

## Capitolo 3

# Struttura dei nuclei e modelli nucleari

Il modello standard dovrebbe poter descrivere sia la struttura che la fenomenologia dei nuclei, ma praticamente è molto difficile e arduo formulare con esso predizioni quantitative.

Ciò sostanzialmente per due ragioni:

- in linea di principio la fisica in un nucleo può essere derivata interamente dalla QCD, anche se gli attuali approcci matematici e computazionali per risolverla su sistemi a bassa energia, come i nuclei, sono estremamente limitati. Ciò è dovuto alla transizione di fase che ha luogo fra materia costituita da quark ad alta energia e materia adronica a più bassa energia, che rende inutilizzabili gli approcci perturbativi, complicando molto la costruzione di un modello delle forze inter-nucleoniche basato sulla QCD.

- nonostante la forza nucleare sia a corto raggio, serve una quantità enorme di potenza di calcolo per riprodurre con accuratezza le caratteristiche di un nucleo con un approccio "ab initio".

Daltronde i modelli con cui storicamente si sono confrontati i risultati sperimentali sono relativamente grezzi e necessariamente approssimati. Nessuno di essi spiega completamente l'ampia panoramica di fenomeni che caratterizzano i nuclei e la loro struttura.

### 3.1 Modello a gas di Fermi

Un nucleo che si trovi nel proprio stato fondamentale o sia leggermente eccitato può essere visto come un esempio di gas di Fermi degenere. La densità di materia nel nucleo è determinata dalle interazioni fra nucleoni che sono essenzialmente caratterizzate, sulla scala del fm, da una forte repulsione a brevi distanze e da una relativamente blanda attrazione fra nucleoni non troppo vicini. I nucleoni di un nucleo non vanno pensati come localizzati in

posizioni più o meno definite all'interno del nucleo, ma piuttosto come due sistemi indipendenti di particelle di spin  $1/2$  che ubbidiscono alla statistica di Fermi-Dirac e che nel rispetto del principio d'esclusione di Pauli, si muovono per il resto liberamente nell'intero volume del nucleo con un impulso medio corrispondente associato che si vedrà essere dell'ordine di  $250 \text{ MeV}/c$ . Questa mobilità dei nucleoni nel nucleo è conseguenza della relativa "debolezza" dei legami fra i nucleoni di uno stesso nucleo <sup>1</sup>

Il fatto concettualmente importantissimo che i nucleoni di uno stesso nucleo si muovano come se fossero quasi liberi al suo interno non è però immediatamente ovvio, e risulterà più chiaro in seguito quando si parlerà dei cosiddetti *ipernuclei*, ovvero quei nuclei che fra i loro componenti annoverano un *iperone* in sostituzione di un nucleone. Si vedrà che un iperone  $\Lambda^0$  si muove entro un ipernucleo come una particella sostanzialmente "libera", soggetta a una buca di potenziale la cui profondità è praticamente indipendente dal particolare nucleo considerato, e di ampiezza pari al raggio del nucleo stesso.

Il modello a gas di Fermi per i nuclei è in grado di giustificare i valori delle energie di legame fra nucleoni, i termini principali della formula semi-empirica di massa di Weizsäcker <sup>2.55</sup> e come vedremo in seguito anche le distribuzioni in impulso trovate per le interazioni quasi elastiche fra elettroni e nuclei.

Il potenziale percepito da ogni nucleone è la sovrapposizione dei potenziali dovuti a tutti i restanti nucleoni del nucleo. Nel seguito si supporrà che tale

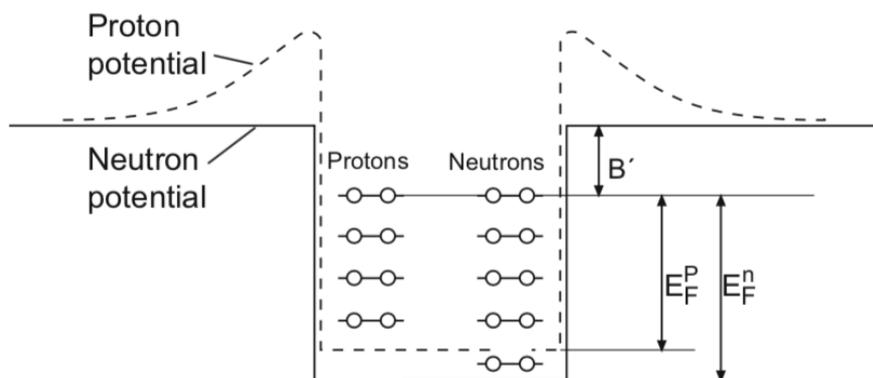


Figura 3.1: Forma schematica dei potenziali per neutroni e protoni in un nucleo, nell'ambito del modello a gas di Fermi.

potenziale abbia la forma di una buca rettangolare che per i protoni tenga anche conto del contributo coulombiano, come schematizzato in figura <sup>3.1</sup>

<sup>1</sup>Si può ad esempio vedere quanto si ottiene per l'intensità dell'interazione fra il protone e il neutrone che costituiscono uno stesso nucleo di deuterio ... .

Il numero di stati disponibili per un nucleone nel volume  $V$  e nell'intervallo d'impulso  $dp$  è quindi dato da

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} V \quad (3.1)$$

dove  $(2\pi\hbar)^3$  è il volume di una cella dello spazio delle fasi contenente due nucleoni di ogni tipo con spin antiparalleli.

Nello stato fondamentale, caratterizzato da temperatura pari a zero, i livelli a più basse energie saranno tutti occupati fino ad un certo valore massimo di impulso indicato con  $p_F$  e detto *impulso di Fermi*. Il numero di questi livelli è ottenibile integrando la [3.1](#)

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad (3.2)$$

e poichè ogni livello può ospitare al massimo due fermioni dello stesso tipo, si hanno rispettivamente

$$N = \frac{V (p_F^n)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad e \quad Z = \frac{V (p_F^p)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (3.3)$$

neutroni e protoni.

Se si esprime il volume del nucleo come quello di una sfera,  $V = 4\pi R^3/3 = 4\pi R_0^3 A/3$ , con  $R_0 = 1.21$  fm ottenuto da esperimenti di diffusione di elettroni e si ipotizza che la buca di potenziale per i protoni e quella per i neutroni abbiano la stessa estensione radiale, si trova, per un nucleo con  $Z = N = A/2$ , un impulso di Fermi pari a

$$p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \simeq 250 \text{ MeV}/c \quad (3.4)$$

Sembra dunque che i nucleoni in un nucleo si muovano liberamente con grandi valori di impulso.

I risultati della diffusione quasi elastica fra elettroni e nuclei danno una stima dell'impulso di Fermi in accordo con questa previsione. Per i nuclei più leggeri  $p_F$  tende ad assumere valori inferiori e in tali casi il modello a gas di Fermi non rappresenta una buona descrizione del nucleo.

L'energia del livello occupato più alto, corrispondente all'energia di Fermi  $E_F$ , vale

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \simeq 33 \text{ MeV} \quad (3.5)$$

con  $M$  la massa del nucleone. Detta  $B'$  la differenza fra il massimo valore della buca e il livello di Fermi, si trova che è costante per la gran parte dei nuclei e corrisponde all'energia media di legame per nucleone  $B/A = 7 \div 8$

MeV.

La profondità della buca di potenziale e l'energia di Fermi sono in larga misura indipendenti dal numero di massa  $A$

$$V_0 = E_F + B' \simeq 40 \text{ MeV} \quad (3.6)$$

Per un nucleo come il  $^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$  ad esempio, con  $B/A \simeq 7.67 \text{ MeV}$ , il fondo della buca dei neutroni giace 44 MeV al di sotto del livello di energia nulla e quello della buca dei protoni a 34 MeV.

Questo modello è analogo a quello dell'elettrone libero in un metallo ed equivalentemente fornisce utili risultati nei problemi in cui si richiede la distribuzione delle quantità di moto, piuttosto che le energie o la distribuzione spaziale dei nucleoni. Similmente se ne deduce che l'energia cinetica media del gas di nucleoni nella "materia nucleare" è confrontabile con la profondità della buca di potenziale, ulteriore evidenza del fatto che un nucleo è una struttura non troppo fortemente legata.

Ad una prima osservazione potrebbe sembrare un paradosso che da un lato i nucleoni di un nucleo occupino livelli compresi fra  $-40 \text{ MeV}$  e  $-7 \text{ MeV}$ , mentre l'energia media di legame è dell'ordine di  $7 \text{ MeV}$ . Bisogna però considerare che il potenziale nucleare non è dovuto ad una sorgente esterna al nucleo ma è generato dai suoi stessi nucleoni. Aggiungendo più nucleoni ad un nucleo non si modifica l'energia di Fermi, ma decresce invece la separazione fra livelli energetici contigui. La costanza dell'energia di Fermi è una conseguenza della costanza della densità nucleare, l'incremento della densità dei livelli è invece dovuto all'accrescimento del volume del nucleo.

