetiche, è chiaro che il raggio d'azione delle forze nucleari non deve estendersi molto oltre le dimensioni del nucleo stesso, altrimenti perturberebbe l'eccellente accordo fra dati sperimentali e previsioni teoriche della fisica atomica.

Il fatto però che il nucleo abbia una distribuzione di carica elettrica estesa nello spazio, legata ai suoi protoni, suggerisce di studiare le eventuali perturbazioni alle energie dei livelli atomici, calcolate nell'ipotesi di un nucleo puntiforme, per dedurre informazioni sulle dimensioni e forma della distribuzione di carica protonica nel nucleo.

Se si immagina il nucleo come una struttura a simmetria sferica centrata in O , queste perturbazioni dipendono dal *raggio "r" del nucleo*, in quanto al suo interno il campo elettrico non è coulombiano e non dipende da $1/r^2$.

La causa di questi effetti è essenzialmente quantistica: per il teorema di Gauss il campo elettrico nella regione "classicamente" fuori dal nucleo dovrebbe coincidere con quello generato da una carica puntiforme pari a Ze e posizionata in O , pertanto un'orbita elettronica classica di raggio maggiore di r non dovrebbe essere perturbata né in forma né in energia. Il livello energetico dell'orbitale atomico dipende in realtà dall'andamento del potenziale in tutto lo spazio, che determina anche la funzione d'onda.

Si calcolino quindi gli spostamenti dei livelli indotti da una carica nucleare Ze supposta, per semplicità, uniformemente distribuita in una sfera di raggio R .

La carica contenuta in una sferetta di raggio $r < R$ è

$$q(r) = Ze \frac{r^3}{R^3} \quad , \quad \text{con} \quad q(R) = Ze \quad (2.18)$$

Di conseguenza il campo elettrico è

$$\begin{aligned} E_e(r) &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2} && \text{esternamente al nucleo } (r > R) \\ E_i(r) &= \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Ze r}{4\pi\epsilon_0 R^3} && \text{internamente al nucleo } (r \leq R) \end{aligned} \quad (2.19)$$

e l'energia potenziale elettrica $eV(r)$ è

$$\begin{aligned} eV(r) &= \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} && \text{esternamente al nucleo } (r > R) \\ eV(r) &= eV_0 + \frac{Ze^2 r^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} && \text{internamente al nucleo } (r \leq R) \end{aligned} \quad (2.20)$$

con V_0 determinato dalla condizione di continuità del potenziale in $r = R$:

$$eV(r) = eV_0 + \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 R} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.21)$$

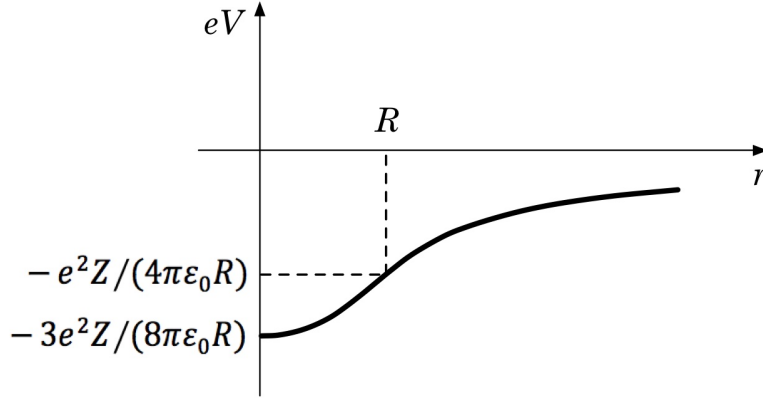


Figura 2.4:

da cui l'espressione del potenziale per $r < R$

$$eV(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \quad (2.22)$$

Siccome si sa che le dimensioni lineari di un atomo sono circa $10^4 \div 10^5$ volte maggiori di quelle del suo nucleo, si può affermare che la funzione d'onda atomica si estende quasi del tutto all'esterno della zona occupata dal nucleo, e si può quindi calcolare l'effetto, supposto piccolo, della distribuzione non puntiforme della carica nucleare, con un approccio perturbativo.

Detta $\psi_{E_0}(\mathbf{r})$ la funzione d'onda dell'elettrone atomico corrispondente al livello imperturbato di energia E_0 , calcolato cioè per un atomo con nucleo puntiforme e posizionato in O , la perturbazione energetica è data da

$$\Delta E = \int \psi_{E_0}^*(\mathbf{r}) e\Delta V(r) \psi_{E_0}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int \psi_{E_0}^2(\mathbf{r}) e\Delta V(r) d\mathbf{r} \quad (2.23)$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dall'essere reale la funzione d'onda per uno stato legato e $\Delta V(r)$ è la differenza fra il potenziale generato dalla distribuzione di carica e quello generato dalla carica puntiforme.

Supposto di considerare un atomo idrogenoide in uno stato S ($L = 0$), la funzione d'onda assume la forma

$$\psi_{E_0}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a}} \quad (2.24)$$

con $a = \hbar^2/(me^2)$ il raggio di Bohr, $E_0 = -Z^2e^2/(8\pi\epsilon_0 a)$, e

$$\Delta V(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{r}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \right]$$

Per la perturbazione energetica si ha quindi

$$\Delta E = 4\pi \int_0^R r^2 \psi_{E_0}^2(r) \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{r}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \right] dr \quad (2.25)$$

Essendo $R \ll a$ si può approssimare la funzione d'onda atomica dentro l'integrale col suo valore nell'origine O , sostituendo $\psi_{E_0}^2(r)$ con $\psi_{E_0}^2(0)$, per cui

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{Ze^2}{\epsilon_0} \frac{Z^3}{\pi a^3} \int_0^R r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3} \right) dr = \\ &= \frac{e^2 Z^4}{\pi \epsilon_0 a^3} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{10} \right) = \frac{1}{5} \frac{Z^2 e^2}{2\pi \epsilon_0 a} \left(\frac{ZR}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ricordando che $E_0 = -Z^2 e^2 / (8\pi \epsilon_0 a)$, si ottiene

$$\left| \frac{\Delta E}{E_0} \right| = \frac{4}{5} \left(\frac{ZR}{a} \right)^2 \quad (2.27)$$

Scegliendo un atomo idrogenoide molto pesante, con $Z = 82$ come il piombo, per cui $R \sim 8 \times 10^{-15}$ m ed $a \sim 0.53 \times 10^{-10}$ m, si ottiene

$$\left| \frac{\Delta E}{E_0} \right| \simeq 10^{-4}$$

ovvero un effetto molto piccolo anche per l'onda S , la cui funzione d'onda non si annulla in O , e del tutto trascurabile per le altre onde (P , D , ...), la cui funzione d'onda è nulla in O .

Questo suggerisce un modo per come attuare la misura sperimentale di questo effetto, che consiste nel rilevare per un atomo la frequenza $\nu = (E_P - E_0) / \hbar$ dei raggi X emessi in transizioni da onda P a onda S e confrontarla con quanto calcolato per il corrispondente atomo idrogenoide con nucleo supposto puntiforme.

Per rendere l'entità dell'effetto maggiore, e quindi permettere una misura più significativa, dalla [2.27](#) si vede che si può lavorare su tre termini, ma già scegliendo un atomo come il piombo si è fatto quanto possibile per accrescere i primi due Z ed R , e nonostante ciò si ottiene un risultato al limite della rilevabilità. Rimane il raggio a di Bohr dell'atomo che può essere opportunamente ridotto se per un tempo sufficientemente lungo si riesce a legare all'atomo una particella carica negativamente, più pesante dell'elettrone, che si vada a posizionare su orbite idrogenoidi. Il muone negativo μ^- è un candidato ideale allo scopo in quanto possiede le stesse caratteristiche dell'elettrone in termini di spin e carica elettrica, ha una massa m_μ circa 200 volte superiore a quella m_e dell'elettrone e dopo essere stato catturato dall'atomo e prima di decadere, vive abbastanza a lungo da poter dar luogo alle transizioni richieste. Quest'ultima condizione si può stimare semiclassicamente tenendo conto che fissato Z , il periodo medio di un'orbita idrogenoide del

μ^- scala, rispetto a quella elettronica equivalente, come m_e/m_μ , in quanto così fanno anche le dimensioni lineari delle nuove orbite idrogenoidi. Queste risultano dunque circa 200 volte inferiori alle corrispondenti per gli elettroni e si può di conseguenza quasi del tutto trascurare anche l'effetto schermante sulla carica del nucleo da parte degli elettroni atomici presenti.

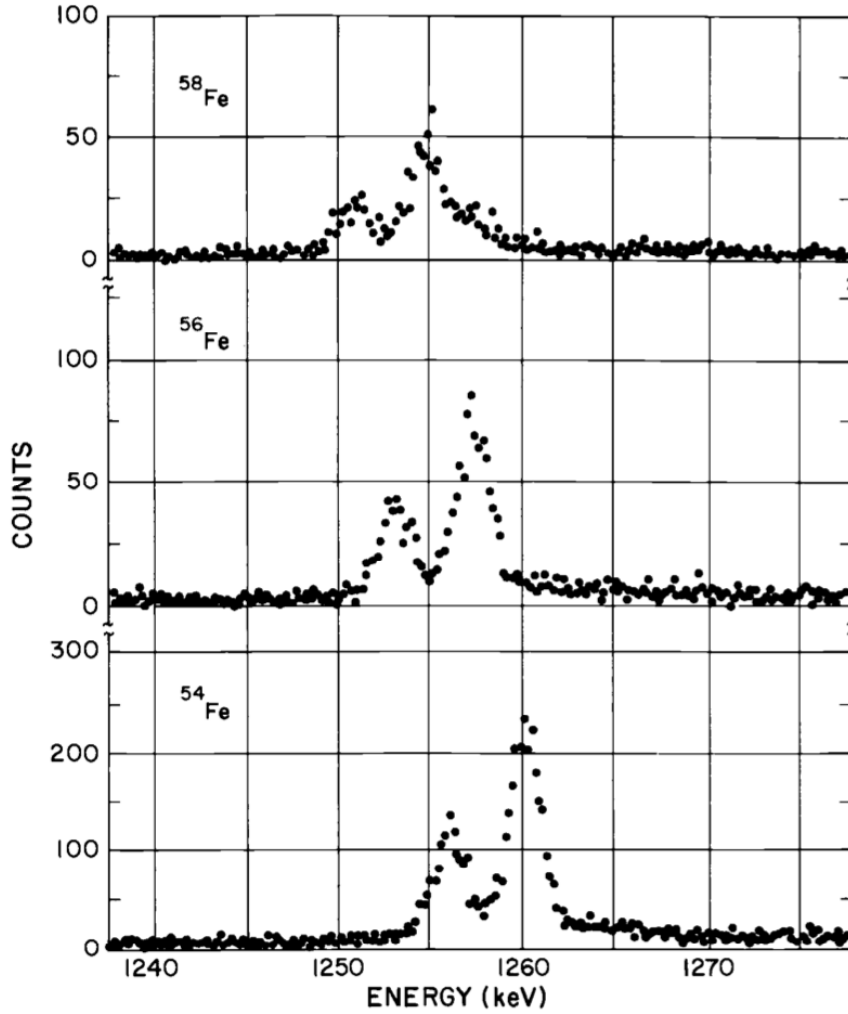


Figura 2.5: Spettri X di isotopi muonici del Ferro. Si vedono i due picchi delle transizioni $2p_{3/2}1s_{1/2}$ e $2p_{1/2}1s_{1/2}$ per i muoni, la prima con intensità doppia della seconda. Lo shift in energia della transizione è dello 0.02% fra un isotopo e il successivo, rispetto a valori dell'ordine di 10^{-6} ottenibili con elettroni equivalenti. [E.B. Shera et al., Phys. Rev. C 14 (1976) 731]

I risultati sperimentali, corrispondenti a salti del muone fra i livelli atomici, concernono l'emissione e la rivelazione di fotoni piuttosto energetici,

dell'ordine di frazioni del MeV, quindi raggi γ . Il calcolo dell'effetto non può dunque più essere condotto con tecniche perturbative, data l'entità, in quanto le funzioni d'onda vengono modificate sostanzialmente e il calcolo preciso dell'energia dei livelli richiede di risolvere direttamente l'equazione di Schrödinger corrispondente nel potenziale modificato. Per una stima dell'entità si può comunque osservare che essendo $E_0^H \simeq 10$ eV l'energia tipica d'un livello elettronico dell'idrogeno, l'energia dei corrispondenti livelli muonici E_μ^H , che scala in modo equivalente ai raggi orbitali, è proporzionale a $Z^2 E_0^H m_\mu/m_e$, che calcolata per $Z = 82$ risulta di ~ 13 MeV. Le variazioni energetiche associate ai γ rivelati costituiscono quindi frazioni importanti delle energie dei livelli stessi.

Lo studio delle differenze fra i valori dei livelli energetici reali, misurati tramite la rivelazione dei raggi γ , e i valori calcolati per atomi idrogenoidi nell'ipotesi di dimensioni nucleari finite, fornisce stime dei raggi R delle distribuzioni di carica nucleari coerenti con la forma

$$R = R_0 A^{1/3} \quad , \quad \text{con} \quad R_0 \simeq 1.16 \text{ fm} \quad (2.28)$$

Oltre al muone vi sono anche altri candidati possibili alla cattura come pioni, Kaoni, antiprotoni, Sigma, ecc., e il sistema dopo la loro cattura, almeno finché la particella catturata si mantiene su orbitali con alti valori di n , si comporta a tutti gli effetti come un atomo di idrogeno (atomo mesico, atomo antiprotonico, ...) il cui nucleo ha carica Ze , quindi emette raggi X in risposta alla cascata della particella verso orbitali con n inferiore.

Nel caso in cui le particelle in orbita idrogenoide sentano l'interazione forte, e ciò avviene col procedere del processo a cascata verso livelli con n sempre minore, bisogna considerare che non appena la loro funzione d'onda si sovrappone sensibilmente al nucleo, cresce moltissimo la probabilità di una interazione fra esse e il nucleo stesso, e se tale probabilità supera quella delle transizioni radiative i livelli si allargano con conseguente scomparsa della radiazione X associata. L'interruzione delle serie a un dato valore di n , con il conseguente spostamento e allargamento dei livelli, dà informazioni sull'interazione fra la particella e il nucleo e sul raggio d'azione di tale interazione, oltre che sulla massa ridotta della particella catturata. Si ottengono in tal modo informazioni sulla distribuzione in un nucleo di tutti i suoi componenti, compresi i neutroni, e i risultati sono sempre coerenti con una dipendenza da $A^{1/3}$.

2.4.2 Raggio di carica: nuclei speculari

Studi effettuati su *nuclei speculari*, ovvero isobari che si differenziano per lo scambio fra i corrispondenti numeri di protoni e neutroni⁵ come ad esempio

⁵Questi nuclei presentano ugual numero di interazioni $n - p$, ma diversi numeri di interazioni $p - p$ ed $n - n$.