Corrispondentemente, rimuovere nucleoni da un nucleo equivale ad accrescere la mutua distanza fra i suoi livelli energetici. Fornendo quindi ad un nucleo un'energia pari all'energia media di legame per nucleone si può rimuovere un nucleone dopo l'altro in quanto ci sarà sempre almeno un nucleone al livello di Fermi.

Al crescere di  $A$  i nuclei contengono tanti più neutroni che protoni. Il fatto che i livelli di Fermi di protoni e neutroni di uno stesso nucleo stabile devano coincidere<sup>[2]</sup>, implica che la profondità della buca di potenziale sentito dal gas di neutroni debba essere maggiore di quella del potenziale sentito dal gas di protoni, come in figura [3.1](#). In media i protoni appaiono quindi meno legati dei neutroni per la loro mutua repulsione coulombiana che introduce nel potenziale un termine aggiuntivo del tipo

$$V_C = (Z - 1) \frac{\alpha \hbar c}{R} \quad (3.7)$$

---

<sup>2</sup>In caso contrario il nucleo potrebbe ricondursi ad una condizione energeticamente più favorevole attraverso un decadimento  $\beta$ , contraddicendo però così l'ipotesi che il nucleo originalmente considerato fosse "stabile".

Si può quindi calcolare la dipendenza dell'energia di legame dall'eccesso di neutroni presenti in un nucleo. L'energia cinetica media per nucleone è (approccio classico, date le energie in gioco)

$$\langle E_k \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_k p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2M} \simeq 20 \text{ MeV} \quad (3.8)$$

Il contributo cinetico totale di energia del nucleo è dunque

$$E_k(N, Z) = N \langle E_n \rangle + Z \langle E_p \rangle = \frac{3}{10M} \left[ N (p_F^n)^2 + Z (p_F^p)^2 \right] \quad (3.9)$$

che tenendo conto delle [3.3](#) e supposto il nucleo di forma sferica, con raggio della buca di potenziale uguale per neutroni e protoni, diventa

$$E_k(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{5/3}} \quad (3.10)$$

Questa energia cinetica media presenta, per  $A$  fissato e al variare di  $N$  o equivalentemente  $Z$ , un minimo quando  $Z = N$ , e da ciò consegue che l'energia di legame si riduce per  $N \neq Z$ . Sviluppando la [3.10](#) in serie di potenze di  $(N - Z)$  si ha

$$E_k(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \left[ A + \frac{5}{9} \frac{(N - Z)^2}{A} + \dots \right] \quad (3.11)$$

che contiene una dipendenza funzionale dall'eccesso neutronico. Il primo termine contribuisce al termine dell'energia di volume nella formula semi-empirica di Weizsäcker [2.55](#), mentre il secondo descrive la correzione dovuta alla asimmetria  $N \neq Z$ . Per riprodurre con ragionevole accuratezza quest'ultimo bisogna tener conto del cambiamento del potenziale per  $N \neq Z$  e della variazione nell'energia cinetica.

È un notevole risultato che dal semplice modello a gas di Fermi con nucleoni che si muovono in un potenziale medio senza interagire, più o meno agli antipodi di quello a goccia di liquido su cui si basa la formula di Weizsäcker, si possano dedurre due termini cruciali di tale formula come quello di volume e quello di asimmetria neutroni-protoni.

Questo modello mette in evidenza l'importanza dell'energia di zero nella materia nucleare e i valori particolarmente elevati delle velocità dei nucleoni nei nuclei, come confermato dai risultati sperimentali. La soglia di produzione di mesoni per urto di protoni è ad esempio più bassa nei nuclei più pesanti che nell'idrogeno, poichè nel sistema del laboratorio alcuni nucleoni del nucleo bersaglio sono dotati di velocità  $v$  tutt'altro che trascurabili, con  $v/c \simeq 1/4$ .

Il modello a gas di Fermi suggerisce inoltre che nell'urto di un nucleone contro un nucleo non siano probabili trasferimenti di piccole quantità di moto al nucleo, in quanto gli stati nucleonici con quantità di moto piccole sono tutti già occupati e quindi o si ha un trasferimento rilevante oppure l'urto non ha luogo, come confermato dai risultati dello studio sperimentale delle reazioni nucleari.

### 3.2 Il modello a Shell

Il modello che descrive l'atomo con i suoi elettroni organizzati su orbitali ha avuto successo nel descrivere i dettagli della struttura atomica. Si è allora tentato qualcosa di simile per affrontare il problema della struttura nucleare. Nel modello a orbitali atomici questi vengono riempiti per energie crescenti, in accordo col principio di esclusione. Procedendo in questo modo si ottiene una struttura con un core stabile di livelli pieni, e un certo numero di elettroni di valenza, dai quali per la gran parte dipendono le proprietà dell'atomo. L'accordo fra le previsioni del modello e i risultati sperimentali è notevole. In particolare si ritrovano le caratteristiche che emergono dalla tavola degli elementi, ovvero variazioni regolari e dolci delle proprietà di atomi di una medesima shell, ma cambiamenti forti e netti quando, una volta riempita una shell si passa alla successiva.

Trasportando questo modello all'ambito nucleare emergono subito delle sostanziali diversità. Il potenziale responsabile nel caso atomico è dovuto al campo Coulombiano dei protoni del nucleo. Le shell sono quindi determinate da una causa esterna. Nel caso del nucleo non esiste invece una causa esterna in quanto i nucleoni si muovono entro un potenziale generato da loro stessi.

Pensare poi i nucleoni densamente impacchettati in un nucleo e al tempo stesso come se percorressero orbite "giacenti su shell", non sembra di primo acchito ragionevole e plausibile come lo è invece nel caso degli elettroni di un atomo. È facile immaginare che un elettrone atomico possa compiere indisturbato molte orbite senza urtare alcunchè, mentre ci si potrebbe aspettare che i protoni e i neutroni di un nucleo siano in una condizione di collisioni continue l'uno contro l'altro. Modelli nucleari del tipo a gas densi con molteplici collisioni al loro interno non sono però in grado di riprodurre i dati sperimentali.

Ci si chiede com'è possibile che i nucleoni di un nucleo, sottoposti all'intensa forza che li lega e con una così alta densità di loro simili nel volume del nucleo ( $\rho_0 \simeq 0.17$  nucleoni  $\times$  fm<sup>-3</sup>), possano completare "intere orbite" senza *urtarsi*? Ciò ha luogo come conseguenza del *principio di esclusione*, in base al quale due fermioni non possono mai condividere contemporaneamente lo stesso stato quantico. Se non ci sono nelle vicinanze stati quantici vuoti che possano essere raggiunti grazie all'energia messa in gioco in un'interazione,

allora quell'interazione non avrà luogo. È un'idea essenzialmente legata alla natura quantistica delle strutture coinvolte, se non c'è uno stato libero in cui un nucleone possa essere mandato da un urto, allora quell'urto non avverrà e non esiste di ciò un analogo classico.

D'altronde vi sono numerose regolarità osservate per i nuclidi che rimandano all'ipotesi che la struttura nucleare sia in qualche modo organizzata a shell. Prima però di delineare le caratteristiche del modello nucleare a shell si vuole mostrare come si sia riusciti a sondare in un certo qual modo direttamente questa struttura, sfruttando un particolare tipo di "sonda" sensibile all'interazione nucleare, gli *iperoni*.

### 3.2.1 Ipernuclei

Pensando al nucleo come ad un gas di Fermi, allo zero assoluto tutti i livelli a più bassa energia sono completamente occupati e le interazioni fra nucleoni possono dare esclusivamente luogo a scambi fra due di essi nello spettro energetico; ma questo processo non cambia l'energia totale di un nucleone e di conseguenza non può essere osservato sperimentalmente. È questo il motivo che permette di affrontare il problema assegnando ad ogni singolo nucleone nel nucleo l'appartenenza a uno stato di ben definiti energia e momento angolare. Una condizione siffatta è descritta da una funzione d'onda di particella singola, per cui la funzione d'onda del nucleo è il prodotto delle funzioni d'onda di particella singola per ogni nucleone.

Per studiare lo spettro energetico di un nucleo sarebbe però utile poter etichettare i suoi singoli nucleoni. Ciò si può realizzare introducendo nel nucleo una sonda opportuna, come ad esempio un *iperone*  $\Lambda^0$ <sup>3</sup>, ottenendo così quello che si chiama un *ipernucleo*.

La  $\Lambda^0$  nel nucleo non può decadere a causa dell'interazione forte, dato che quest'ultima conserva la stranezza, e di conseguenza la vita media della  $\Lambda^0$  nel nucleo sarà simile a quella della  $\Lambda^0$  libera, cioè  $\tau_{\Lambda^0} \simeq 10^{-10}$  s, che è un tempo sufficientemente lungo per poter attuare una analisi spettroscopica con cui studiare le proprietà dell'ipernucleo.

Un modo per produrre ipernuclei è con la seguente reazione di scambio della "stranezza"



in cui il pedice indica che un neutrone del nucleo si è trasformato in una  $\Lambda^0$  tramite la reazione



In figura 3.2 l'apparato con cui nel 1970 al CERN si sono generati e rivelati ipernuclei. Le condizioni cinematiche sono particolarmente convenienti quando l'impulso del kaone incidente è di 530 MeV/c e si osservano i pioni

<sup>3</sup>L'iperone  $\Lambda^0$  è costituito da un quark *u*, uno *d* e uno *s*; ha massa di 1.115 GeV/c<sup>2</sup> e vita media di  $2.631 \times 10^{-10}$  s; è una specie di neutrone pesante.

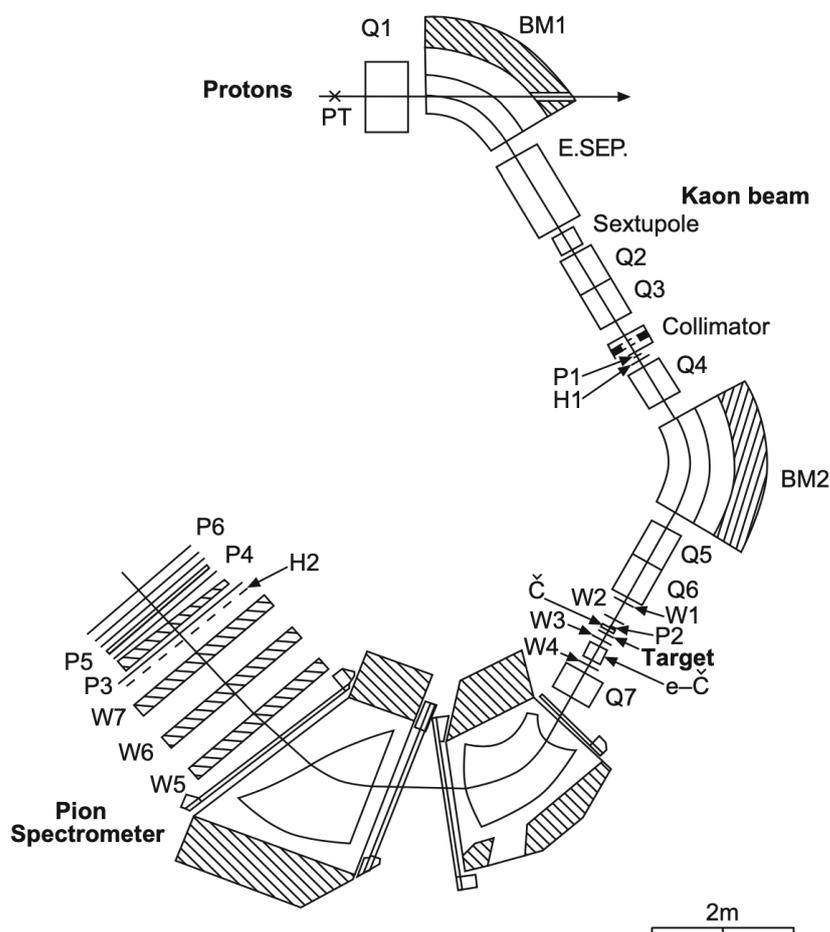


Figura 3.2: Apparato per produzione e rivelazione di ipernuclei. Un fascio di  $K^-$  incide un bersaglio di carbonio spesso 1 cm, generando ipernuclei e  $\pi^-$ . Lo spettrometro ha due stadi, per la misura dell'impulso dei K e dei  $\pi$ . Per la rivelazione sfrutta contatori a scintillazione (P), camere a fili (W) e rivelatori Cherenkov (C), dipolo magnetico (BM) per la misura degli impulsi, e lente quadrupolare (Q) per focheggiamento. Le energie d'eccitazione degli ipernuclei si deducono dalle differenze fra le energie dei kaoni e dei pioni.

dello stato finale all'angolo  $\vartheta = 0^\circ$ , in quanto in tal caso è nullo l'impulso trasferito al nucleo diffuso. In pratica si sono utilizzati fasci di kaoni di impulsi compresi fra  $300 \text{ MeV}/c$  e  $1 \text{ GeV}/c$ , per cui l'impulso trasferito permane piccolo a confronto dell'impulso di Fermi d'un nucleone nel nucleo che può dunque essere visto come abbastanza indisturbato.

Il bilancio energetico della reazione [3.13](#) con un neutrone libero dipende dalle masse delle particelle coinvolte. Se però il neutrone è legato in un nucleo e anche la  $\Lambda^0$  resta nel nucleo, allora la differenza d'energia fra  $K^-$  e

$\pi^-$  dà la differenza fra le energie di legame del neutrone e della  $\Lambda^0$

$$B_{\Lambda^0} = B_n + E_\pi - E_K + (M_{\Lambda^0} - M_n)c^2 + (\text{en.rinculo}) \quad (3.14)$$

In figura [3.3](#) lo spettro pionico per questa reazione su nuclei di  $^{12}\text{C}$  in

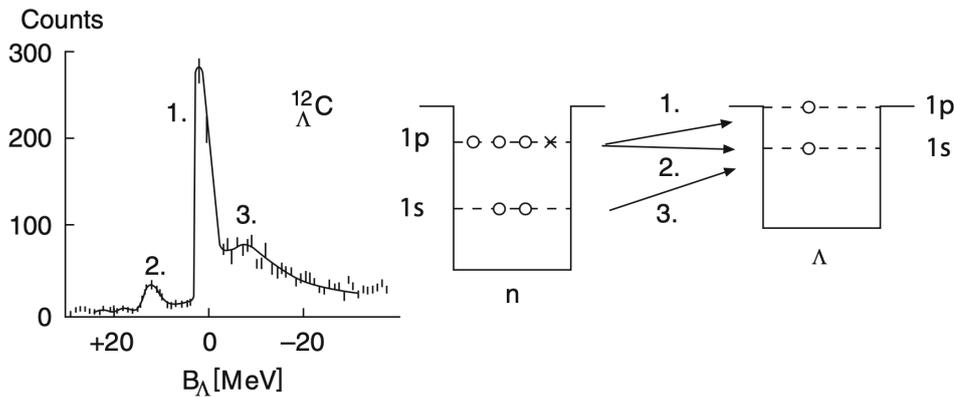


Figura 3.3: Spettro dei pioni da  $K^- + ^{12}\text{C} \rightarrow \pi^- + ^{12}_{\Lambda^0}\text{C}$  per impulso dei kaoni di 720 MeV/c. Il rateo del conteggio di pioni a  $^0$  è graficato in funzione dell'energia trasferita  $B_{\Lambda^0}$ , interpretabile come energia di legame della  $\Lambda^0$  nel nucleo. Il picco 1 corrisponde all'energia di legame  $B_{\Lambda^0} = 0$  e il picco 2, livello base del  $^{12}\text{C}$ , ha un'energia di legame di 11 MeV

funzione dell'energia  $B_{\Lambda^0}$  di legame della  $\Lambda^0$ . Il valore di  $B_n$  è quello sperimentalmente misurato per strappare un neutrone dal nucleo di  $^{12}\text{C}$ . Oltre al picco centrato su  $B_{\Lambda^0} = 0$  se ne osserva uno meno intenso a 11 MeV che può essere interpretato considerando che la trasformazione di un neutrone in una  $\Lambda^0$  lascia disponibile una quantità netta d'energia che non può che venire dal legame nucleare e viene trasferita al pione.

Ciò si spiega considerando che il principio di esclusione impedisce a un protone o a un neutrone in un nucleo di occupare livelli energetici inferiori rispetto a quelli in cui già si trovano, se questi sono già occupati; anche in un nucleo quindi gli stati si riempiono, energeticamente parlando, dal basso verso l'alto. Se però una particella  $\Lambda^0$  prende il posto di un neutrone in un nucleo, essa potrà poi andare ad occupare qualsiasi livello energetico in quel nucleo, in quanto essa non risente della presenza dei singoli nucleoni ma solo del potenziale medio da essi creato. Il potenziale medio sentito dalla  $\Lambda^0$  in un nucleo è però meno intenso di quello cui è soggetto un generico nucleone di quello stesso nucleo, essendo l'interazione  $\Lambda^0$ -nucleone più debole di quella nucleone-nucleone, come si vede anche per il fatto che non esistono stati legati fra una  $\Lambda^0$  e un singolo nucleone.

Dallo spettro [3.3](#) si deduce quindi che protoni e neutroni del nucleo di  $^{12}\text{C}$  occupano livelli 1s e 1p e se un neutrone da uno stato 1p si trasforma in una  $\Lambda^0$ , questa può anche essere in uno stato 1p, e in tal caso l'energia di legame

della  $\Lambda^0$  è prossima a zero, o può essere in uno stato 1s, e la sua energia di legame è allora  $B_{\Lambda^0} \approx 11$  MeV.