$^{15}_8\text{O}$ e $^{15}_7\text{N}$, e tramite reazioni di protoni e neutroni su nuclei, mostrano che una volta apportate le correzioni dovute agli effetti coulombiani, la forza fra due neutroni è sostanzialmente la stessa che fra due protoni, o fra protone e neutrone. Si riscontra quindi una sostanziale *indipendenza dalla carica elettrica* per la forza nucleare. Immaginando di poter "spegnere" l'effetto del campo coulombiano, neutrone e protone dovrebbero dunque, secondo quest'ipotesi, comportarsi in modo indistinguibile dal punto di vista della loro interazione nucleare, analogamente a quanto succede per due elettroni di spin opposti, nello stesso orbitale ma in assenza di un campo magnetico esterno. In questo caso i due stati risultano degeneri in energia finchè appunto non si applichi il campo magnetico esterno che definendo una direzione privilegiata nello spazio rimuove la degenerazione fra i due stati differenziandoli in energia.

Similmente si può pensare a protone e neutrone come due stati degeneri in massa per effetto di una qualche simmetria dell'interazione forte (ovvero dell'Hamiltoniano che la descrive) e si può chiamare questa simmetria *simmetria di spin isotopico forte*. La presenza delle forze elettromagnetiche e deboli "rompe" in effetti questa simmetria e quindi la degenerazione in massa, permettendo di distinguere fra protone e neutrone.

Questo ha condotto all'introduzione del concetto di *spin isotopico* o *isospin*, un numero quantico che qui caratterizza neutrone e protone come due diversi stati di una medesima particella, il nucleone. L'isospin di cui si tratta ora viene anche detto *isospin forte* per distinguerlo da un concetto simile introdotto per spiegare alcune caratteristiche dell'interazione *debole*.

Questi risultati e osservazioni hanno anche suggerito un ulteriore modo per stimare le dimensioni della distribuzione di carica elettrica di un nucleo. Si consideri la differenza fra le energie di legame di due nuclei speculari, che nelle ipotesi precedenti sarà dovuta interamente alle diverse energie potenziali coulombiane fra i protoni dei due nuclei. Supponendo ogni nucleo come una sfera uniformemente carica di raggio R si ha che l'energia potenziale elettrostatica è espressa da

$$E_C = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_0^R r^2 E_i^2(r) dr + \int_R^\infty r^2 E_e^2(r) dr \right] \quad (2.29)$$

dove $E_i(r)$ ed $E_e(r)$ sono i campi elettrici dentro e fuori la sfera che rappresenta il nucleo, dati dalle [2.19](#), per cui

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{(Ze)^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\int_0^R \frac{r^4}{R^6} dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{(Ze)^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) = \\ &= \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Nell'ipotesi, suffragata dai dati sperimentali, che le dimensioni radiali di un nucleo dipendano essenzialmente da A come già visto, cioè $R = R_0 A^{1/3}$, si

può assumere che i due nuclei speculari abbiano lo stesso raggio R , quindi, per grandi valori di Z , la differenza fra le energie di legame si scrive come

$$\Delta E_C = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R} [Z^2 - (Z-1)^2] \simeq \frac{3}{10\pi\epsilon_0} \frac{e^2 Z}{R_0 A^{1/3}} \quad (2.31)$$

Se ΔE_C è sufficientemente grande il nucleo con Z maggiore decade β^+ nel nucleo con Z minore emettendo un positrone e^+ , dalla misura dell'energia del quale si può risalire alla differenza d'energia di legame e di conseguenza ricavare R_0 , che anche in questi casi risulta consistente con quanto ottenuto negli altri modi.

Le tecniche finora descritte per lo studio delle dimensioni dei nuclei, supponendo comunque che essi siano delle strutture spazialmente simmetriche che tendono a una forma sferica al crescere del numero di massa A , si basano essenzialmente su proprietà e caratteristiche strutturali dei nuclei stessi. Più oltre si vedranno anche altri approcci, legati a processi di diffusione di proiettili sia carichi che neutri da parte dei nuclei.

2.4.3 Raggio di carica: diffusione diffrattiva

Un modo usuale per determinare dimensione e forma di un oggetto è esaminare radiazione diffusa da quell'oggetto. Per apprezzarne i dettagli la lunghezza d'onda della radiazione utilizzata deve essere minore delle dimensioni dei dettagli da studiare, onde evitare che gli effetti diffrattivi mascherino quanto cercato. Quanto minore è la dimensione del bersaglio, tanto maggiori sono le energie cinetiche richieste alle particelle incidenti, per ottenerne una buona risoluzione spaziale. Se infatti $\lambda = \lambda/2\pi$ è la lunghezza d'onda di de Broglie di una particella con impulso p , si ha

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2 E_k + E_k^2}} \approx \begin{cases} \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} & \text{per } E_k \ll mc^2 \\ \frac{hc}{E_k} \approx \frac{hc}{E} & \text{per } E_k \gg mc^2 \end{cases} \quad (2.32)$$

Una ragionevole risoluzione spaziale di strutture fisiche con dimensioni lineari Δx si ha quindi con lunghezze d'onda almeno dello stesso ordine di grandezza: $\lambda \approx \Delta x$. Dal principio di indeterminazione si ha, per gli impulsi corrispondenti delle particelle dei fasci incidenti

$$p \gtrsim \frac{h}{\Delta x}, \quad pc \gtrsim \frac{hc}{\Delta x} \approx \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\Delta x} \quad (2.33)$$

Per risolvere spazialmente le tipiche dimensioni nucleari, che sono di alcune unità di fm, servono quindi fasci di particelle con impulsi di alcune decine di MeV/c.

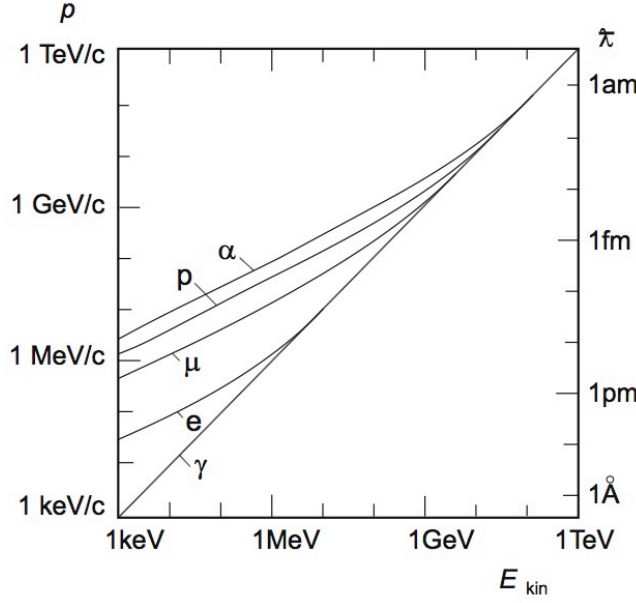


Figura 2.6: Corrispondenza fra energia cinetica, impulso e lunghezza d'onda ridotta di de Broglie per un certo numero di particelle.

I singoli nucleoni hanno dimensioni lineari dell'ordine di 0.8 fm, e per risolverli spazialmente servono fasci di particelle con impulsi maggiori a 100 MeV/c. Volendo invece risolvere spazialmente i quark, costituenti dei nucleoni, servono fasci di particelle con impulsi di molti GeV/c. In figura 2.6 è illustrata la corrispondenza fra energia cinetica, impulso e lunghezza d'onda di de Broglie per alcune particelle: γ , e , μ , p , α . In figura 2.7 il risultato della diffusione elastica di elettroni da nuclei di ^{16}O e ^{12}C ; si notano i primi minimi diffrattivi nella distribuzione delle particelle diffuse. Questi non raggiungono lo zero, come nel caso di diffrazione di luce da un disco opaco, in quanto un nucleo non ha bordi netti, la densità della materia che lo compone non crolla cioè improvvisamente a zero ad un raggio ben preciso.

Si veda ora il problema con un approccio più quantitativo, considerando l'interazione elastica fra un elettrone e il nucleo.

Si immagina l'elettrone incidente come una particella libera di impulso $\mathbf{p}_i = \hbar \mathbf{k}_i$, per cui la sua funzione d'onda è del tipo $e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$. Similmente per l'elettrone diffuso, di impulso $\mathbf{p}_f = \hbar \mathbf{k}_f$, si ha la funzione d'onda $e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}}$.

L'interazione col potenziale $V(r)$ trasforma l'onda incidente nell'onda diffusa e la probabilità di transizione è proporzionale al quadrato della quantità

$$F(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \int \psi_f^* V(r) \psi_i d\mathbf{r} \quad (2.34)$$

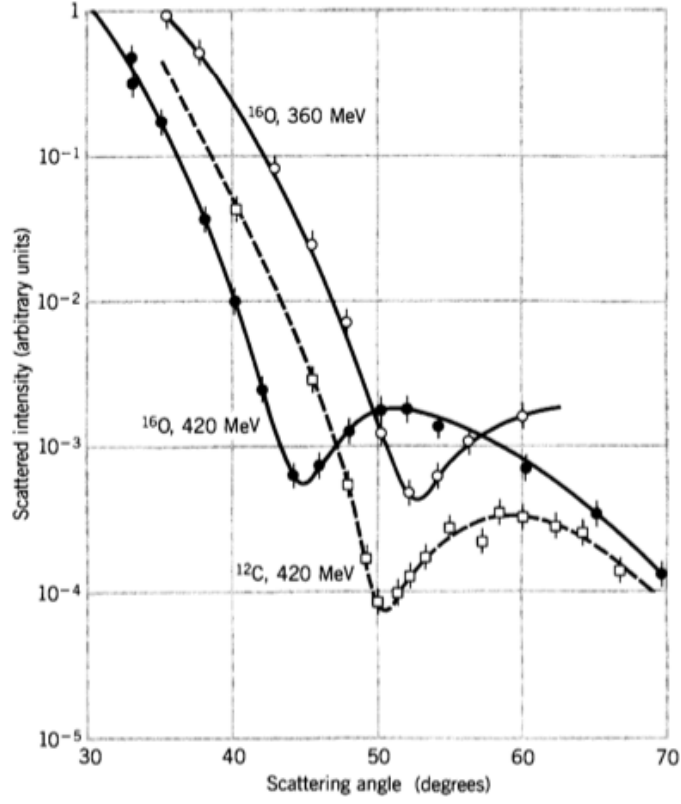


Figura 2.7: Diffusione elettrone nucleo su ^{16}O e ^{12}C . La forma della sezione d'urto ricorda le figure di diffrazione con luce monocromatica. (H. F. Ehrenberg et al., Phys. Rev. 113(1959)666).

a parte un termine di normalizzazione scelto in modo che $F(0) = 1$. Detta $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ la variazione di impulso dell'elettrone diffuso si ha

$$F(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.35)$$

Il potenziale d'interazione $V(\mathbf{r})$ dipende dalla densità di carica elettrica nel nucleo $Ze\rho_e(\mathbf{r}')$, dove $\mathbf{r}'$ varia entro il volume del nucleo e ρ_e descrive la distribuzione di carica nel nucleo. Un elettrone posizionato in $\mathbf{r}$ sente, per effetto della carica dQ localizzata in $\mathbf{r}'$, un'energia potenziale

$$dE = -\frac{e dQ}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{Ze^2\rho_e(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.36)$$

L'energia d'interazione totale si ha integrando su tutti i contributi di carica dQ nel volume del nucleo

$$E(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_e(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.37)$$

Integrando su $\mathbf{r}$, dalla [2.35](#) si ha

$$F(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \rho_e(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' \quad (2.38)$$

che, se $\rho_e(\mathbf{r}')$ dipende soltanto dal modulo r' , e non da ϑ' o φ' , diventa

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int \sin(qr') \rho_e(r') r' dr' \quad (2.39)$$

Dalla supposta elasticità dell'interazione discende $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$ e q è semplicemente funzione dell'angolo di diffusione α fra $\mathbf{p}_i$ e $\mathbf{p}_f$. Si ottiene anche $q = (2p/\hbar)\sin(\alpha/2)$ con p l'impulso dell'elettrone. Misurare la probabilità di diffusione in funzione dell'angolo α fornisce quindi la dipendenza da q della [2.39](#). $F(q)$ è detto fattore di forma e operando l'inversione numerica della [2.39](#), ovvero la trasformata di Fourier, si ottiene $\rho_e(r')$.

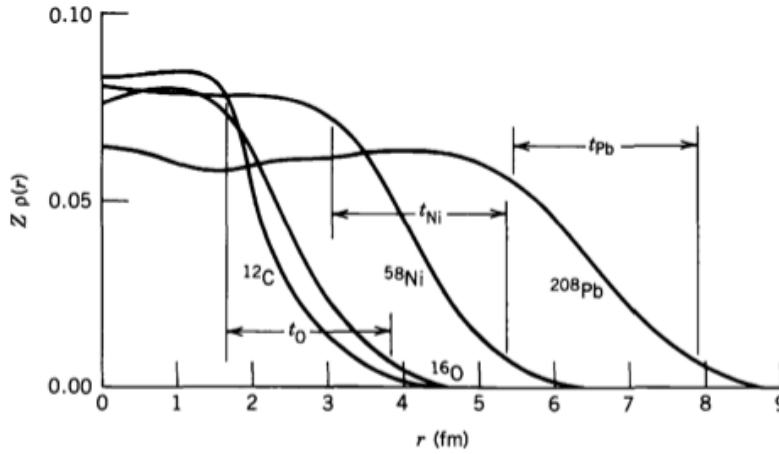


Figura 2.8: Distribuzione radiale di carica per alcuni nuclei determinata tramite diffusione di elettroni

In figura [2.8](#) il risultato per alcuni nuclei. Si noti che la densità di carica nella zona centrale è leggermente maggiore nei nuclei più leggeri, ma non si discosta molto nei nuclei più pesanti; inoltre i nucleoni non sembrano agglomerarsi con maggior densità verso il centro dei nuclei, ma piuttosto si distribuiscono con densità quasi costante in tutto il volume nucleare tranne che alla superficie, dove la loro densità sfuma. Il numero ρ_0 di nucleoni per unità di volume di un nucleo si mantiene dunque abbastanza costante in tutto il volume che se supposto sferico dà

$$\rho_0 = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} \sim \text{cost.} \simeq 0.17 \text{ nucleoni} \times \text{fm}^{-3} \quad (2.40)$$

con R il raggio medio del nucleo. Si ha quindi $R \propto A^{1/3}$, da cui

$$R = R_0 A^{1/3} \quad (2.41)$$

Il valore ottenuto con misure di diffusione elastica di elettroni fornisce $R_0 \simeq 1.2$ fm, e rappresenta la più dettagliata descrizione della distribuzione di carica nucleare.

Lo spessore della superficie nucleare, in cui la densità di carica sfuma dal valore massimo a zero, risulta sostanzialmente indipendente dalla taglia del nucleo, per $A \gtrsim 16$, come appare sempre dalla figura [2.8](#).

Tutte le tecniche per sondare le dimensioni dei raggi di carica dei nuclei non eccitati sono coerenti nel mostrare la validità della relazione $R = R_0 A^{1/3}$ con valori di R_0 compresi nell'intervallo $1.20 \div 1.25$ fm.

Prima di estendere i ragionamenti alla distribuzione della materia in un nucleo indipendentemente dal fatto che sia carica o no, e quindi anche dei neutroni, è opportuno dare alcune informazioni in merito alle forze nucleari.