Il picco meno distinto a valori  $B_{\Lambda^0} < 0$  è dovuto non alla trasformazione di uno dei neutroni debolmente legati dello stato 1p prossimo al livello di Fermi, ma piuttosto di un neutrone dello stato 1s con energia di legame maggiore dell'energia utilizzata per il calcolo di  $B_{\Lambda^0}$ .

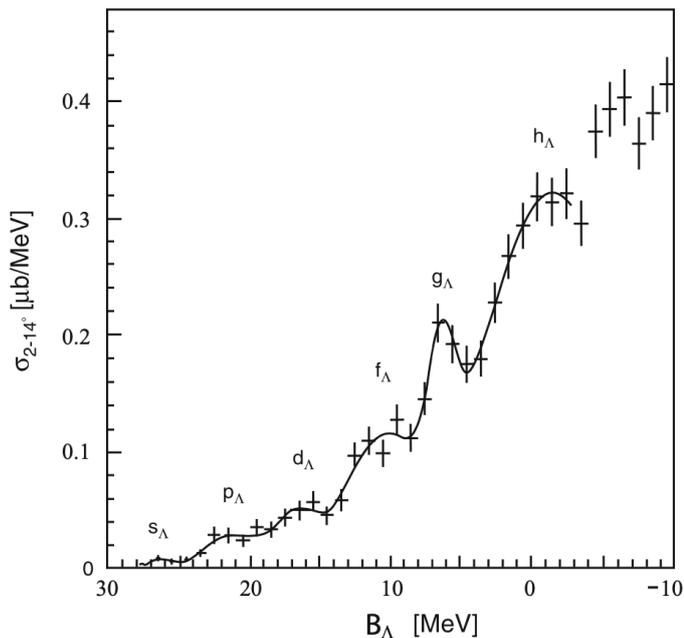


Figura 3.4: Stati eccitati di  ${}_{\Lambda^0}^{208}\text{Pb}$ .  $s_{\Lambda}$  è lo stato fondamentale,  $h_{\Lambda}$  quello a soglia

Gli stati d'eccitazione di una singola particella  $\Lambda^0$  sono ancora più evidenti in nuclei pesanti, come si vede in figura 3.4 per lo spettro di  ${}_{\Lambda^0}^{208}\text{Pb}$ . Indagini sistematiche tramite la reazione



hanno fornito le energie di legame degli stati 1s oltre a quelle degli stati eccitati p, d, f, di svariati nuclei, come in figura 3.5, dove è mostrata la dipendenza di queste energie di legame dal numero di massa  $A$  dei nuclei considerati.

È quindi chiaro che gli iperoni  $\Lambda$  occupano livelli energetici discreti i cui valori energetici crescono al crescere di  $A$ . Le curve mostrate in figura sono state ottenute considerando nuclei sferici con raggi dati da  $R = R_0 A^{1/3}$  e una buca di potenziale uniforme di profondità  $V_0 \approx 30$  MeV.

La particella  $\Lambda$  si muove sostanzialmente come una particella libera nella

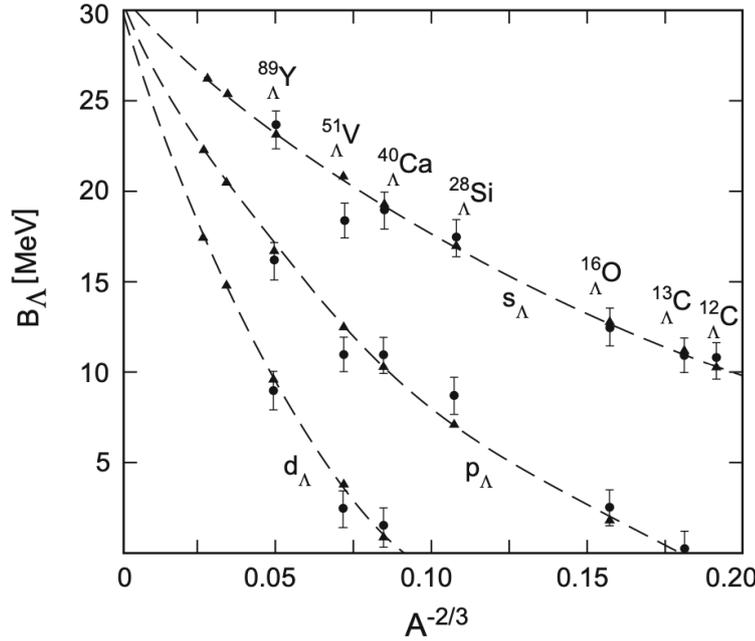


Figura 3.5: Energia di legame delle  $\Lambda$  negli ipernuclei in funzione del numero di massa  $A$ . I simboli  $s_\Lambda$ ,  $p_\Lambda$  e  $d_\Lambda$  sono riferiti agli stati della  $\Lambda$  nel nucleo. I simboli triangolari connessi da linee tratteggiate sono predizioni da modello

buca, nonostante il nucleo sia costituito da materia nucleonica densamente distribuita.

### 3.2.2 Il potenziale del modello a Shell

Il primo passo per sviluppare il modello a shell consiste nella scelta del potenziale. Si considerino come due esempi un potenziale a buca quadrata con pareti infinite ed un oscillatore armonico.

In figura [3.6](#) sono mostrati i livelli che si ottengono in questi casi risolvendo l'equazione di Schrödinger corrispondente. Come nel caso atomico la degenerazione di ogni livello corrisponde al numero di nucleoni che possono essere messi in esso, ovvero  $2(2\ell + 1)$  col fattore  $(2\ell + 1)$  dovuto alla degenerazione di  $m_\ell$  e il fattore 2 derivante dalla degenerazione di  $m_s$ . Come in fisica atomica i livelli sono connotati da notazione spettroscopica con l'importante differenza che  $n$  non è il numero quantico principale ma conta semplicemente quanti livelli posseggano un determinato valore di  $\ell$ . Quindi, ad esempio, 1d è il più basso stato d, 2d il successivo, e così via (in spettroscopia atomica non esistono stati 1d o 2d). In figura sono anche riportati i numeri di occupazione di ogni livello e il numero cumulativo di nucleoni che dovrebbe corrispondere al completo riempimento delle shell principali, osservando che

protoni e neutroni sono contati separatamente. Dallo schema emergono i numeri magici 2, 8, 20, ma non i successivi.

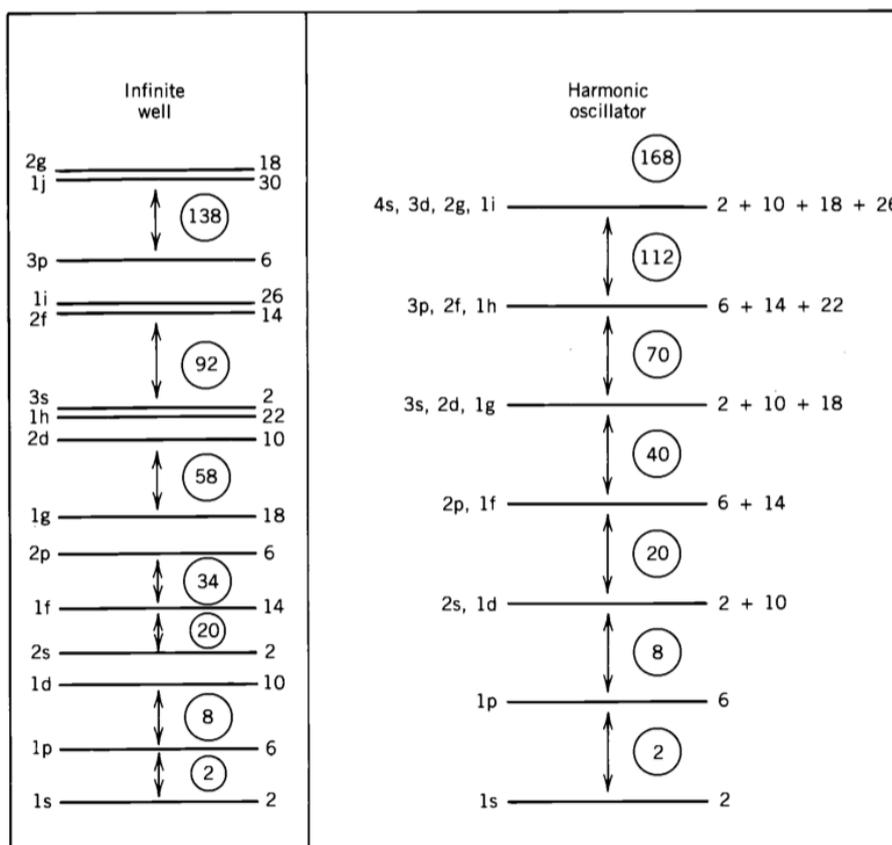


Figura 3.6: Strutture a shell ottenute con un potenziale a buca infinita, e con un potenziale d'oscillatore armonico. Sono indicati i numeri di fermioni ospitabili nei vari livelli e quelli totali alla chiusura delle shell.