2.5 Natura delle forze nucleari e dimensioni dei nuclei

La forza nucleare ha un ridottissimo raggio d'azione; se infatti si considera l'atomo e il fatto che la sua struttura è spiegata ottimamente dalle sole interazioni elettromagnetiche, è chiaro che il raggio d'azione delle forze nucleari non deve estendersi molto oltre le dimensioni del nucleo stesso, altrimenti perturberebbe l'eccellente accordo fra dati sperimentali e previsioni teoriche per quanto concerne la fisica atomica.

Un'altra importante evidenza del breve raggio d'azione delle forze nucleari viene dalla sostanziale costanza dell'energia media di legame B/A per nucleone, essenzialmente indipendente dalla taglia del nucleo e quindi dal numero di massa A , per valori di A circa maggiori di 12. Se infatti la forza nucleare avesse, come quella coulombiana, un ampio raggio d'azione, allora in un nucleo con A nucleoni vi sarebbero $A(A-1)/2$ coppie di interazioni fra essi e l'energia di legame media corrispondente B/A per ogni nucleone del nucleo dovrebbe quindi crescere proporzionalmente ad $(A-1) \simeq A$, per valori non piccoli di A , ovvero: $B/A \propto A$, per valori non piccoli di A .

Si constata però che sostanzialmente ogni nucleone di un nucleo interagisce efficacemente soltanto con i nucleoni che gli sono immediatamente vicini, e l'aggiunta di ulteriori nucleoni contribuisce ad accrescere le dimensioni del nucleo ma non la sua energia media di legame per nucleone.

La forza nucleare, garantendo la coesione del nucleo, è essenzialmente attrattiva. Esperimenti di diffusione su nuclei con particelle di alta energia mettono tuttavia in evidenza che le forze nucleari, al di sotto di un certo

raggio d'azione, hanno caratteristiche fortemente repulsive, e ciò è attribuito alla struttura a quark dei nucleoni. Questo tra l'altro spiega perchè un nucleo non collassi sotto l'azione della forza nucleare.

2.5.1 Distribuzione della materia in un nucleo

Esperimenti che studiano la dipendenza spaziale della forza tra nuclei interagenti, permettono di dedurre l'estensione dei raggi nucleari associati a tutta la materia del nucleo, e non soltanto alla sua componente carica (protoni). Si consideri come esempio la diffusione di nuclei di ^4He , particelle α , su nuclei di ^{197}Au . Finchè la separazione fra i due nuclei è maggiore della somma dei rispettivi raggi, fra i due è efficace soltanto la forza coulombiana e ci si trova nelle condizioni della diffusione alla Rutherford. Accrescendo l'energia della particella α incidente si può vincere la mutua repulsione coulombiana portando i due nuclei a distanze reciproche per le quali entrano efficacemente in gioco le forze nucleari

A questo punto l'approccio di Rutherford non riesce più a spiegare i risultati sperimentali, come vedremo tra breve.

C'è poi il decadimento alfa, che anche vedremo nel dettaglio più oltre. In questo caso si descrive il fenomeno supponendo che la particella α sfugga dal nucleo che decade attraversandone, per effetto tunnel, la barriera coulombiana, e la probabilità associata dipende dall'estensione del raggio di materia del nucleo, che può in tal modo essere desunto correlandolo con la probabilità misurabile di decadimento α .

Un ulteriore metodo prende spunto dalla tecnica dell'atomo muonico utilizzata per determinare l'estensione della distribuzione di carica elettrica di un nucleo. In questo caso si sfrutta l'analisi dei raggi X emessi da un atomo pionico, ovvero in cui si sia portato un pione negativo π^- ad occupare un'orbita idrogenoide. Rispetto al caso dell'atomo muonico inoltre, dato che il pione interagisce anche fortemente, e non solo coulombianamente, con i nucleoni, quando nel progredire della cascata che effettua attraverso gli orbitali idrogenoidi si avvicina in modo che la sua funzione d'onda cominci a sovrapporsi al nucleo, può succedere che venga assorbito da questo, interrompendo così l'emissione di raggi X dagli orbitali idrogenoidi più interni. Anche questo rateo di *scomparsa* pionica permette di risalire al raggio di materia di un nucleo.

Risultato notevole è che il raggio di materia di ogni nucleo coincida sostanzialmente col suo raggio di carica a meno di ≈ 0.1 fm, e anche i raggi di materia risultano proporzionali ad $A^{1/3}$ con una costante di proporzionalità $R_0 \simeq 1.2$ fm.

Dato che i nuclei pesanti hanno un numero di neutroni superiore fino al 50% circa di quello di protoni, ci si poteva attendere che il raggio neutronico di un tale nucleo potesse essere maggiore di quello di carica, daltronde

la mutua repulsione coulombiana fra i protoni di uno stesso nucleo tende a tenerli leggermente più lontani l'uno dall'altro rispetto ai neutroni, e la forza nucleare fra protoni e neutroni tende a *spingere* questi verso l'interno del nucleo. La concomitanza di questi effetti favorisce sostanzialmente la condizione di quasi uniforme presenza dei protoni e neutroni di un nucleo entro lo stesso volume.

2.5.2 Energia di legame nucleare

Lo studio delle proprietà statiche e dinamiche del nucleo atomico implica un complicato problema quantistico a più corpi: un nucleo contiene troppi nucleoni per poter sperare di descriverne la struttura e le interazioni con particelle o altri nuclei risolvendo le equazioni del loro moto collettivo, ma contemporaneamente contiene troppo pochi nucleoni per poter applicare senza riserve i metodi statistici.

Ciò ha portato a sviluppare modelli ad hoc per la descrizione di particolari aspetti della fenomenologia nucleare. La mancanza di un'unità concettuale che ne deriva è largamente compensata dagli importanti chiarimenti forniti dalla modellistica nucleare nell'analisi e interpretazione dei risultati sperimentali: questi modelli, anche se spesso fra loro contraddittori e mutuamente inconciliabili, si completano parzialmente a vicenda.

Ogni modello nucleare si fonda su una più o meno accentuata idealizzazione della realtà per individuare, in uno schema teorico semplificato, gli elementi fisici utili ad interpretare una certa classe di risultati sperimentali. La schematizzazione implica inevitabilmente un opportuno compromesso fra l'esigenza del rigore matematico e la realistica opportunità di procedere a semplificazioni, anche drastiche, purché fisicamente giustificabili.

Il più semplice modello di nucleo atomico lo schematizza come una *goccia sferica* di liquido, di volume $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3$, nella quale gli $A = (Z + N)$ nucleoni sono uniformemente distribuiti con densità⁶ costante e indipendente da A

$$\begin{cases} \rho(r) = 3A/4\pi R_0^3 \equiv \rho_0 & \text{con } r \leq R_0 \\ \rho(r) = 0 & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Le ipotesi alla base del modello sono sostanzialmente che

- l'energia di interazione fra due nucleoni non dipende dal tipo e numero di altri nucleoni presenti;
- l'interazione è attrattiva con un breve raggio d'azione r_{int} , come nelle gocce di liquido in cui le molecole hanno interazione dipolo-dipolo;
- per distanze $r \ll r_{int}$, l'interazione fra i componenti nucleari è fortemente repulsiva;

⁶Si ricordi che la densità nucleare media è pari a $\rho_0 \simeq 0.17$ nucleoni/fm³.

- l'energia di legame di un nucleo è proporzionale al numero dei suoi nucleoni.

Queste ipotesi implicano la cosiddetta condizione di *saturazione della densità*, per cui ogni nucleone interagisce efficacemente solo con i suoi primi vicini e si ha

$$R_0 = \left(\frac{3A}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3} = r_0 A^{1/3} \quad (2.43)$$

Dal modello a goccia e con approccio semi-empirico, nel 1928 von Weizsäcker formulò un'equazione che ben descrive l'andamento dell'energia media di legame per nucleone $\langle B \rangle \equiv |B/A|$, illustrato in figura [2.1](#).

L'equazione di Weizsäcker aveva dunque come obiettivo di interpretare l'osservata dipendenza dell'energia di legame $B(A, Z)$ di un nucleo atomico da A e Z .

Esaminando la dipendenza dell'energia media di legame per nucleone $|B/A|$ da A e Z si individuano due distinti contributi all'energia di legame $B(A, Z)$ di un nucleo: un contributo di volume $B_V(A)$ che ha carattere *universale* e assicura la debole dipendenza da A e Z di $|B/A|$ per le diverse specie nucleari, e un contributo $B_i(A, Z)$ articolato su caratteristiche specifiche dei vari nuclidi, cioè

- la **repulsione elettrostatica** fra gli Z protoni del nucleo che tende a ridurre il legame;
- le **dimensioni finite** del nucleo, per cui i nucleoni delle regioni *periferiche* sono meno legati di quelli localizzati nella regione più centrale;
- l'**eccesso neutronico** che tende anche a ridurre il legame nucleare;
- la natura **pari o dispari** di A e Z , responsabile delle variazioni di massa e quindi di energia di legame, osservate nelle sequenze isobariche.

La dipendenza da A e Z delle prime due si ottiene sulla base di elementari considerazioni classiche. Questo, e il modo in cui nel modello si tiene conto di alcune prescrizioni quantistiche, costituiscono uno dei limiti sostanziali di tale approccio, al di là del suo importante ruolo nell'interpretazione di molta fenomenologia nucleare e nell'utilizzazione pratica.

- La riduzione dell'energia di legame dovuta alle dimensioni finite di un nucleo, espressa dalla cosiddetta *energia di superficie* $B_S(A)$, è proporzionale alla superficie $S = 4\pi R_0^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$ del nucleo, come intuibile dal fatto che ogni nucleone sulla superficie, proprio per motivi geometrici, ha minori interazioni leganti con i suoi simili rispetto ad un nucleone nell'interno di un nucleo. Si pone

$$B_S(A) = b_S A^{2/3} \quad (2.44)$$

con b_S costante da determinare.

Questo termine spiega perchè l'energia media di legame per nucleone $|B/A|$ sia minore per i nuclei più leggeri, che hanno un maggior rapporto superficie/volume e quindi relativamente più nucleoni sulla superficie che nel *core* interno.

- La riduzione dell'energia di legame dovuta alla repulsione coulombiana fra i protoni è indicata con $B_C(A, Z)$. La si può stimare considerando una distribuzione, non necessariamente uniforme ma di simmetria sferica, della carica protonica in un nucleo descritta dalla densità di carica $\rho_Z(r)$. Detta $V_C(r)$ l'energia potenziale elettrostatica di un protone nel campo elettrico degli altri $(Z-1)$ protoni del nucleo, applicando il teorema di Gauss si ha, detto $\Phi(E_{r'})$ il flusso della componente radiale $E_{r'}$ del campo elettrico attraverso la superficie $S(r') = 4\pi r'^2$

$$E_{r'} = \frac{Q(r')}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \int_0^{r'} 4\pi\rho_{Z-1}(r'')r''^2 dr'' \quad (2.45)$$

con $Q(r')$ la carica elettrica racchiusa nel volume sferico di raggio r' . Per la conservatività del campo elettrostatico si ha $E_{r'} = -dV_C(r')/dr'$, da cui:

$$V_C(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_\infty^r \frac{dr'}{r'^2} \int_0^{r'} \rho_{Z-1}(r'')r''^2 dr'' \quad (2.46)$$

Si ricordi che $V_C(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$.

L'energia potenziale coulombiana del nucleo è

$$B_C = \frac{1}{2} \int \rho_Z(r) V_C(r) d^3r \quad (2.47)$$

Supponendo che la densità di carica sia uniforme entro il volume del nucleo e nulla fuori

$$\begin{cases} \rho_Z(r) = 3Ze/4\pi R_0^3 & \text{con } r \leq R_0 \\ \rho_Z(r) = 0 & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (2.48)$$

si ha:

$$\begin{cases} V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R_0} \left(3 - \frac{r^2}{R_0^2} \right) & \text{con } r \leq R_0 \\ V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (2.49)$$

In base alle [2.48](#) e [2.49](#), la [2.47](#) diventa:

$$B_C(A, Z) = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_0} = b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (2.50)$$

con $b_C = (3e^2)/(20\pi\epsilon_0 r_0)$.

La dipendenza da A e Z trovata per l'energia coulombiana vale anche se la carica elettrica non è uniformemente distribuita nel volume nucleare, purchè sia a simmetria sferica, in tal caso sarà il valore di b_C a cambiare.

- La riduzione dell'energia di legame dovuta all'eccesso neutronico è espressa dalla cosiddetta *energia di simmetria* $B_{sim}(A, Z)$. Sperimentalmente si osserva che mentre per nuclei con bassi valori di A si tende ad avere una condizione per cui $N \cong Z$, al crescere di A il numero di neutroni diventa preponderante ($N/Z > 1$), e ciò in parte compensa l'accrescersi della repulsione coulombiana che seppur più debole dell'interazione nucleare, agendo però a lungo range ridurrebbe troppo l'energia di legame rendendo instabili i nuclei al crescere di A ben prima di quanto non avvenga, se si mantenesse $N \cong Z$. La dipendenza da A e Z di $B_{sim}(A, Z)$ può essere intuitivamente ottenuta considerando che ogni neutrone in eccesso provoca una riduzione di energia di legame per nucleone proporzionale a $(N - Z)/A$. Siccome il numero totale di neutroni in eccesso è $(N - Z)$, l'effetto complessivo è proporzionale ad $(N - Z)^2/A$, da cui

$$B_{sim}(A, Z) = b_{sim} \frac{(N - Z)^2}{A} = b_{sim} \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (2.51)$$

La costante di proporzionalità b_{sim} si ottiene sperimentalmente.

Perchè il termine $B_{sim}(A, Z)$ contribuisca a ridurre $|B/A|$, nonostante l'aumento di N/Z al crescere di A favorisca la stabilità dei nuclei più pesanti, può essere intuito pensando al principio d'esclusione secondo il quale uno stesso stato quantico non può essere occupato da più di due fermioni. Considerando che ad ogni fissato livello energetico di stato legato c'è un numero finito di stati quantici disponibili, si ha che aggiungendo nucleoni a un nucleo essi si posizioneranno su livelli a energie sempre più alte; ciò però determina l'aumento dell'energia totale del nucleo portando di conseguenza a una diminuzione della sua energia di legame.

Ma protoni e neutroni occupano nel nucleo due diversi gruppi di livelli energetici pressochè paralleli e se un nucleo contiene più neutroni che protoni, vi sarà per esso un certo numero di neutroni su livelli a energie superiori rispetto ai protoni.

Immaginando di poter trasformare metà dei neutroni in eccesso in protoni e sistemandoli quindi sui relativi livelli, riequilibrando così i numeri di protoni e neutroni di quel nucleo, si otterrebbe una riduzione della sua energia, e quindi una maggior energia di legame, non sufficiente però a bilanciare l'aumento del contributo di repulsione coulombiana. È dunque lo squilibrio fra Z ed N che genera il termine d'asimmetria.

- Lo studio sistematico delle masse nucleari mostra che i nuclei sono più stabili quando posseggono un numero pari di protoni e/o di neutroni. Questo viene interpretato come un accoppiamento a doppietti sia dei protoni che dei neutroni, in funzione di come si accoppiano i loro momenti orbitali e di spin a formare il momento angolare totale J di un nucleo. Empiricamente si tiene conto di ciò ponendo

$$B_{ac}(A, Z) = b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \quad (2.52)$$

L'analisi fenomenologica delle sequenze isobariche suggerisce di porre $\delta(A, Z) = -1$ se N e Z sono entrambi pari, $\delta(A, Z) = 0$ se N e Z sono l'uno pari e l'altro dispari, o viceversa, e $\delta(A, Z) = +1$ se N e Z sono entrambi dispari. Per tener conto di ciò si può anche scrivere

$$B_{ac}(A, Z) = -b_{ac} \frac{(-1)^N + (-1)^Z}{2A} \quad (2.53)$$

Tornando ora al termine dell'energia di volume $B_V(A)$, lo si esprime come una funzione lineare del numero di massa A

$$B_V(A) = b_V A \quad (2.54)$$

cosicchè il contributo di volume dell'energia media per nucleone, $b_V = B_V(A)/A$, risultando indipendente da A , rappresenti l'indispensabile termine costante dell'energia media di legame, senza il quale la debole dipendenza da A (per $A \geq 12$) osservata per $b(A, Z)$ non sarebbe giustificabile.

Si ottiene quindi, per l'energia di legame dei nuclei atomici, la formula semi-empirica di Weizsäcker

$$\begin{aligned} B_0(A, Z) &= B_V(A) + B_S(A) + B_C(A, Z) + B_{sim}(A, Z) + B_{ac}(A, Z) = \\ &= b_V A + b_S A^{2/3} + b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + b_{sim} \frac{(A-2Z)^2}{A} + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Un best-fit con questa relazione sui dati sperimentali permette di ottenere i valori dei cinque parametri b_V , b_S , b_C , b_{sim} e b_{ac} . Qui sono riportati i valori di uno di tali best-fit:

$$\begin{cases} b_V = -15.56 & \text{MeV} \\ b_S = +17.23 & \text{MeV} \\ b_C = +0.697 & \text{MeV} \\ b_{sim} = +19.1 & \text{MeV} \\ b_{ac} = +135.0 & \text{MeV} \end{cases} \quad (2.56)$$

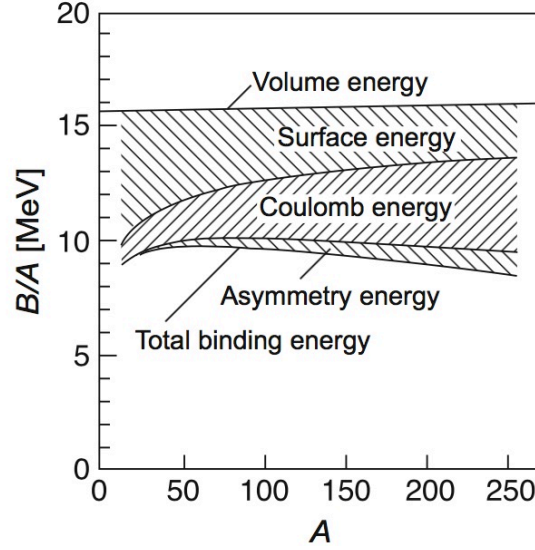


Figura 2.9: Contributo dei termini della formula di Weizsäcker all'energia media di legame per un nucleone in un nucleo in funzione di A .

Per le masse nucleari si ha quindi, partendo dalla [2.4](#),

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n + \frac{B_0(A, Z)}{c^2} \quad (2.57)$$

L'attendibilità media dei risultati forniti dalla [2.57](#) è di circa $2 \text{ MeV}/c^2$, tranne che in corrispondenza ai valori di A e Z per i quali si fanno sentire forti effetti di *chiusura degli strati*.

La figura [2.9](#) illustra l'entità dei diversi contributi all'energia media di legame per un nucleone in un nucleo presenti nella [2.55](#); in figura [2.10](#) è riportato il risultato di un fit, sempre utilizzando la formula di Weizsäcker [2.55](#), sull'insieme dei valori delle energie di legame medie per nucleone. Si veda ora che se nella [2.57](#) si pone

$$\begin{cases} \alpha = b_C A^{-1/3} + 4b_{sim} A^{-1} \\ \beta = b_C A^{-1/3} + 4b_{sim} + m_n - m_p \\ \gamma = b_V + b_S A^{-1/3} + b_{sim} + m_n \end{cases} \quad (2.58)$$

essa diventa

$$M(A, Z) = \alpha Z^2 - \beta Z + \gamma A + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \quad (2.59)$$

esprimendo la massa dei nuclei come una funzione quadratica di Z , per valori fissati di A . Con valori dispari di A si ha un unico andamento parabolico per $M(Z)$; per valori pari di A si trova che le masse dei nuclei pari-pari e dispari-dispari si distribuiscono su due parabole traslate verticalmente, con

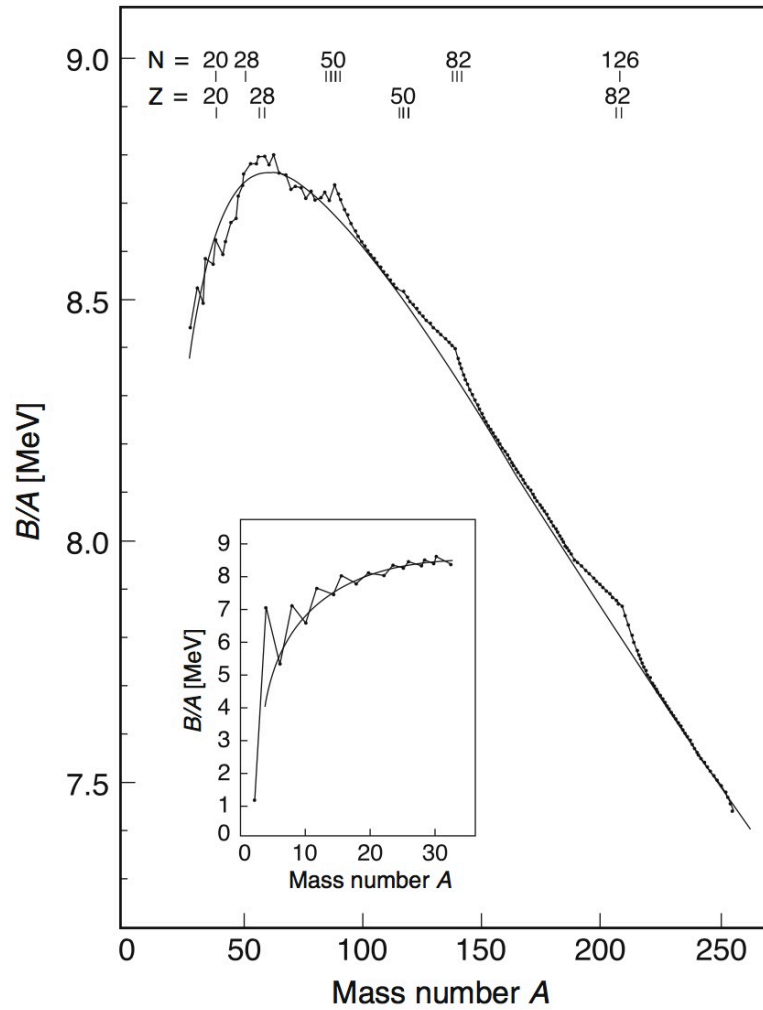


Figura 2.10: Fit con Weizsäcker su energie medie di legame per nucleone dei nuclei con A pari (Mattauch, Thiele e Wapstra, Nuc. Phys. 67(1965) 1).

quella relativa ai nuclei dispari-dispari situata a energie maggiori della quantità $2|B_{ac}(A, Z)|$.

I minimi di tali parabole sono in corrispondenza di $Z = \beta/2\alpha$, e indicano i nuclidi di massa inferiore per la sequenza isobarica individuata dal particolare valore di A , stabili rispetto al decadimento β .

Si è così ritrovato quanto evidenziato sperimentalmente dalla tabella dei nuclidi e descritto nel precedente paragrafo [1.4](#).

Per chiarire l'importanza e l'utilità della formula di Weizsäcker è anche necessario sottolinearne i limiti che contribuiscono a definirne gli effettivi ambiti di applicabilità.

L'ipotesi in base alla quale si sono ottenuti alcuni termini considera il nu-

cleo come sostanzialmente *sferico*, e questo non permette di tener conto dei termini non nulli di quadrupolo elettrico che si osservano per svariati nuclei. Risultati in merito alla saturazione della forza di coesione fra i nucleoni in un nucleo e alla loro repulsione a breve range ⁷, mettono in evidenza che non basta tener conto del principio di esclusione di Pauli come fatto.

Le considerazioni sul ruolo che momento angolare orbitale e spin dei nucleoni hanno sul carattere repulsivo della forza, sono puramente qualitative e semiclassiche.

L'assimilare il nucleo atomico a una specie di *goccia di liquido* dà oltretutto predizioni insoddisfacenti o erranee nel descrivere i risultati di moti collettivi rotazionali e/o vibrazionali osservati.

L'approccio è stato ed è comunque utile nel descrivere la stabilità dei nuclei rispetto al decadimento α , alla fissione e al decadimento β .

2.5.3 Neutron drip line

La stabilità di un nucleo dipende da svariati fattori, in particolare, al crescere di Z , per compensare l'accrescersi della mutua repulsione coulombiana, la natura fa crescere il numero N di neutroni più di Z . Però anche l'indiscriminata crescita di N per un dato Z porta a isotopi non più stabili, dato il modo in cui i neutroni aggiunti devono sistemarsi energeticamente nella struttura nucleare, costretti dal principio d'esclusione. È quindi importante conoscere i numeri massimi di neutroni che fissato Z , sono compatibili con l'esistenza di isotopi stabili. Ciò equivale a individuare la cosiddetta *neutron drip line* sulla tabella dei nuclidi, ovvero l'insieme di nuclidi per cui risulta nulla l'energia S_n di separazione di un neutrone. Si ha

$$\begin{aligned} S_n &= -[M(A, Z) - M(A - 1, Z) - m_n]c^2 = \\ &= -[Zm_p + Nm_n - B(A, Z) - Zm_p - (N - 1)m_n + B(A - 1, Z) - m_n]c^2 = \\ &= B(A, Z) - B(A - 1, Z) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Supposta $B(A, Z)$ funzione continua delle quantità variabili A e Z , la si può sviluppare in serie di Taylor delle due variabili fermandosi al primo termine

$$B(A + \delta A, Z + \delta Z) \approx B(A, Z) + [\partial B / \partial A] \delta A + [\partial B / \partial Z] \delta Z + \dots \quad (2.61)$$

Nel caso in questione: $\delta A = -1$, $\delta Z = 0$, quindi

$$B(A + \delta A, Z + \delta Z) \approx B(A, Z) - [\partial B / \partial A] \quad (2.62)$$

Si ha dunque:

$$S_n \approx B(A, Z) - B(A + \delta A, Z + \delta Z) \approx B(A, Z) - B(A - 1, Z) \approx \partial B / \partial A \quad (2.63)$$

⁷Si veda anche il paragrafo ^{10.3}

Per esprimere le energie di legame si sfrutta la formula di Weizsäcker trascurando il termine d'accoppiamento di spin e approssimando $Z \simeq (Z - 1)$, plausibile per nuclei non troppo piccoli:

$$B(A, Z) = b_V A + b_S A^{2/3} + b_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + b_{sim} \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (2.64)$$

Derivando parzialmente

$$\begin{aligned} S_n &= b_V + \frac{2}{3} b_S A^{-1/3} - \frac{1}{3} b_C Z^2 A^{-4/3} + b_A \frac{2A(A - 2Z) - (A - 2Z)^2}{A^2} = \\ &= b_V + \frac{2}{3} b_S A^{-1/3} - \frac{1}{3} b_C Z^2 A^{-4/3} + \frac{b_A}{A^2} (2A^2 - 4AZ - A^2 + 4AZ - 4Z^2) = \\ &= b_V + \frac{2}{3} b_S A^{-1/3} - \frac{1}{3} b_C Z^2 A^{-4/3} + b_A \left[1 - \frac{4Z^2}{A^2} \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

Imponendo quindi la condizione che caratterizza la neutron drip line, $S_n = 0$, si ottiene

$$b_V - b_A - \frac{2}{3} b_S A^{-1/3} = Z^2 \left(\frac{1}{3} b_C A^{-4/3} + \frac{4b_A}{A^2} \right)$$

da cui

$$Z_{n.dline} = \sqrt{\frac{b_V - b_A - \frac{2}{3} b_S A^{-1/3}}{\frac{b_C}{3} A^{-4/3} + 4 \frac{b_A}{A^2}}} \quad (2.66)$$

In figura [2.11](#) si vede l'andamento della neutron drip line sul piano (Z, N) della carta dei nuclidi di Segrè.

2.5.4 Spin dei nuclei

Ogni sistema fisico ha due contributi possibili di momento angolare, quello orbitale che ha analogo classico, e quello intrinseco o di spin, e ogni momento angolare è quantizzato.

Del momento angolare orbitale ℓ di un sistema fisico si possono conoscere contemporaneamente al più il valore del suo modulo quadrato $|\ell|^2 = \ell(\ell + 1)\hbar^2$ e il massimo valore assumibile dalla sua proiezione ℓ_z lungo una direzione di riferimento convenzionalmente scelta come asse z , $\ell_z = \ell\hbar$, con ℓ intero ≥ 0 . Inoltre ℓ_z può assumere solo i $(2\ell + 1)$ valori, scalati fra loro di un'unità di $\hbar$ che soddisfano $-\ell\hbar \leq \ell_z \leq +\ell\hbar$.

In aggiunta all'eventuale momento angolare orbitale, protoni e neutroni hanno entrambi un momento angolare intrinseco o *spin*, il cui numero quantico associato s , essendo essi fermioni, vale $\pm 1/2$. Lo spin può quindi assumere i soli due stati parallelo o antiparallelo alla direzione di riferimento z ; le componenti s_z valgono $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, mentre il quadrato dello spin vale

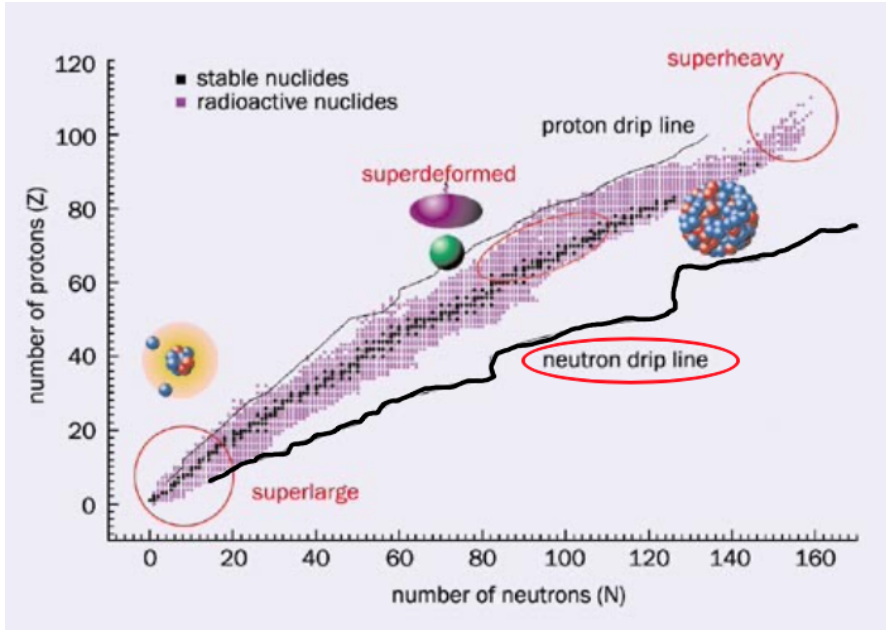


Figura 2.11: Neutron drip line

$$s(s+1)\hbar^2 = 3\hbar^2/4.$$

Il momento angolare totale $\mathbf{J}$ di un nucleo è la somma vettoriale dei vari momenti angolari orbitali dei suoi nucleoni e dei loro spin

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^A \boldsymbol{\ell}_i + \sum_{i=1}^A \mathbf{s}_i = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (2.67)$$

$\mathbf{J}$ assume valori pari a un multiplo intero di unità di $\hbar$ per nuclei con A pari e a un multiplo semi-intero di unità di $\hbar$ per nuclei con A dispari, ciò dipendendo dal fatto che solitamente un sistema fisico ha energia minima, ed è quindi più stabile, se i suoi componenti di uno stesso tipo si accoppiano con spin anti-paralleli.