Un primo passo per migliorare il modello consiste nello scegliere un potenziale più realistico. La buca a pareti infinite esclude di poter togliere qualunque nucleone ad un nucleo, equivarrebbe ad allontanarlo a distanza infinita. Oltretutto, dato il breve range delle forze nucleari, è ragionevole che il potenziale nucleare segua approssimativamente l'andamento della densità di nucleoni in un nucleo, e non presenti bordi netti raggiungendo il valore zero in modo dolce a cavallo della distanza corrispondente al raggio nucleare. Neppure il potenziale di oscillatore armonico soddisfa, in quanto anch'esso richiede un'energia infinita per separare un nucleone dal nucleo e inoltre ha pareti troppo poco nette.

Si sceglie dunque un potenziale della forma

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}} \quad (3.16)$$

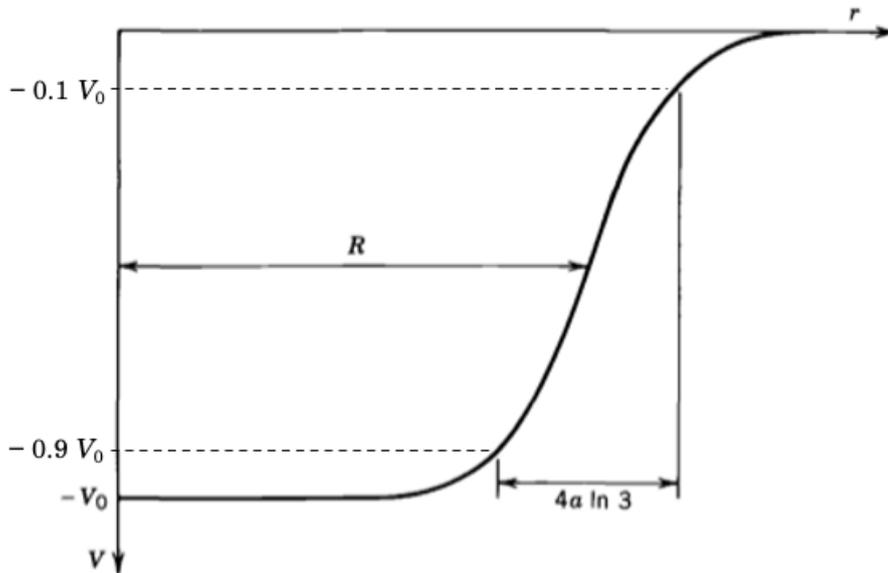


Figura 3.7: Potenziale di tipo Saxon-Woods per il modello a shell.

I parametri  $R$  ed  $a$  sono rispettivamente il raggio medio e lo spessore di pelle, e i loro valori sono scelti in accordo con quanto visto per la densità dei nucleoni in un nucleo:  $R \simeq 1.25 \times A^{1/3}$  fm ed  $a = 0.524$  fm. La profondità  $V_0$  è scelta in modo da dare le corrette separazioni energetiche, ed è dell'ordine di 50 MeV. I livelli energetici che ne risultano sono mostrati a sinistra in figura 3.8

L'effetto di questo potenziale, rispetto all'oscillatore armonico, è di rimuovere la degenerazione in  $\ell$  per le shell principali. Salendo in energia però, lo *splitting* diventa sempre più forte fino ad essere dello stesso ordine delle spaziature fra i livelli dell'oscillatore armonico.

Riempiendo ordinatamente le shell con  $2(2\ell + 1)$  nucleoni si ottengono i primi tre numeri magici, 2, 8 e 20, ma non quelli successivi.

L'aggiunta di un contributo di *spin-orbita* porta ad ottenere la corretta struttura di sub-shell e come evidenziato a destra in figura 3.8 si ritrova la serie completa di numeri magici. Non si tratta però in questo caso di un'interazione di *spin-orbita* dovuta, come nel caso atomico, ad accoppiamenti di origine elettromagnetica, che darebbero contributi troppo deboli per giustificare l'entità dello *splitting* tra i livelli nucleari.

Il contributo potenziale di *spin-orbita* ha una forma del tipo

$$V_{so}(r)\ell \cdot \mathbf{s} \quad (3.17)$$

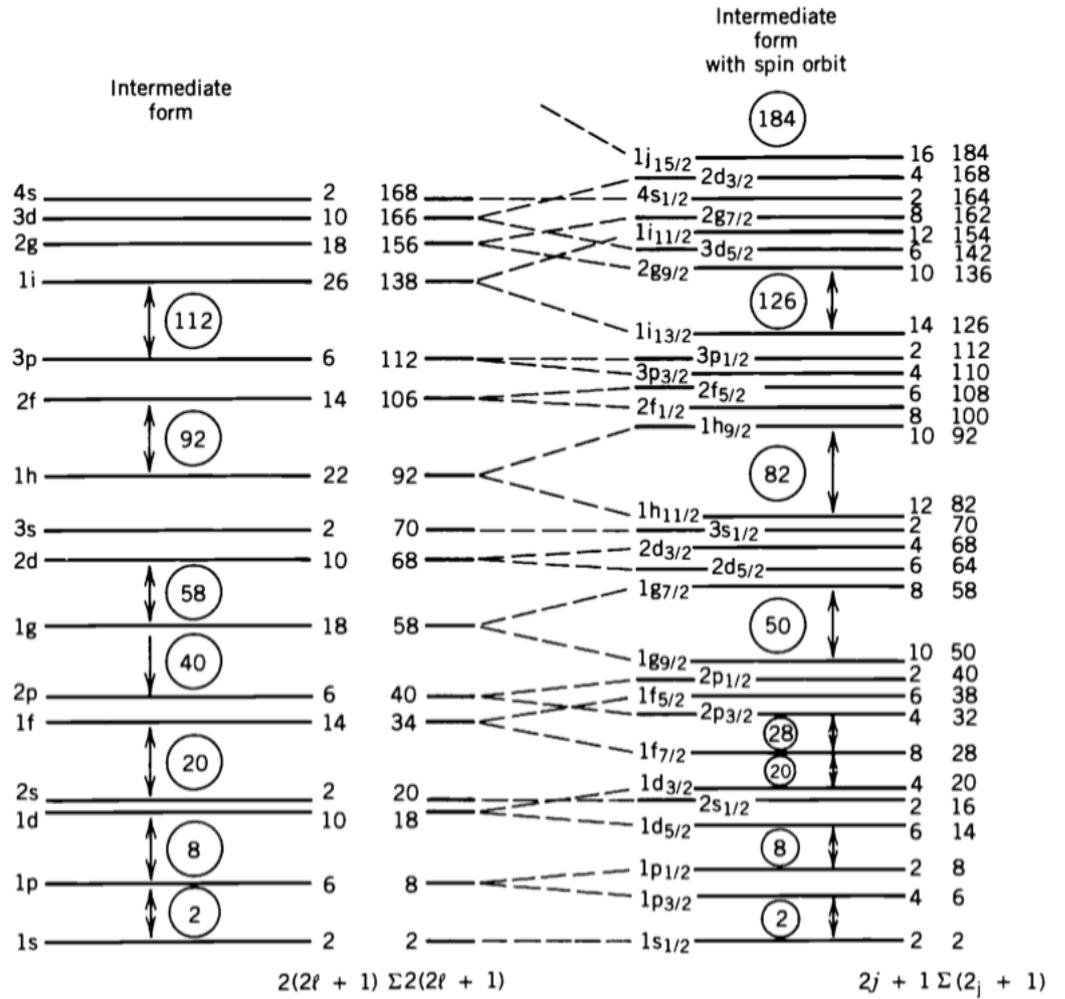


Figura 3.8: A sinistra livelli calcolati col solo potenziale centrale. Per ogni livello il numero di nucleoni che può ospitare e il totale fino a quel livello. A destra effetto del contributo di spin-orbita che separa i livelli con  $\ell > 0$ . Effetti di shell ben definiti; riprodotta anche la sequenza dei numeri magici.

col termine  $\ell \cdot s$  responsabile del riordinamento dei livelli. Sviluppando infatti  $j^2 = (\ell + s)^2$  si ottiene, per i valori d'aspettazione

$$\frac{\langle \ell \cdot s \rangle}{\hbar^2} = \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)}{2} = \begin{cases} \frac{\ell}{2} & \text{per } j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{(\ell+1)}{2} & \text{per } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.18)$$

da cui una separazione energetica  $\Delta E_{\ell s}$  che cresce linearmente col momento angolare  $\ell$

$$\Delta E_{\ell s} = \frac{2\ell + 1}{2} \langle V_{so}(r) \rangle \quad (3.19)$$

Sperimentalmente si trova che  $V_{so}$  è negativo per cui il livello con  $j = \ell + 1/2$  è sempre al di sotto di quello con  $j = \ell - 1/2$ , contrariamente al caso atomico.