Ogni livello nucleare è caratterizzato dal proprio momento angolare totale $\mathbf{J}$ che in conseguenza dell'isotropia dello spazio è una quantità che si conserva, per cui l'operatore quantistico che lo rappresenta commuta con l'Hamiltoniana e di conseguenza il suo valore può sempre essere determinato assieme a quello dell'energia del livello. Spesso in letteratura ci si riferisce allo "spin" di un nucleo intendendo il suo momento angolare totale $\mathbf{J}$, e non $\mathbf{S}$.

Ogni misura di $\mathbf{J}$ dá risultati coerenti con le regole illustrate e ciò costituisce una delle ragioni che hanno portato ad escludere gli elettroni quali componenti dei nuclei. Si trova infatti ad esempio che ${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{14}\text{N}$ hanno tutti spin pari ad $\hbar$, quindi in accordo con la regola indicata, avendo un

numero pari di nucleoni componenti. Se tali nuclei fossero costituiti da protoni ed elettroni, il numero dei costituenti sarebbe dispari per rendere conto della loro carica elettrica, e conseguentemente il loro spin totale sarebbe un multiplo dispari di $\hbar/2$, contrariamente all'evidenza sperimentale.

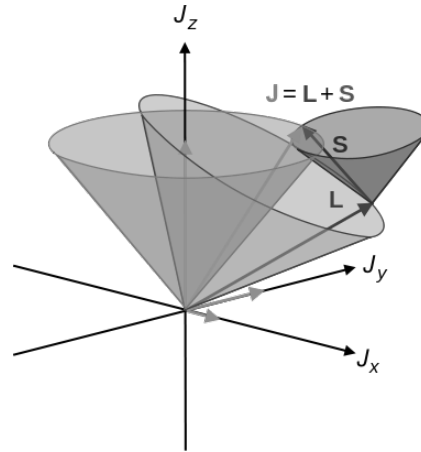


Figura 2.12: Momento angolare totale $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

Lo spin dello stato eccitato di un nucleo può, per i modi in cui si combinano entrambi le tipologie di contributi, differire dal valore che caratterizza lo stato fondamentale del nucleo stesso; un qualunque effetto può modificare lo spin di un multiplo intero di $\hbar$, quindi se gli spin di un nucleo differiscono fra stati eccitati e stato fondamentale dello stesso nucleo, lo fanno per multipli interi di $\hbar$.

La maggior parte delle misure di spin nucleari si basa sulla cosiddetta quantizzazione spaziale del momento angolare. Assegnata una direzione di riferimento, quale può essere ad esempio quella di un campo elettrico o magnetico esterno al nucleo, il momento angolare $\mathbf{J}$ del nucleo potrà orientarsi nello spazio soltanto secondo $(2J + 1)$ diverse direzioni, rispetto a quella di riferimento assegnata. La componente dello spin lungo la direzione di riferimento in ognuno di questi stati vale $m\hbar$, dove m , detto *numero quantico magnetico*, è un intero o un semi-intero qualsiasi della sequenza $-J, -J + 1, \dots, +J - 1, +J$.

Per un nucleo, la gran parte degli effetti osservabili dovuti allo spin sono legati al suo momento magnetico. Le $(2J + 1)$ possibili orientazioni del momento magnetico di un nucleo rispetto a un campo magnetico di riferimento danno luogo a $(2J + 1)$ diversi valori energetici che possono essere osservati e misurati in svariati modi: studiando la struttura iperfina degli spettri atomici, o gli spettri rotazionali di molecole biatomiche composte da atomi uguali, per le quali lo spin determina in modo univoco l'intensità relativa delle righe spettrali, o mediante spettroscopia delle microonde.

Sperimentalmente si trova che tutti i nuclei con Z ed N pari, e quindi anche A pari, hanno $J = 0$, mentre non è così per i nuclei con A pari ma Z e N dispari. I nuclei stabili dispari-dispari sono solo quattro, ^2H , ^6Li , ^{10}B e ^{14}N . Altri quattro hanno vita media molto lunga, dell'ordine dei milioni di anni, ^{40}K , ^{50}V , ^{138}La e ^{176}Lu ; quest'ultimo, con vita media di 3.78×10^{10} anni, è utilizzato nella datazione delle meteoriti ed è fra l'altro il nucleo col maggior valore di spin: $J = 7$.

Per la gran parte dei nuclei i valori dello spin sono piccoli, di valore intero compreso fra $J = 1$ e $J = 7$ per i nuclei dispari-dispari, e di valore semi-intero compreso fra $J = 1/2$ e $J = 9/2$ per i nuclei con A dispari. Questo indica una caratteristica dell'interazione fra nucleoni che si manifesta come tendenza a "posizionarsi" nel nucleo in modo da ridurre, per quanto possibile, lo spin totale risultante dando luogo a strutture più legate, e ricorda quanto fanno gli elettroni di un atomo nel riempire le shell atomiche.

2.5.5 Parità e nuclei

Si ricordino dapprima, senza dimostrazione, alcune proprietà della *parità*. Nel caso di un potenziale centrale, quindi descritto da una funzione pari, anche la relativa Hamiltoniana è pari e le funzioni d'onda degli stati associati hanno parità definita $P = (-1)^\ell$.

Più generalmente si trova che se l'Hamiltoniano di un sistema è pari allora la parità delle funzioni d'onda degli stati associati è definita.

In conseguenza di ciò si possono misurare contemporaneamente l'energia E di uno stato, in particolare di un livello nucleare, e la sua parità P , che può valere $+1$ o -1 , e tale parità si conserva nel tempo se tutte le interazioni sono pari, ovvero conservano esse stesse la parità.

Per uno stato puro, ovvero a parità definita, la densità di probabilità è sempre pari.

Un vettore è una quantità dispari, nel senso che cambia verso se si cambia il segno di tutte le sue componenti. Uno pseudovettore è una quantità con le stesse proprietà di rotazione di un vettore, ma che non cambia verso se si cambia il segno di tutte le sue componenti, come avviene ad esempio per il prodotto vettoriale, quindi è pari.

L'impulso e l'operatore quantistico associato sono quantità con caratteristiche vettoriali, quindi "dispari"

$$\mathbf{p}(-\mathbf{r}) = -\mathbf{p}(\mathbf{r}) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial(-\mathbf{r})} = -\frac{\partial}{\partial(\mathbf{r})} \quad (2.68)$$

L'energia cinetica, essendo proporzionale al quadrato dell'impulso, è pari e così anche per l'operatore quantistico ad essa associato.

Il momento angolare, essendo ottenuto tramite un prodotto vettoriale fra due vettori, è uno pseudovettore, ed è quindi pari, come l'operatore quantistico ad esso associato.

Il momento di dipolo elettrico invece, che è omogeneo a un vettore, è dispari: $\mathbf{D}(-\mathbf{r}) = -\mathbf{D}(\mathbf{r})$.

Il momento di dipolo magnetico, omogeneo a uno pseudovettore, è pari.

In base a quanto detto per l'impulso, l'energia cinetica e il momento angolare, si può affermare che se di uno stato di cui si conosca l'energia si misura il momento angolare, allora se ne può contemporaneamente misurare anche la parità, dato che i relativi operatori commutano. Ciò non si può invece fare con l'impulso, in quanto i relativi operatori non commutano.

Uno stato nucleare può quindi essere caratterizzato dalla contemporanea conoscenza di Energia, Momento angolare e Parità. Ci si riferisce alla contemporanea indicazione dei valori di momento angolare J e parità P con il simbolo J^P .

Dai risultati sperimentali si sa che le forze nucleari conservano la parità, per cui un livello nucleare ha parità ben definita e questo ha conseguenze importanti sui suoi possibili momenti angolari orbitali. Il suo momento angolare J può infatti corrispondere a diversi valori del momento angolare orbitale L . Essendo questo associato a una parità positiva per L pari e negativa per L dispari, ne risulta che si possono avere eventuali mescolanze fra momenti angolari orbitali o solamente con L pari o solamente con L dispari.

Si veda ad esempio il deutone ${}^2\text{H}$: esso è costituito da un protone e un neutrone legati, il suo stato fondamentale ha un'energia di legame di circa 2.225 MeV, un momento angolare totale pari a $J = 1$, con i due nucleoni in uno stato di tripletto con $S = 1$ e di conseguenza ha momento angolare orbitale $L = 0$ (onda S), come si deduce dalla misura del suo momento di dipolo magnetico, pari a $0.857 \mu_N$, che corrisponde circa alla somma di quelli del protone e del neutrone. Siccome però si trova sperimentalmente che il deutone ha anche un momento non nullo di quadrupolo elettrico, pari a $2.82 \times 10^{-31} \text{ m}^2/e$, ciò significa che il suo stato fondamentale non può essere considerato un puro stato in onda S , che sarebbe sfericamente simmetrico e quindi compatibile con un momento di quadrupolo elettrico nullo⁸ ma dovrà essere una mescolanza con altri momenti angolari orbitali. Per rispondere a quali possano essere questi ultimi che concorrono allo stato fondamentale del deutone si consideri che deve valere

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad , \quad \text{con} \quad \mathbf{S} = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{J} = 1 \quad (2.69)$$

e questo è possibile per $L = 0$, $L = 1$ (onda P) ed $L = 2$ (onda D). Ma l'onda P ha parità opposta a quella delle onde S e D , quindi se ne deduce, come verificato sperimentalmente, che la mescolanza può sussistere solo fra onda S e onda D ⁹.

⁸Vedi paragrafo 2.5.6

⁹Sul deutone si vedano anche i paragrafi 10.1.1 e 10.1.2

2.5.6 Momenti elettrici e magnetici dei nuclei

Buona parte di quanto si sa della struttura nucleare deriva dallo studio di come i nuclei interagiscano elettromagneticamente.

La forza nucleare determina sostanzialmente distribuzione e moto dei nucleoni nel nucleo e se per sondarli si utilizzano interazioni elettromagnetiche, che hanno effetti più deboli dell'ambiente "nucleare" circostante, si ha una discreta garanzia di non distorcere significativamente le caratteristiche di quanto si sta misurando.

Ogni distribuzione di cariche o correnti è sorgente di campi elettrici e magnetici la cui forma e intensità dipendono anche dalla distanza dalla sorgente.

Abitualmente si associano alle distribuzioni di cariche e correnti dei "momenti di multipolo" per ogni specifica distribuzione spaziale: la proporzionalità $1/r^2$ del campo elettrico deriva dalla carica totale della sorgente e gli si assegna il momento d'ordine zero o "monopolo"; la proporzionalità $1/r^3$ deriva dal momento d'ordine uno o "dipolo"; la proporzionalità $1/r^4$ deriva dal momento d'ordine due o "quadrupolo", e così via.

Per i momenti magnetici le cose sono simili con l'eccezione del momento di ordine zero, il monopolo magnetico, che sembra non esistere, e quindi non vi sono contributi di momento magnetico proporzionali a $1/r^2$.

La natura marcatamente quantistica d'un nucleo fa sì che i momenti di multipolo diventino delle osservabili per le quali si possono calcolare i valori d'aspettazione associati ai diversi stati di un nucleo.

Classicamente una distribuzione di carica a simmetria sferica genera solo il campo monopolare coulombiano e i multipoli d'ordine superiore sono tutti nulli.

Una corrente che si sviluppi su un percorso piano-circolare genera solo un campo magnetico dipolare.

È poi ragionevole pensare che i nucleoni di un nucleo si aggregino a formare il nucleo in una struttura che se non eccitata, nel rispetto dell'interazione nucleare, tende a una distribuzione e forma il più possibile simmetriche, quindi per quanto possibile prossima a quella sferica, ed è per questo che in molti casi è sufficiente misurare e calcolare soltanto i multipoli d'ordine più basso per caratterizzare le proprietà elettromagnetiche di un nucleo. Questo porta a immaginare che le proprietà multipolari d'ordine superiore di un nucleo possano essere ascritte alla presenza in esso di nucleoni spaiati.

Un ulteriore vincolo all'insorgere di momenti di multipolo nei nuclei è legato alle loro proprietà di simmetria e alla parità dei loro stati. Ogni momento di multipolo elettromagnetico ha una definita parità, determinata dal comportamento dell'operatore associato quando si considera la trasformazione $r \rightarrow -r$, e bisogna tenerne conto per la compatibilità con la parità degli stati del nucleo.

La parità dei momenti elettrici è data da $(-1)^\ell$, dove ℓ rappresenta l'ordine

del momento di multipolo ($\ell = 0$ per il monopolio, $\ell = 1$ per il dipolo, ...). La parità dei momenti magnetici è invece data da $(-1)^{\ell+1}$. Per calcolare il valore d'aspettazione di un operatore "momento di multipolo" $\mathcal{O}$, si effettua un integrale del tipo

$$\int \psi^*(\mathbf{r}) \mathcal{O} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.70)$$

Se le forze in gioco conservano la parità, allora in un sistema descritto da una funzione d'onda ψ non degenera, la parità della stessa è ininfluente e si ha che $\psi^*\psi = |\psi|^2$ è pari. Se però $\mathcal{O}$ è un operatore dispari allora tutto l'integrando è una funzione dispari, per cui l'integrale si annulla. Questo porta ad affermare che *in un nucleo tutti i momenti di multipolo statico con parità dispari devono essere nulli*, quindi il dipolo elettrico, il quadrupolo magnetico, l'ottupolo elettrico,

L'evidenza sperimentale dell'assenza di momenti di dipolo elettrici per i nuclei, porta dunque a concludere che le forze nucleari conservano la parità.

Il fatto che a meno di possibili piccole influenze dovute all'interazione debole che può introdurre nell'Hamiltoniana termini che non conservano la parità, gli stati nucleari abbiano parità definita, è però di per sé una condizione solo sufficiente all'annullarsi dei momenti di multipolo elettrico d'ordine dispari; si può infatti provare che il momento di dipolo elettrico di un nucleo si annulla anche se tutti i moti interni soddisfano l'*inversione temporale*.

I primi tre momenti di multipolo nucleari non nulli sono quelli significativi dal punto di vista sperimentale.