Solitamente il numero quantico  $j = \ell \pm 1/2$  del momento angolare totale di un nucleone viene denotato con un ulteriore indice: il livello  $n\ell_j$  è  $(2j + 1)$  volte degenerare.

In figura [3.8](#) la sequenza di livelli energetici ottenuti a partire da un potenziale somma di un termine di Saxon-Woods e di spin-orbita.

La differenza fondamentale fra nucleo e atomo è che in quest'ultimo l'accoppiamento  $\ell s$  genera la *struttura fine*, piccole correzioni dell'ordine di  $\alpha^2$ ; nel caso del nucleo invece l'accoppiamento è responsabile di separazioni ampie fra i livelli, confrontabili con le separazioni fra le stesse shell  $n\ell$ .

### 3.2.3 Nucleoni di valenza

Nonostante la sua semplicità il modello a shell predice con successo i valori dei livelli energetici, spin e parità di quasi tutti gli stati fondamentali dei nuclei con  $A$  dispari, e con successo leggermente minore i valori dei loro momenti di dipolo magnetico e quadrupolo elettrico. Il risultato è ottenuto considerando un modello estremo a particella indipendente. Questo consiste nell'immaginare tutti i nucleoni del nucleo in questione appaiati, tranne quello dipari residuo che viene considerato unico responsabile delle osservate proprietà di quel nucleo.

Si tratta ovviamente di una semplificazione drastica che vedrebbe come passo successivo e più raffinato quello di considerare tutti i nucleoni delle shell non complete come cooperanti a definire le proprietà del nucleo. Considerando ad esempio il  ${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ , che ha tre neutroni oltre la shell chiusa  $N = 20$ , il modello estremo considererebbe il solo  $23^{mo}$  neutrone, mentre quello più completo considererebbe tutti e tre i neutroni di *valenza* al di fuori della shell chiusa con  $Z = 20$  ed  $N = 20$ , come responsabili delle proprietà dello stato fondamentale del  ${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ . Il modello a shell permette anche di calcolare probabilità di transizioni fra stati dovute a decadimenti radioattivi o a reazioni nucleari.

Esso si basa però su un'assunzione cruciale che merita di essere ulteriormente indagata, e cioè che un nucleone si comporti, anche nelle parti più interne di un nucleo, come se si stesse muovendo quasi libero su un orbitale ben definito. Dopotutto molti test del modello a shell coinvolgono proprietà del nucleo, quali spin e momenti elettromagnetici, dipendenti dai soli nucleoni di valenza, che si muovono nella zona più esterna, alla superficie del nucleo.

Anche molte sonde sperimentali che sentono l'interazione nucleare hanno contribuito a studiare la zona superficiale dei nuclei. Per indagare sperimentalmente l'assunzione fatta ci vuole una sonda che raggiunga la parte più interna di un nucleo ed elettroni di alta energia si prestano bene al caso. La proprietà nucleare che essi permettono di indagare è la densità di carica di un singolo nucleone sulla sua shell, equivalente al modulo quadro della sua funzione d'onda  $|\psi|^2$ .

Gli stati con una significativa sovrapposizione spaziale con le zone più interne di un nucleo sono quelli  $s$ , per gli altri  $\psi \rightarrow 0$  con  $r \rightarrow 0$ . Per l'esperimento si sceglie quindi il  ${}^{205}_{81}\text{Tl}_{124}$  cui manca un protone per completare la sub-shell  $3s_{1/2}$  al di sotto del numero magico  $Z = 82$ . Per misurare il contributo alla distribuzione di carica del solo protone  $3s_{1/2}$  trascurando i restanti si misura sostanzialmente la differenza fra la distribuzione di carica del  ${}^{205}_{81}\text{Tl}_{124}$  e del  ${}^{206}_{82}\text{Pb}_{124}$ , che ha la shell protonica completa. In figura 3.9 la differenza osservata sperimentalmente fra le due distribuzioni di carica.

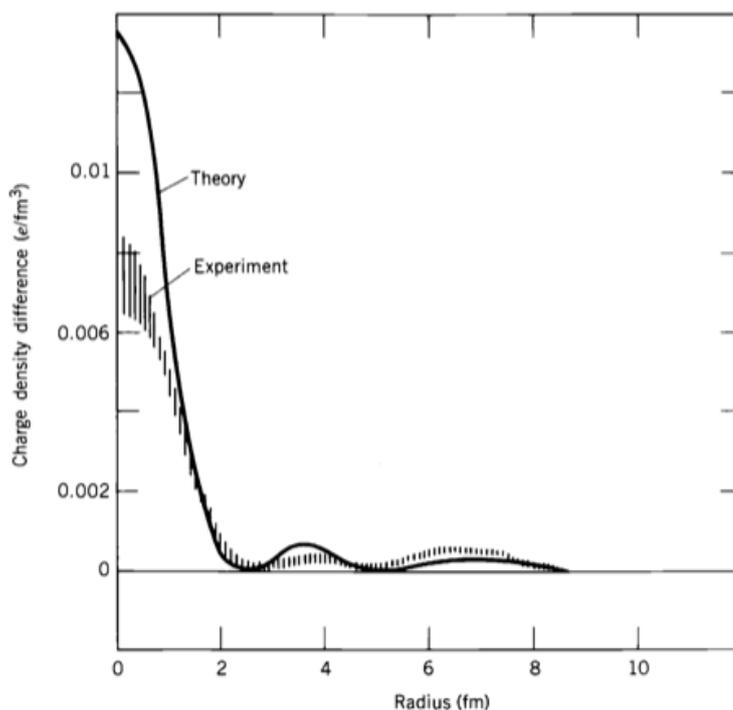


Figura 3.9: ...

Il risultato sperimentale conferma l'assunzione che le shell nucleoniche mantengano le loro caratteristiche anche nelle parti più interne di un nucleo. Si può quindi considerare la descrizione a nucleone indipendente non solo un comodo modello, ma una valida rappresentazione del comportamento dei nucleoni in un nucleo.

## Capitolo 4

# Instabilità dei nuclei

Le specie nucleari oggi note sono circa 3300: 254 sono i nuclidi naturali stabili, 85 quelli naturali instabili, i restanti sono radionuclidi prodotti artificialmente. Degli 85 nuclidi naturali instabili 32 sono ritenuti *primordiali*, mentre gli altri si sono formati attraverso reazioni e decadimenti nucleari spontanei nel corso dei miliardi di anni di vita dell'universo.

L'uranio  ${}_{92}^{238}\text{U}$  è il nucleo con i valori maggiori di  $A$  e  $Z$  spontaneamente presente in natura. I nuclidi con  $Z > 92$ , detti *transuranici*, sono tutti prodotti artificialmente.

Tutti gli elementi transuranici e una parte di quelli *suburanici* sono naturalmente instabili rispetto all'emissione di nuclei di elio  ${}^4_2\text{He}$  (radioattività  $\alpha$ ), rispetto all'emissione di elettroni  $e^-$  o positroni  $e^+$  (radioattività  $\beta$ ), e all'emissione di radiazione elettromagnetica (radioattività  $\gamma$ ).

A questi tre tipi di decadimento si aggiunge la *fissione spontanea* dell'isotopo  ${}_{92}^{238}\text{U}$ , scoperta da K.Petrzhak e G.Flerov nel 1940, che consiste nella scissione del nucleo di uranio in due frammenti nucleari di massa confrontabile.

La radioattività naturale fu casualmente scoperta da H.Bequerel nel 1896 con l'osservazione di *raggi fortemente penetranti*, spontaneamente emessi dal minerale di uraninite picea (pechblenda), individuati per l'impressione da essi prodotta in lastre fotografiche, tramite l'eccitazione per fluorescenza di gas, oltre che per la ionizzazione dell'aria che provocavano <sup>1</sup>.

Utilizzando come indicatore il potere ionizzante <sup>2</sup>, si individuarono tre diversi tipi di radiazioni, fino ad allora sconosciute e molto diverse fra loro, che furono contraddistinte dalle lettere  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

I nuclei stabili sono raccolti in una banda piuttosto stretta sul piano  $(Z; N)$  del grafico della tabella dei nuclidi, come mostrato in figura [4.1](#).

---

<sup>1</sup>Prime tecniche di misura della radioattività con elettroscopi ed elettrometri, che hanno anche permesso l'individuazione dei raggi cosmici ... .

<sup>2</sup>Il potere ionizzante di una radiazione è legato al numero di coppie elettrone-ione che tale radiazione produce interagendo con gli atomi del materiale che attraversa.

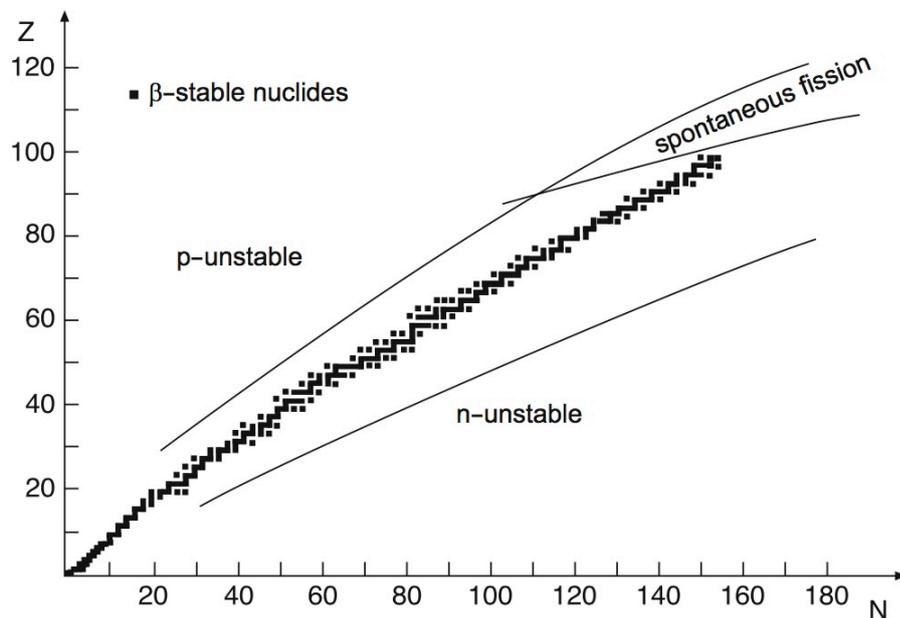


Figura 4.1: Carta dei nuclidi: i quadrati neri nel piano  $(Z, N)$  indicano i nuclei della "valle di stabilità".

Nel 1899, tre anni dopo la scoperta di Becquerel, si osservò che il rateo di decadimento di una sostanza radioattiva pura decresce, col passare del tempo, in accordo con un andamento esponenziale decrescente.

Ci vollero altri anni per assodare che la radioattività è un fenomeno che coinvolge ogni singolo atomo di una certa sostanza, e non il campione di sostanza radioattiva in quanto tale nella sua interezza.

Un'ulteriore paio d'anni furono quindi necessari per convincersi che il decadimento radioattivo di un atomo è un processo intrinsecamente statistico, e che sostanzialmente gli atomi di una sostanza, quand'anche radioattivi, "non invecchiano". È quindi impossibile predire quando uno specifico atomo deva decadere e ciò conduce naturalmente a una legge di tipo esponenziale decrescente col tempo.

Il decadimento radioattivo spontaneo è un fenomeno sostanzialmente indipendente dal tipo di emissione che produce. Nel caso di un decadimento in due corpi esso consiste nella disintegrazione spontanea del nucleo di un atomo, detto *genitore* che si trasforma in un più stabile nucleo *figlio*, più un residuo.

Se anche il nucleo figlio ed eventualmente il residuo sono radioattivi il processo continua con decadimenti a catena fino all'ottenimento di prodotti stabili.

Considerando processi che coinvolgono grandi numeri di atomi li si può trattare alla stregua di variabili continue e supposto un sistema costituito a un

certo istante da un gran numero di atomi radioattivi, la legge di decadimento fornisce il numero medio di atomi del sistema a un qualsiasi istante successivo.

I primi a formulare e applicare coerentemente la legge che descrive il decadimento di sostanze radioattive furono Rutherford e Soddy nel 1902.

Ogni nucleo instabile possiede quindi una determinata probabilità  $\lambda$  di decadere in un qualsiasi istante di tempo e la sua *vita media*  $\tau$  è il reciproco della probabilità di decadimento:  $\tau = 1/\lambda$ .

## 4.1 Decadimento radioattivo di una sola sostanza

Dato un qualsiasi atomo, la probabilità che esso decada nell'intervallo di tempo  $dt$  è proporzionale a  $dt$  moltiplicato per una costante  $\lambda$ , detta *costante o probabilità di decadimento*, le cui dimensioni sono l'inverso di un tempo, che risulta indipendente dall'età dell'atomo ed è caratteristica della sostanza e del tipo di decadimento. Questa legge si applica indifferentemente a ogni tipo di decadimento radioattivo.

Supposto di avere inizialmente un numero molto grande  $N(0)$  di atomi di una singola sostanza radioattiva, che ogni singolo decadimento radioattivo sia indipendente da tutti gli altri e considerando il numero residuo  $N(t)$  di atomi della sostanza ad un istante successivo  $t$  alla stregua di una variabile continua, dalla legge del decadimento si ha che la diminuzione  $-dN$  di atomi nell'intervallo di tempo  $dt$  sarà data da

$$-dN(t) = \lambda N(t)dt \quad (4.1)$$

Integrando quest'equazione tenendo conto del numero  $N(0)$  di atomi presenti all'istante iniziale, si ha

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \quad (4.2)$$

L'inverso della costante di decadimento,  $\tau = 1/\lambda$  è detto *vita media* ed è effettivamente il tempo medio  $\langle t \rangle$  di vita d'un atomo. Se infatti

$$\frac{\lambda N(t)}{N(0)} = \frac{\lambda N(0)e^{-\lambda t}}{N(0)} = \lambda e^{-\lambda t} \quad (4.3)$$

rappresenta la funzione di distribuzione statistica dei tempi di vita di ogni atomo della sostanza radioattiva, il loro tempo medio  $\langle t \rangle$  di vita è

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = \tau \quad (4.4)$$

Si utilizza spesso il *tempo di dimezzamento*  $T_{1/2}$ , definito come il tempo affinché si riduca alla metà il numero di atomi inizialmente presenti

$$N(T_{1/2}) = N(0)e^{-T_{1/2}/\tau} = \frac{N(0)}{2} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{T_{1/2}}{\tau} = \lambda T_{1/2} = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad T_{1/2} = \tau \ln 2 \simeq 0.693147 \cdot \tau \quad (4.5)$$

Il numero o *rateo* di decadimenti nell'unità di tempo, detto anche *attività*

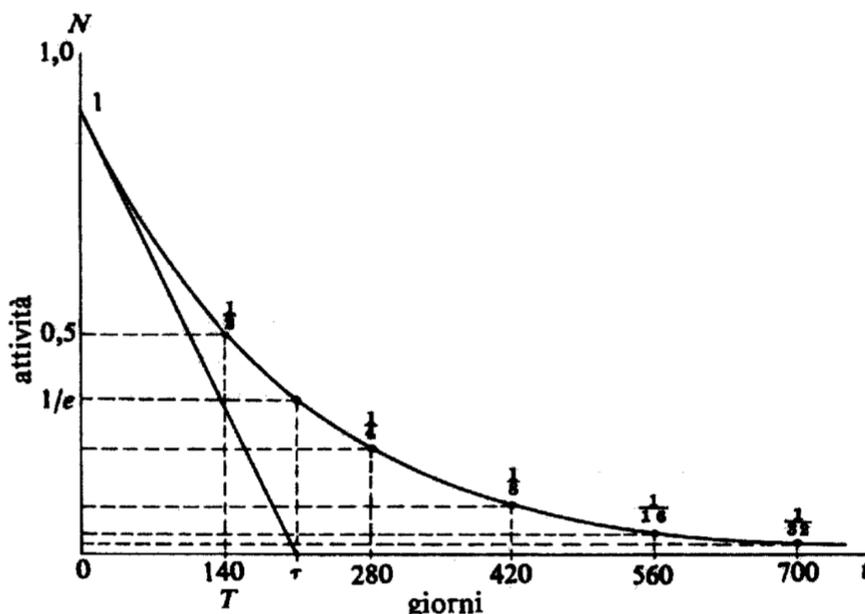


Figura 4.2: Decadimento d'una sostanza radioattiva con tempo di dimezzamento  $T_{1/2} = 140$  giorni. La tangente a  $N(t)$  nel punto d'ascissa  $t = 0$ , interseca l'asse  $t$  nel punto di valore  $\tau$ .

$\mathcal{A}(t)$  della sostanza radioattiva, si ottiene dalle [4.1](#) e [4.2](#):

$$\mathcal{A}(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| = \lambda N(t) = \lambda N(0) e^{-\lambda t} = \mathcal{A}(0) e^{-\lambda t} \quad (4.6)$$

ed è una funzione decrescente col tempo, dato che al suo trascorrere il numero di atomi non ancora decaduti e che possono quindi decadere, cala.