- Il momento di monopolio elettrico corrisponde alla carica nucleare Ze .
- Il successivo momento non nullo è quello dipolo magnetico μ . Considerata una corrente I che si sviluppa lungo una traiettoria piana circolare di area A , gli si associa un momento magnetico di modulo $|\boldsymbol{\mu}| = IA$, e se essa è dovuta a una particella di massa M e carica e che ruota con velocità di modulo v su una traiettoria circolare di raggio r , con periodo $T = 2\pi r/v$, allora

$$|\boldsymbol{\mu}| = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2M} |\boldsymbol{\ell}| \quad (2.71)$$

con $\boldsymbol{\ell}$ il momento angolare classico. Quantisticamente si definisce l'osservabile momento magnetico come la massima componente di $\boldsymbol{\ell}$, e si scrive la forma quantistica di μ sostituendo ℓ nella [2.71](#), col suo valore d'aspettazione relativo alla direzione lungo la quale la sua proiezione è massima, ovvero pari ad $m_\ell \hbar$ con $m_\ell = +\ell$

$$\mu = \frac{e\hbar}{2M} \ell \quad (2.72)$$

con ℓ numero quantico del momento angolare orbitale.

La quantità $e\hbar/2M$ è detta *magnetone elementare* e nel caso atomico si pone $M = m_e$, ottenendo il magnetone di Bohr μ_B , mentre nel caso nucleare si pone $M = m_p$, ottenendo il magnetone nucleare μ_N .

Il fatto che $\mu_N/\mu_B \ll 1$ giustifica che in molte circostanze gli effetti derivanti dal magnetismo atomico siano preponderanti rispetto a quelli del magnetismo associato ai nuclei.

La [2.72](#) può essere scritta $\mu = g_\ell \mu_N$ con g_ℓ che vale 1 per i protoni e 0 per i neutroni.

I nucleoni hanno anche un momento angolare intrinseco di spin cui è associato un momento magnetico intrinseco, che non ha analogo classico, ma può essere scritto come $\mu = g_s s \mu_N$ con $s = 1/2$ e g_s il cosiddetto *fattore di spin*, che per l'equazione di Dirac dovrebbe coincidere con 2 per particelle puntiformi prive di struttura interna.

Ciò è molto ben verificato per l'elettrone, mentre i valori misurati sperimentalmente su nucleoni liberi sono $g_s = 5.5857$ per il protone, e $g_s = -3.8261$ per il neutrone.

Questo è un indizio imprescindibile che protoni e neutroni non sono assimilabili a particelle elementari, ma hanno una struttura costitutiva e non sono puntiformi.

Tabella . Dipolo magnetico di nuclei nello stato fondamentale

Nuclide	μ (μ_N)
n	-1.9130418
p	+2.7928456
^2H (D)	+0.8574376
^{17}O	-1.89379
^{57}Fe	+0.09062293
^{57}Co	+4.733
^{93}Nb	+6.1705

Si è accennato che i nucleoni in un nucleo interagiscono in modo da accoppiarsi favorendo quanto più possibile una condizione di massima energia di legame per il nucleo stesso, e questo corrisponde al fatto che gli accoppiamenti tendono a determinare per ogni nucleo un momento angolare orbitale totale e di spin totale, quanto più possibile prossimi a zero.

Questo porta a dedurre che i nucleoni accoppiati non danno contributo al momento magnetico che deriva sostanzialmente solo dagli eventuali "pochi" *nucleoni di valenza*, ovvero disaccoppiati, presenti.

Queste osservazioni sono suffragate dai risultati sperimentali che mostrano come la gran parte dei nuclei abbia valori contenuti del momento di dipolo magnetico; il valore più alto è quello del ^{93}Nb , leggermente superiore a 6 magnetoni nucleari.

- Proseguendo nella ricerca dei momenti di multipolo non nulli si trova il "momento di quadrupolo elettrico". L'espressione classica per il momento di quadrupolo elettrico eQ associato a una carica puntiforme e , posta a distanza r dall'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (x, y, z) , e riferito all'asse z , è data da

$$eQ = e(3z^2 - r^2) \quad (2.73)$$

Se nel nucleo c'è un nucleone spaiato che però si muove in modo sfericamente simmetrico, per cui in media si ha $x^2 = y^2 = z^2 = r^2/3$, allora il momento di quadrupolo elettrico risulta nullo.

Se si immagina che il nucleone si muova lungo un'orbita piana "classica" giacente sul piano $(x; y)$, allora si ha $z = 0$ e $Q = -r^2$.

La corrispondente osservabile momento di quadrupolo elettrico in meccanica quantistica è definita come

$$eQ = e \int \psi^*(\mathbf{r}) (3z^2 - r^2) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.74)$$

se quindi il nucleone spaiato è un neutrone, il suo contributo al momento di quadrupolo elettrico del nucleo è nullo.

Se $|\psi|^2$ ha simmetria sferica, quindi con $|\mathbf{J}| = 0$, allora $Q = 0$, come nel caso classico.

Quantisticamente si trova che $Q = 0$ anche per $|\mathbf{J}| = 1/2$ ¹⁰.

Se $|\psi|^2$ è concentrata nel piano $(x; y)$, ovvero $(z \simeq 0)$, allora si ha che $Q \sim -\langle r^2 \rangle$, con $\langle r^2 \rangle$ il raggio quadratico medio dell'orbita, e si ha una deformazione "oblata" della distribuzione di carica.

Se invece $|\psi|^2$ è concentrata lungo l'asse z , quindi $(z \simeq r)$, si trova $Q \sim +2\langle r^2 \rangle$, e si ha una deformazione "prolata" della distribuzione di carica.

Considerare il termine d'accoppiamento risulta anche in questo caso utile in quanto si può assumere che nucleoni accoppiati che si muovono nel nucleo in modo sfericamente simmetrico non contribuiscano a Q . Si può dunque immaginare che per nuclei che soddisfino questa simmetria strutturale il momento di quadrupolo elettrico possa essere stimato tenendo conto della presenza di un eventuale nucleone spaiato, detto anche di valenza, che si muova in prossimità della superficie di un core quasi sferico costituito dagli altri $A - 1$ nucleoni accoppiati,

¹⁰Si veda l'Appendice ??

quindi a distanza $R = R_0 A^{1/3}$ dal centro, il che porta a stimare il momento di quadrupolo come

$$|eQ| \leq e R_0^2 A^{2/3} \quad (2.75)$$

Calcolando $|eQ|$ si trova che esso varia da circa $6 \times 10^{-30} \text{ e} \cdot \text{m}^2$, per i nuclei leggeri, fino a circa $50 \times 10^{-30} \text{ e} \cdot \text{m}^2$ per i nuclei più pesanti. Introducendo il *barn*, con $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$, si trova quindi che i valori calcolati secondo il semplice modello proposto soddisfano la condizione $0.06 \text{ e} \cdot \text{b} \leq |eQ| \leq 0.5 \text{ e} \cdot \text{b}$.

Le misure sperimentali mostrano che molti nuclei hanno valori di $|eQ|$ compresi entro questo intervallo, nonostante ve ne siano alcuni, soprattutto fra le terre rare, che se ne discostano anche significativamente, indicando che in quei casi il modello a nucleone spaiato singolo non riesce a spiegare i grandi valori misurati per il momento di quadrupolo elettrico. Quindi l'assunzione che i nuclei siano costituiti da un core a simmetria sferica di nucleoni appaiati, più un eventuale nucleone spaiato, non è valida per tutti i nuclei; in certi casi anche il "core" può presentarsi con una simmetria non sferica.

Nella tabella che segue sono riportati i valori dei momenti di quadrupolo di alcuni nuclei nel loro stato fondamentale.

Tabella - Quadrupolo di alcuni nuclei nello stato fondamentale.

Nuclide	Q (barn)
^2H (D)	+0.00288
^{17}O	-0.02578
^{59}Co	+0.40
^{63}Cu	-0.209
^{133}Cs	-0.003
^{161}Dy	+2.4
^{179}Lu	+8.0
^{209}Bi	-0.37

2.5.7 Misure dei momenti elettrici e magnetici dei nuclei

Nei nuclei ci sono quindi neutroni e protoni in movimento che danno luogo a densità di massa, di carica e di correnti. Nell'ipotesi che i campi elettrici e magnetici esterni in cui un nucleo si trova non perturbino le sue distribuzioni interne di cariche e correnti, l'energia globale del nucleo dipende anche dall'interazione dei suoi momenti elettrici e magnetici con questi campi esterni. I campi esterni elettrici e magnetici possono essere quelli dovuti agli elettroni dell'atomo e/o della molecola cui il nucleo appartiene, o altri prodotti ad

hoc.

I campi magnetici dovuti agli elettroni atomici sono orientati lungo la direzione del momento angolare totale dell'atomo. Anche il momento angolare e il momento magnetico del nucleo sono orientati lungo una stessa direzione, che non potrà però mai allinearsi esattamente alla precedente.

Campi magnetici ad hoc possono essere generati e controllati, ma non superano intensità massime dell'ordine di poche decine di Tesla; quelli generati dagli elettroni atomici sono noti con minor precisione, ma possono essere molto più intensi. Le energie d'interazione con i momenti elettrici e magneti-

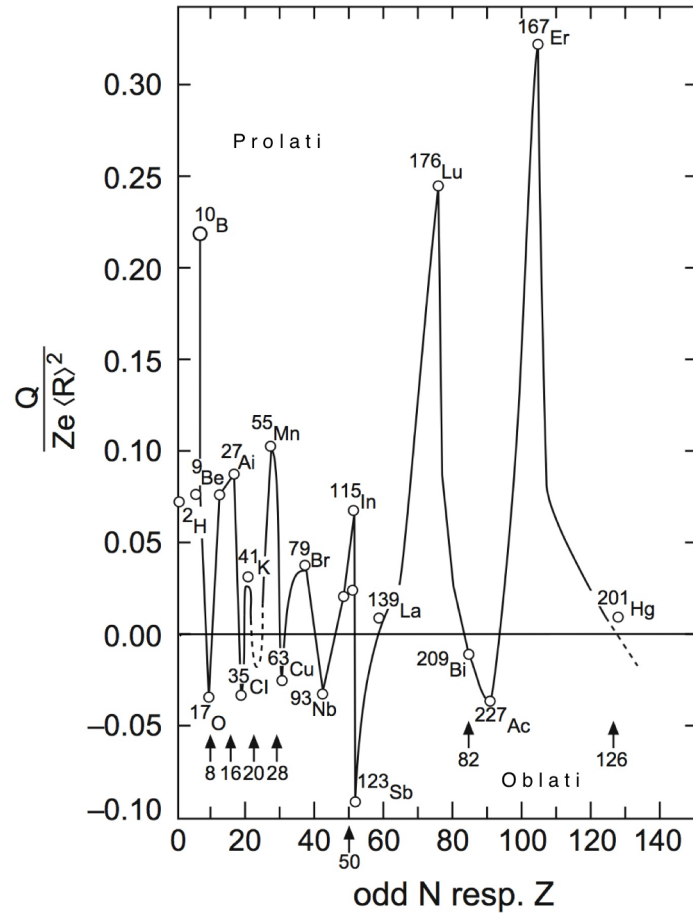


Figura 2.13: Q_{rid} di nuclei con A dispari in funzione di N . Il tratto continuo interpola i dati misurati, di cui è mostrato solo un sottoinsieme. I nuclidi con $Q_{rid} < 0$ assumono forme oblate, quelli con $Q_{rid} > 0$ forme prolate.

ci nucleari perturbano i livelli di atomi e/o molecole generando la cosiddetta *struttura iperfine* delle linee spettrali atomiche o molecolari, la cui analisi sperimentale permette di effettuare misure dei momenti nucleari.

Misure del momento d_n di dipolo elettrico del neutrone danno un limite su-

periore (d_n/e) $< 3 \times 10^{-28}$ m, con e la carica elementare.

I valori dei momenti di quadrupolo elettrico misurati per i nuclidi sono compresi fra +8 barn del ^{176}Lu e -1.0 barn del ^{123}Sb .

Introducendo la quantità

$$Q_{rid} = \frac{Q}{Ze \langle R \rangle^2} \quad (2.76)$$

detta *momento di quadrupolo ridotto* e dove $\langle R \rangle$ è una sorta di raggio medio della distribuzione di carica, si agevola il confronto fra le entità delle deformazioni nucleari in funzione dei diversi numeri di massa.

Osservando in figura [2.13](#), la distribuzione dei momenti di quadrupolo elettrico ridotto di nuclei con A dispari, graficati in funzione del valore di N , si nota che il Q_{rid} dei nuclei con Z dispari e N pari dipende essenzialmente dal numero di protoni, mentre quello dei nuclei con Z pari ed N dispari dipende in segno dal numero di protoni e in valore assoluto dal numero di neutroni. Inoltre Q_{rid} cambia bruscamente valore tra coppie di nuclei adiacenti a nuclei con valori di Z ed N espressi da: $Z^*, N^* = 2, 8, 20, 50, 82, 126$, ovvero i *numeri magici* già incontrati nel paragrafo [1.4](#).

2.5.8 Isospin

Gli esperimenti di diffusione su nuclei a bassa energia hanno messo in evidenza la stretta somiglianza tra le forze *neutrone – protone* e quelle *protone – protone*, così come anche l'analisi delle proprietà dei nuclei speculari, quali ^3H ed ^3He , ^7Li e ^7Be , ...

Le forze coulombiane sono diverse nei nuclei speculari, ma a parte questo i livelli energetici di nuclei speculari mostrano una considerevole somiglianza, come si osserva nelle figure [2.14](#) e [2.15](#).

I nuclei speculari con $N = Z \pm 1$ hanno oltretutto masse molto simili, a meno del contributo dovuto alle diverse energie elettrostatiche; la loro differenza in massa, a meno del termine c^2 , è infatti espressa da

$$\Delta M = \frac{3}{5} \frac{(2Z + 1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_0 A^{1/3}} \quad (2.77)$$

come si deduce dal termine coulombiano della formula semi-empirica di Weizsäcker [2.50](#).

Per la precisione, la somiglianza fra i livelli dei nuclei speculari del tipo $N = Z \pm 1$ suggerisce soltanto che vi sia "simmetria di carica", ovvero sostanziale equivalenza tra le forze $n - n$ e quelle $p - p$. L'equivalenza più completa appare evidente analizzando anche nuclei con A pari quali ^6He , ^6Li , ^6Be , ^8Li , ^8Be , ^8B , o ^{14}C , ^{14}N e ^{14}O , di cui si vedono alcuni livelli nelle figure [2.16](#) e [2.17](#). Le differenze tra i livelli si spiegano pressochè totalmente in base agli effetti coulombiani. Questi risultati suggerirono a Heisenberg,

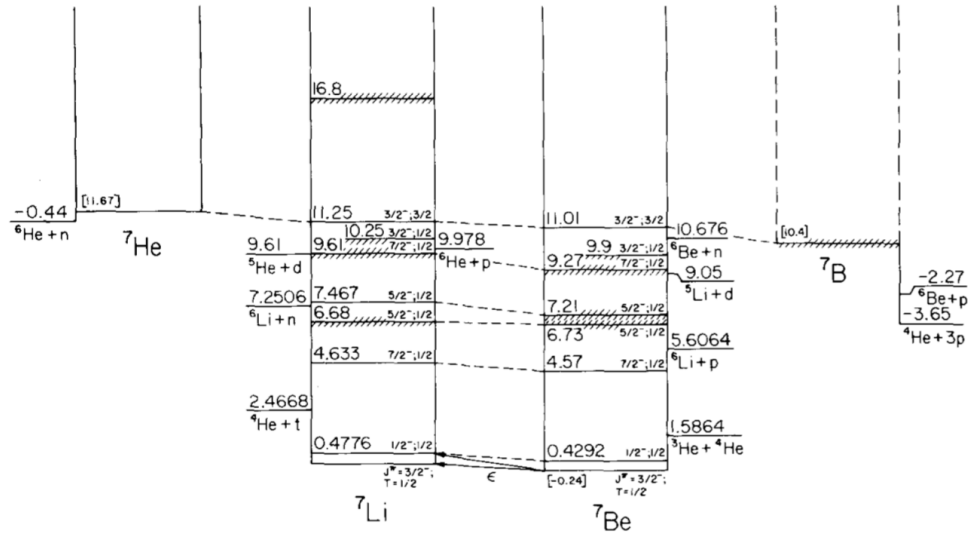


Figura 2.14: Livelli energetici dei nuclei speculari ${}^7\text{He}$, ${}^7\text{B}$, e ${}^7\text{Li}$, ${}^7\text{Be}$.

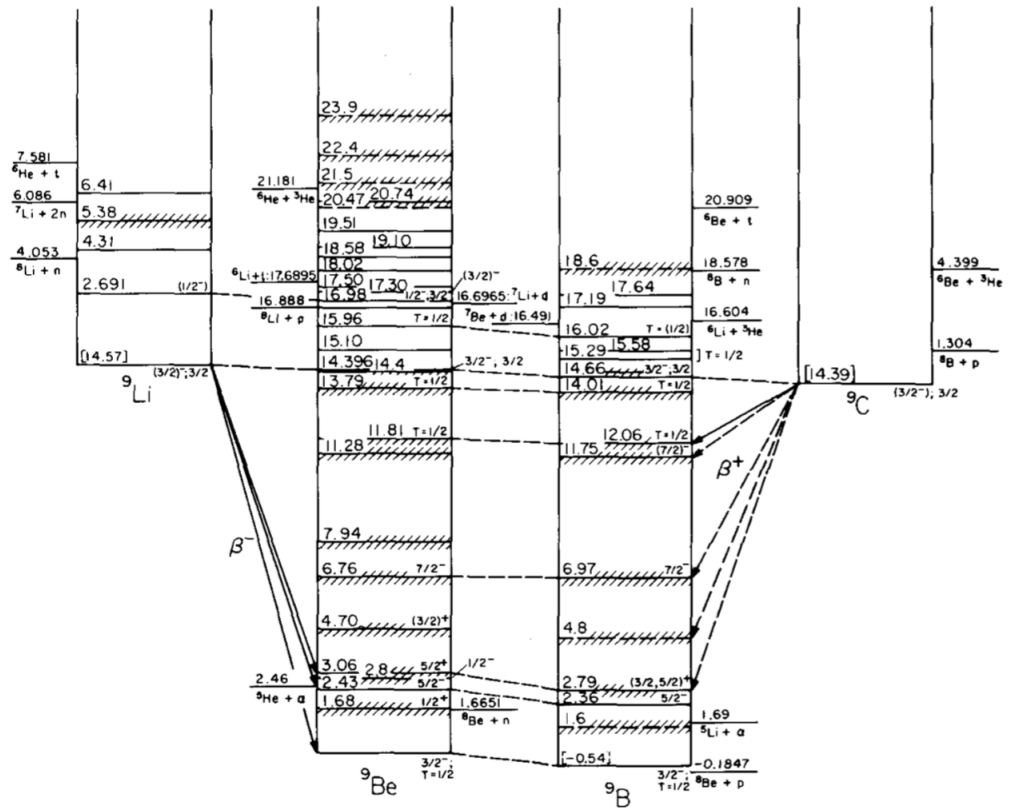


Figura 2.15: Livelli energetici dei nuclei speculari ${}^9\text{Li}$, ${}^9\text{C}$, e ${}^9\text{Be}$, ${}^9\text{B}$.

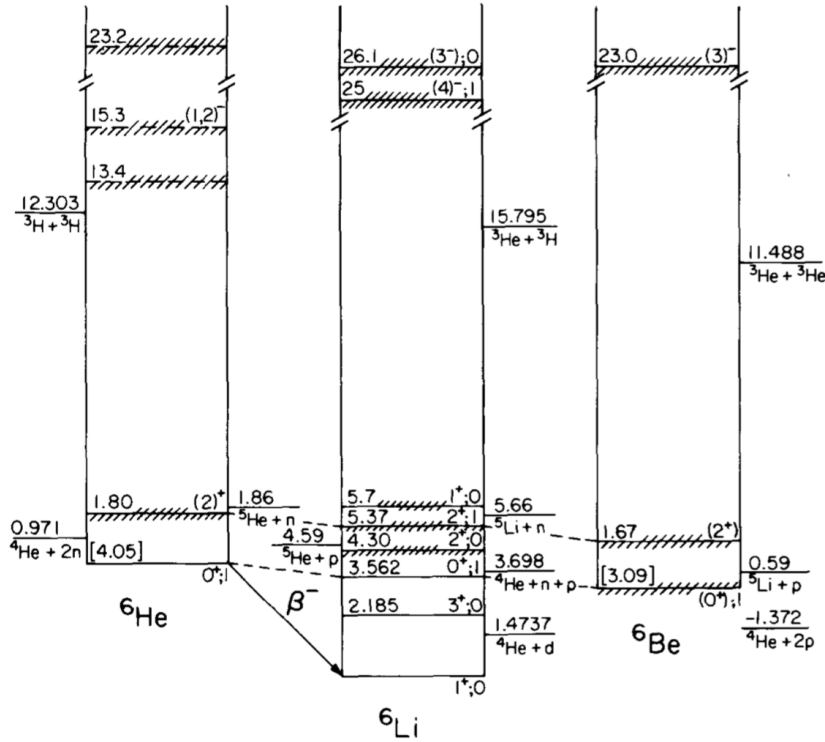


Figura 2.16: Livelli energetici dei nuclei ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^6\text{Be}$.

Coudon e Cassen, nel 1932, che le forze nucleari debbano essere considerate indipendenti dalla carica elettrica e che quindi, tolto l'effetto coulombiano, le interazioni fra $n - p$, $p - p$ e $n - n$, siano uguali (si trascura comunque, ad esempio, quanto dipende dalla leggera differenza in massa tra protone e neutrone). Questa ipotesi è più forte della pura simmetria di carica ma non dice nulla circa le forze $n - p$.

Per sfruttare le conseguenze di quest'ipotesi si è introdotto il formalismo dello *spin isotopico* che assegna a ogni nucleone un ulteriore grado di libertà cui corrisponde una variabile detta *isospin* I o *spin isotopico*, che può assumere soltanto due valori, ed è dunque dicotomica, dovendosi limitare a differenziare tra protone e neutrone. Disponendo già di un modello di variabili dicotomiche per lo spin ordinario dei fermioni, se ne mutua in questo caso la struttura algebrica.

Partendo da un esempio specifico di nuclei speculari si presentano ora alcune caratteristiche della simmetria di isospin per i nuclei.

In figura 2.17 sono riportati i diagrammi dei livelli energetici di ${}^{14}_6\text{C}_8$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$, assieme a quelli di ${}^{14}_7\text{N}_7$.

Sono evidenti le somiglianze fra i livelli di ${}^{14}_6\text{C}_8$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$, sia per i numeri quantici J^P che nelle spaziature relative dei rispettivi livelli. Le piccole dif-

ferenze residue e la traslazione globale quasi rigida dei livelli di $^{14}_8\text{O}_6$ a valori superiori rispetto a quelli di $^{14}_6\text{C}_8$, sono spiegabili con i diversi contributi coulombiani all'energia per i due nuclei.

Livelli energetici equivalenti a quelli di $^{14}_6\text{C}_8$ e $^{14}_8\text{O}_6$ sono presenti anche

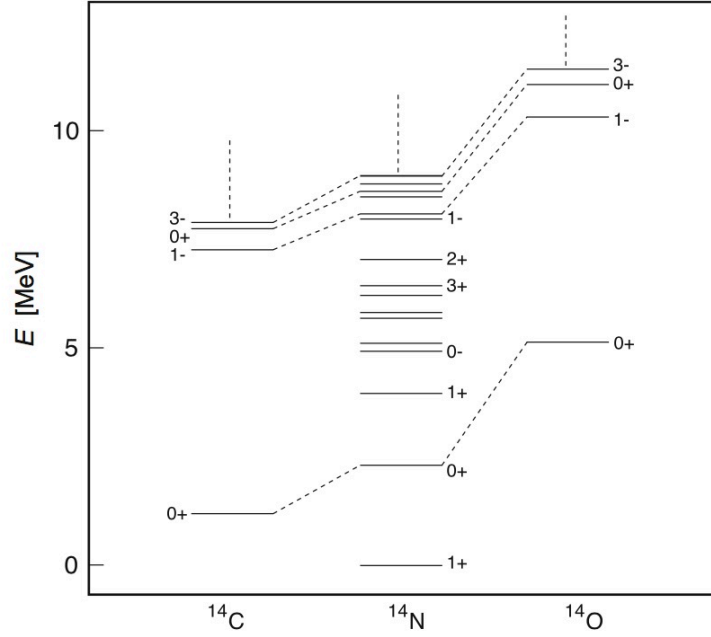


Figura 2.17: Livelli energetici dei nuclei speculari $^{14}_6\text{C}_8$ e $^{14}_8\text{O}_6$.

nell'isobaro $^{14}_7\text{N}_7$, che possiede però anche altri livelli che non trovano corrispondenza con quelli dei due nuclei adiacenti. Si può distinguere fra stati di *tripletto* e stati di *singoletto*.

Questi *multipletti* di stati mostrano una chiara analogia formale con i multipletti degli accoppiamenti di spin. Protoni e neutroni possono quindi, come suggerito da Heisenberg nel 1932, essere visti come due diversi stati di una medesima entità, il *nucleone*, e formano un doppietto di isospin ($I = 1/2$), per le cui terze componenti si pone

$$\begin{cases} \text{protone:} & I_3 = +1/2 \\ \text{neutrone:} & I_3 = -1/2 \end{cases} \quad (2.78)$$

Essi sono quindi autostati degli operatori I^2 e I_3

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

La sostanziale indipendenza dell'interazione nucleare dalla carica elettrica si traduce così in una legge di conservazione, ovvero una proprietà di simmetria

per cui

- l'isospin si conserva nelle interazioni nucleari;
- l'hamiltoniana d'interazione nucleare commuta con l'operatore di isospin ed è invariante per le trasformazioni generate da $\mathbf{I}$, cioè le rotazioni nello spazio dell'isospin.

La carica elettrica q_N di un nucleone è legata alla sua terza componente dell'isospin dalla relazione

$$q_N = 1/2 + I_3 \quad (2.80)$$

per cui la conservazione della carica elettrica comporta la conservazione della terza componente I_3 dell'isospin.

La conservazione dell'isospin $\mathbf{I}$, ovvero l'indipendenza dalla carica elettrica, ha un valore più forte della semplice conservazione della carica elettrica.

Si ricordi comunque che l'isospin è un numero quantico *adimensionale*.

La trattazione formale dell'isospin corrisponde così a quella del momento angolare per cui si può ad esempio avere il caso di una coppia protone-neutrone in uno stato di isospin totale pari ad 1 o a 0.

La terza componente dell'isospin è additiva e per un nucleo si ha

$$I_3^{nucleo} = \sum I_3^{nucleoni} = \frac{Z - N}{2} \quad (2.81)$$

Questo aiuta nel descrivere gli stati simili che compaiono in figura 2.17 assegnando rispettivamente $I_3 = -1$, al nucleo $^{14}_6\text{C}_8$, e $I_3 = +1$, al nucleo $^{14}_8\text{O}_6$; il loro isospin non può quindi essere minore di $I = 1$, per cui gli stati in questi nuclei appartengono necessariamente a un tripletto di stati simili nei nuclei $^{14}_6\text{C}_8$, $^{14}_7\text{N}_7$ e $^{14}_8\text{O}_6$. Siccome però la terza componente I_3 dell'isospin di $^{14}_7\text{N}_7$ è pari a 0, ne deriva che questo nucleo può possedere stati addizionali con isospin $I = 0$.

L'azoto $^{14}_7\text{N}_7$ è il più stabile isobaro con $A = 14$ e quindi il suo stato fondamentale è necessariamente un singoletto di isospin, perchè se non fosse così $^{14}_6\text{C}_8$ dovrebbe possedere uno stato analogo che però, per la minor repulsione coulombiana, dovrebbe essere a un'energia inferiore e quindi più stabile.

In figura 2.17 non sono mostrati stati con $I = 2$, che dovrebbero in linea di principio avere stati analoghi in $^{14}_5\text{B}_9$ e $^{14}_9\text{F}_5$. Questi nuclei sono però molto instabili e i loro livelli stanno oltre il limite energetico mostrato in figura 2.17.

Gli isobari di $A = 14$ sono nuclei in cui l'effetto dell'energia coulombiana non è particolarmente intenso. L'influenza dell'energia coulombiana cresce al crescere del numero atomico Z , perturbando sempre più le caratteristiche di simmetria di isospin.

L'isospin è un buon numero quantico per la descrizione dei processi dinamici coinvolgenti le interazioni forti, nel corso dei quali appunto, l'isospin del sistema si conserva.

2.6 La misura di Rutherford

Nel classico esperimento di Rutherford, Geiger e Mardsen, particelle α emesse da una sorgente con energie di alcuni MeV venivano fatte incidere su bersagli di atomi d'oro sotto forma di sottilissimi fogli. L'energia cinetica della α in quel caso non era tale da permettere loro di superare la barriera coulombiana e portarle a *sentire* l'interazione nucleare dei bersagli.

In queste ipotesi si può in prima approssimazione trattare il problema come urto di particelle puntiformi contro bersagli puntiformi, con sola interazione coulombiana.

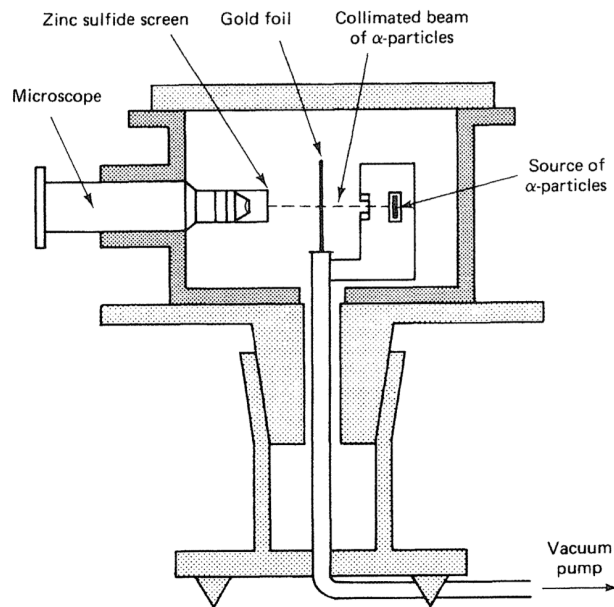


Figura 2.18: Schema dell'apparato utilizzato da H.W. Geiger e E. Mardsen per l'esperimento sulla diffusione della particelle α da un bersaglio d'oro.

Nell'esperimento originale le particelle α , attraversato il bersaglio, venivano contate tramite i lampi di fluorescenza che provocavano in uno schermo di solfuro di zinco accoppiato a un microscopio, come in figura [2.18](#).

Si suppone altresì che la massa di ogni proiettile sia molto inferiore a quella di ogni bersaglio, che è solo una discreta approssimazione nel caso di Rutherford. Comunque, data la massa dei proiettili da lui utilizzati e le energie cinetiche associate, si può ragionevolmente trattare il problema con approccio non relativistico.

Siano m e Z_1e la massa e la carica di particelle incidenti su un nucleo di massa $M \gg m$ e carica totale Z_2e , inizialmente a riposo nell'origine O di un sistema di riferimento (x, y, z) solidale con l'osservatore, sistema del laboratorio (SL) e si supponga monocinetico il fascio di particelle incidenti e collimate lungo la direzione dell'asse z , come mostrato in figura [2.19](#).

Il problema ha quindi simmetria cilindrica rispetto all'asse z . Si ipotizzi anche che la condizione $m \ll M$ sia tale da poter trascurare, dopo l'urto, il rinculo di M che quindi permarrà praticamente fermo in SL come se avesse massa ∞ . Nel caso della misura originale di Rutherford il rapporto fra le masse di proiettile e bersaglio è pari a circa 2×10^{-2} .

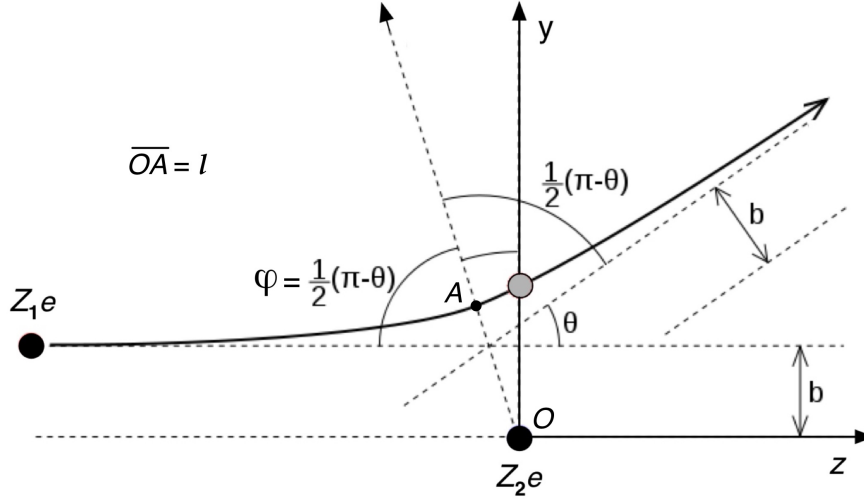


Figura 2.19: Diffusione alla Rutherford.

Sia $V = Z_2 e / (4\pi\epsilon_0 r)$ il potenziale generato dal centro diffusore carico e si consideri la generica particella del fascio incidente che a distanza infinita dal centro diffusore, quindi quando non ne sente ancora l'influenza e si ha $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$, percorre una traiettoria di avvicinamento con velocità di modulo v lungo una retta parallela all'asse z e distante b da esso. La quantità b è detta *parametro d'urto* ed è la distanza alla quale la particella incidente sarebbe passata dal centro diffusore in assenza di interazione.

Classicamente il problema consiste nel determinare l'angolo ϑ di deflessione sulla traiettoria della particella in funzione di b , ovvero $\vartheta(b)$. Si procede determinando l'inverso, ovvero $b(\vartheta)$.

Il potenziale è di tipo centrale-kepleriano e sia $E_T = E_k + E_P$ l'energia totale a disposizione con E_k l'energia cinetica ed E_P l'energia potenziale della particella incidente. La traiettoria di questa è dunque una conica coincidente con un'ellisse se $E_T < 0$ e con un'iperbole se $E_T > 0$. Qui $E_T > 0$ dato che a distanza infinita, prima dell'urto, $V(r) = 0$ e $E_T = E_k = mv^2/2$; la traiettoria è quindi un'iperbole.

Si supponga, senza perdere in generalità, che le forze siano repulsive, come effettivamente nel caso di Rutherford.

Dalle conservazioni di momento angolare ed energia si ha che a distanza ∞ queste valgono rispettivamente, $m vb$ ed $mv^2/2$, mentre nel punto A di

massimo avvicinamento valgono $mv_A l$ ed $mv_A^2/2 + Z_1 Z_2 e^2 / (4\pi\epsilon_0 l)$. Quindi

$$b = \frac{lv_A}{v} \quad , \quad v^2 = v_A^2 + \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 ml} \quad (2.82)$$

Si ponga

$$l_0 = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_k} \quad (2.83)$$

che fissata $E_k = mv^2/2$, corrisponde al punto di massimo avvicinamento possibile A^* per un urto centrale, per il quale è cioè $b = 0$. In A^* è ovviamente $v_{A^*} = 0$. Si ha così

$$v^2 = v_A^2 + v^2 \frac{l_0}{l} \quad (2.84)$$

Per urto centrale la particella di carica $Z_1 e$ si avvicina al diffusore lungo l'asse z fino alla distanza minima l_0 corrispondente al punto A^* e poi inverte il moto risultando diffusa a un angolo π . Dalle relazioni precedenti si ha

$$v_A^2 = \frac{b^2}{l^2} v^2 \quad , \quad v_A^2 = v^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \quad , \quad b^2 = l^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \quad (2.85)$$

e dalle proprietà geometriche dell'iperbole

$$l = b \cotg \frac{\varphi}{2} \quad (2.86)$$

che sostituito nella terza delle [2.85](#) dà

$$\cotg^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{l_0}{b} \cotg \frac{\varphi}{2} - 1 = 0 \quad (2.87)$$

Moltiplicando la [2.87](#) per $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ e ricordando che

$$\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \quad , \quad \cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

si ha

$$l_0 = 2 b \cotg \varphi \quad (2.88)$$

Le relazioni fra ϑ e φ desumibili dalla figura [2.19](#) danno

$$\vartheta + 2\varphi = \pi \quad , \quad \text{da cui:} \quad \cotg \varphi = \tg \frac{\vartheta}{2} \quad (2.89)$$

e dalle [2.83](#) e [2.88](#) si ottiene

$$b(\vartheta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg \frac{\vartheta}{2} \quad (2.90)$$

che è la relazione cercata.

Si indichi con n_0 il numero di particelle del fascio incidente che a distanza

praticamente infinita dal centro diffusore attraversano l'unità di superficie del piano (x, y) nell'unità di tempo, ottenendo $dN = 2\pi n_0 b db$ per le particelle che sempre nell'unità di tempo, attraversano l'anello circolare fra b e $b + db$. Supponendo ora che il numero di particelle si conservi, che cioè quelle incidenti siano anche tutte e sole quelle diffuse, e considerando quelle diffuse nell'angolo solido compreso fra ϑ e $\vartheta + d\vartheta$ si ha, differenziando la [2.90](#)

$$|db(\vartheta)| = \left| \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} d\left(\cotg\frac{\vartheta}{2}\right) \right| = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \frac{d\vartheta}{2 \sin^2\vartheta/2} \quad (2.91)$$

dove si prende il valore assoluto per tener conto del fatto che ϑ diminuisce all'aumentare di b .

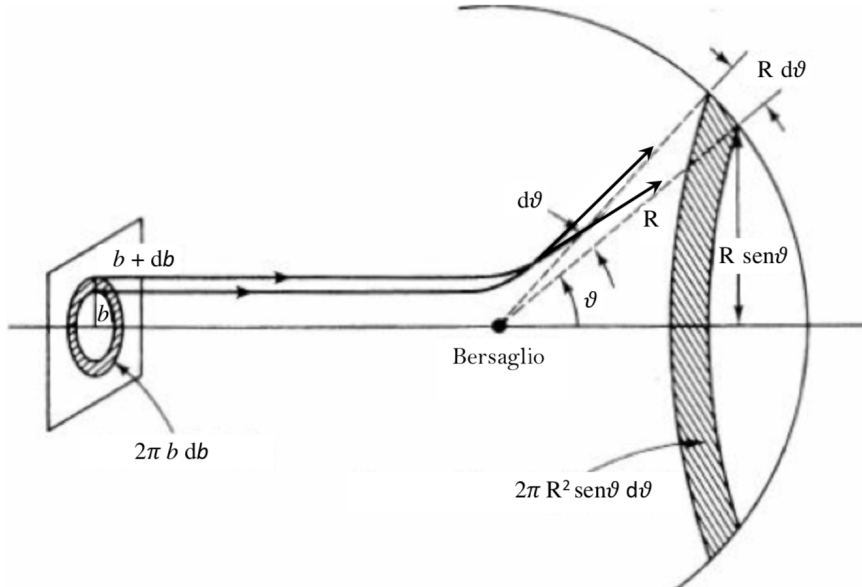


Figura 2.20: Geometria dell'interazione alla Rutherford.

Sostituendo ora in dN

$$dN(\vartheta) = 2\pi n_0 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cotg\vartheta/2}{2 \sin^2\vartheta/2} d\vartheta \quad (2.92)$$

Essendo $d\Omega(\vartheta) = 2\pi \sin\vartheta d\vartheta$ l'angolo solido nella simmetria cilindrica del problema si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{dN(\vartheta)/n_0}{d\Omega(\vartheta)} &= \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cotg\vartheta/2}{2 \sin\vartheta \sin^2\vartheta/2} = \\ &= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cos\vartheta/2}{2 \sin^3\vartheta/2 \cdot 2 \sin\vartheta/2 \cos\vartheta/2} = \\ &= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\vartheta/2}\end{aligned}\tag{2.93}$$

$d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ rappresenta l'area attraversata a grande distanza dal centro diffusore dalle particelle poi diffuse entro l'angolo solido unitario, centrato attorno all'angolo polare ϑ e vien detta *sezione d'urto di Rutherford*.

$d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ è indipendente dai segni delle cariche di proiettile e bersaglio e per piccoli angoli diverge come ϑ^{-4} ; il potenziale coulombiano mantiene il proprio effetto anche a distanza ∞ e quindi anche particelle incidenti con grandi valori di b ne sentono l'effetto.

Il calcolo della sezione d'urto coulombiana totale, ottenuta integrando la $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ su tutto l'angolo solido dà un valore ∞ che non ha ovviamente senso fisico. Un approccio più realistico tiene conto che $V(r)$ non è effettivamente proporzionale ad $1/r$ per ogni distanza dal centro diffusore, in quanto all'aumentare di b la reale costituzione dei bersagli fa sì che le particelle incidenti comincino a sentire sempre più efficacemente gli effetti delle altre parti costitutive i bersagli stessi, ovvero elettroni atomici e altre strutture cariche che schermano la carica $Z_2 e$ del diffusore.

Si consideri più realisticamente che il centro diffusore non sia puntiforme ma occupi una zona estesa di spazio di forma sferica e raggio r_0 . Per $b > r_0$ il teorema di Gauss assicura che il campo elettrico prodotto dalla carica $Z_2 e$ diffondente è lo stesso che si ha con la carica concentrata nel punto O . Se quindi $l_0 > r_0$, la traiettoria della particella incidente di carica $Z_1 e$ si svolge tutta esternamente alla regione in cui è distribuita la carica bersaglio, e di conseguenza la relazione fra b e ϑ resta invariata, da cui l'uguaglianza anche della $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$. Se invece $l_0 < r_0$, che implica energie cinetiche che soddisfino la condizione $E_k > E_{k,0} = Z_1 Z_2 e^2 / (4\pi\epsilon_0 r_0)$, si deduce che l'effetto della spazialità della carica diffondente si percepisce soltanto per angoli di diffusione maggiori di un valore limite ϑ_0 definito dalla condizione

$$r_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg \frac{\vartheta_0}{2}\tag{2.94}$$

L'osservazione sperimentale delle deviazioni a grandi angoli nella sezione d'urto differenziale misurata, confrontata con quanto previsto per diffusione

da bersagli puntiformi, permette di stimare r_0 . Una valutazione dei risultati non può naturalmente prescindere dal tener conto anche delle dimensioni finite del proiettile.

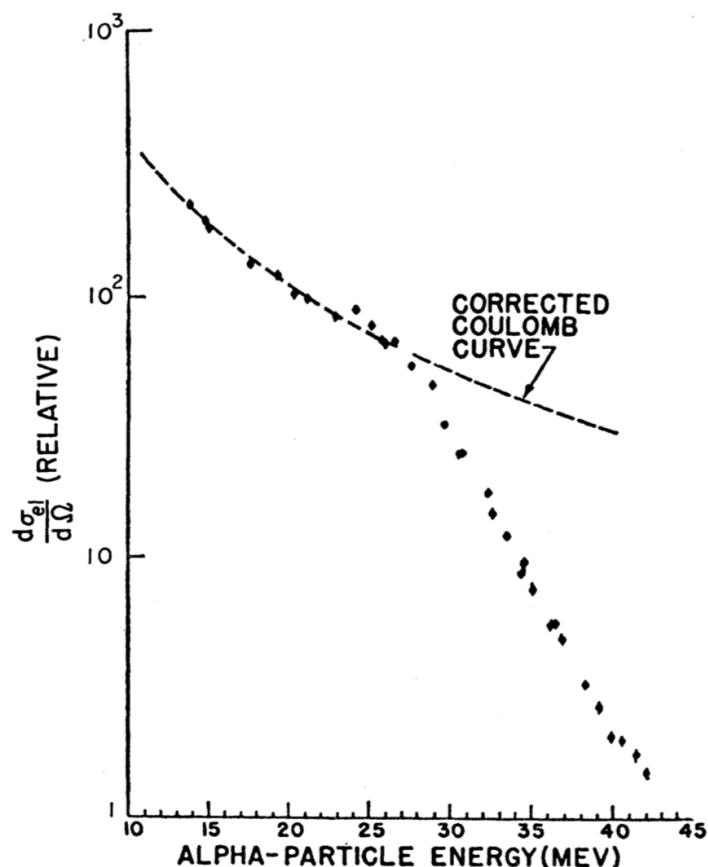


Figura 2.21: $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ della reazione $\alpha + {}^{197}\text{Au}$, per $\vartheta = 60^\circ$ a energie crescenti. Oltre 27 MeV i dati si scostano dall'andamento coulombiano. Dalla [2.94](#) si stima r_0 . [Eisberg & Porter, Rev.Mod.Phys. 33 (1961) 190]

Rutherford tutto questo lo aveva intuito e pensava giustamente che l'effetto delle dimensioni nucleari si sarebbe dovuto manifestare, al crescere dell'energia cinetica delle α incidenti, con una deviazione della sezione d'urto da quella ottenuta considerando esclusivamente l'interazione coulombiana.

Al crescere dell'energia le particelle α avrebbero dovuto infatti spingersi così vicine al nucleo da sentire efficacemente gli effetti dell'interazione nucleare, oltre a quelli puramente coulombiani.

Una verifica sperimentale richiedeva ovviamente di poter disporre di acceleratori in grado di produrre particelle α di energie crescenti fino e oltre a quelle di soglia per l'effetto, come mostrato in figura [2.21](#).