L'unità di misura internazionale dell'attività è il Becquerel (Bq), corrispondente a 1 disintegrazione al secondo. È ancora molto usato anche il Curie (Ci), corrispondente a  $3.7 \cdot 10^{10}$  Bq.

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

Una certa sostanza radioattiva può mostrare diversi meccanismi indipendenti e competitivi di decadimento, detti anche *canali di decadimento*, ognuno caratterizzato da una ben definita costante  $\lambda_i$ , originando così diverse sostanze figlie. Supposto che per una sostanza vi siano  $n$  diversi e indipendenti canali di decadimento, la sua probabilità totale  $\lambda_{tot}$  di decadimento, essendo additive le probabilità di eventi fra loro indipendenti, è data da

$$\lambda_{tot} = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_{tot}} \quad (4.7)$$

Un processo di decadimento con  $n > 1$  viene anche detto *diramazione*, e il rapporto fra le quantità di due diversi tipi  $i$  e  $j$  di prodotti di decadimento associati a due diversi canali, in un certo intervallo di tempo, è detto *rapporto di diramazione (branching ratio) relativo* e coincide col rapporto fra le rispettive costanti di decadimento,  $\lambda_i/\lambda_j$

$$\frac{dN_i(t)}{dN_j(t)} = \frac{\lambda_i N_0(t) dt}{\lambda_j N_0(t) dt} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \quad (4.8)$$

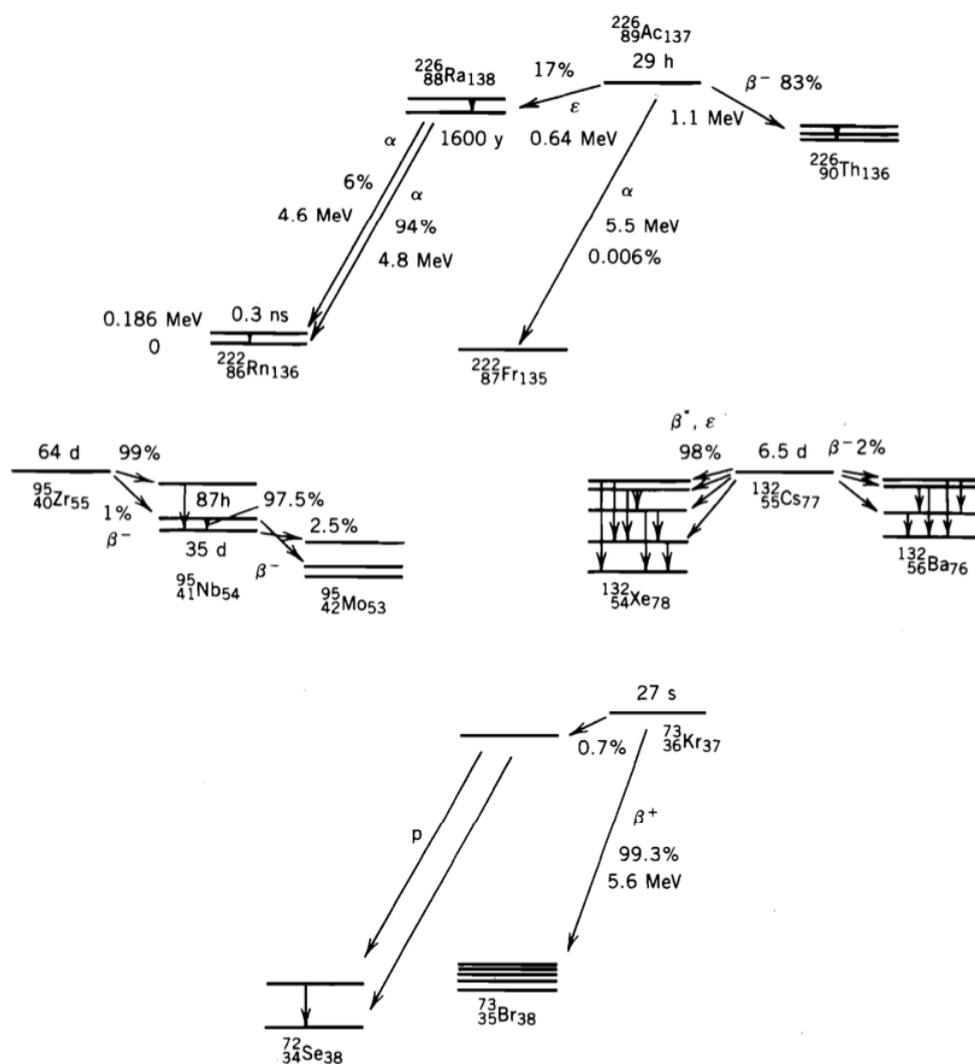


Figura 4.3: Esempi di decadimenti con *branching ratio*.  $\epsilon$  indica cattura elettronica.

### 4.1.1 Misure di vite medie

Una misura di attività in funzione del tempo per una sostanza radioattiva si può effettuare contando il numero di decadimenti in una sequenza di brevi intervalli temporali successivi  $\Delta t$ . Graficando i dati in scala semilogaritmica, ovvero  $\ln A(t)$  vs  $t$ , si ottiene un segmento di retta la cui pendenza è  $-\lambda$ . Questo metodo è però utile e praticabile solo nel caso di vite medie che non siano ne' troppo corte ne' troppo lunghe, se confrontate con la vita media dello sperimentatore.

Nel caso di vite medie molto lunghe in pratica si misura direttamente l'attività  $dN/dt$  del processo di decadimento avendo accuratamente determinato, ad esempio per via chimica, il numero  $N_0$  di atomi del campione

$$\lambda = -\frac{1}{N_0} \frac{dN(t)}{dt} \quad (4.9)$$

Nel caso di vite medie molto corte si ricorre ad altre tecniche.

È interessante vedere come si possano misurare le vite medie dei componenti di una miscela radioattiva nel caso in cui si sia in grado di contare il numero di decadimenti in una sequenza di intervalli temporali successivi.

Si supponga d'avere un preparato costituito da una miscela di due diverse sostanze radioattive completamente indipendenti l'una dall'altra e di misurare la distribuzione dei tempi d'attesa fra la rivelazione di due suoi successivi prodotti di decadimento. Detto  $N_*(t) = N_1(t) + N_2(t)$  il numero totale di nuclei radioattivi del preparato non ancora decaduti ad un qualunque istante  $t > 0$ , con

$$N_1(t) = N_1(0) e^{-t/\tau_1} \quad \text{ed} \quad N_2(t) = N_2(0) e^{-t/\tau_2}$$

si ha:

$$N_*(0) = N_1(0) + N_2(0) \quad \text{ed} \quad N_*(t) = N_1(0) e^{-t/\tau_1} + N_2(0) e^{-t/\tau_2}$$

Si considerino tre casi estremi:

$$\tau_1 \ll \tau_2 \quad ; \quad \tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \tau \quad ; \quad \tau_1 \gg \tau_2$$

Si indichi con  $N_*^{(sp)}(t_i)$  il numero di eventi raccolti nell' $i$ -mo canale dell'istogramma sperimentale, compreso tra gli istanti  $t_i$  e  $t_i + \Delta t$ .

- Si comincia con l'analizzare il secondo caso:  $\tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \tau$  e si considera il logaritmo naturale di  $N_*(t)$

$$\begin{aligned} \ln N_*(t) &= \ln \left[ N_1(0) e^{-t/\tau_1} + N_2(0) e^{-t/\tau_2} \right] \\ &\simeq \ln \left[ N_1(0) e^{-t/\tau} + N_2(0) e^{-t/\tau} \right] \\ &= \ln \{ e^{t/\tau} [N_1(0) + N_2(0)] \} \\ &= -\frac{t}{\tau} + \ln [N_1(0) + N_2(0)] \end{aligned} \quad (4.10)$$

che mostra una dipendenza quasi lineare di  $\ln N_*(t)$  da  $t$ .

Ponendo in scala semilogaritmica  $N_*^{(sp)}(t_i)$  si nota che il suo profilo dovrebbe poter essere approssimato da un andamento rettilineo con pendenza  $-1/\tau$  e intercetta sull'asse delle ordinate pari a  $\ln [N_1(0) + N_2(0)]$ .

Effettuando quindi un "fit a retta" si riescono a stimare  $\tau \simeq \tau - 1 \simeq \tau_2$  e la somma  $[N_1(0) + N_2(0)]$  delle abbondanze iniziali, ma non le singole abbondanze  $N_1(0)$  e  $N_2(0)$ .

- Si suppone ora che sia  $\tau_2 \gg \tau_1$ .

In tal caso ci si aspetta che per tempi  $t \gg \tau_1$  la legge di decadimento sia dominata dai prodotti della sostanza 2, come si vede anche in figura 4.4

Se quindi si effettua un fit sui valori di  $\ln [N_*^{(sp)}(t_i)]$  per valori di  $t \gg \tau_1$ ,

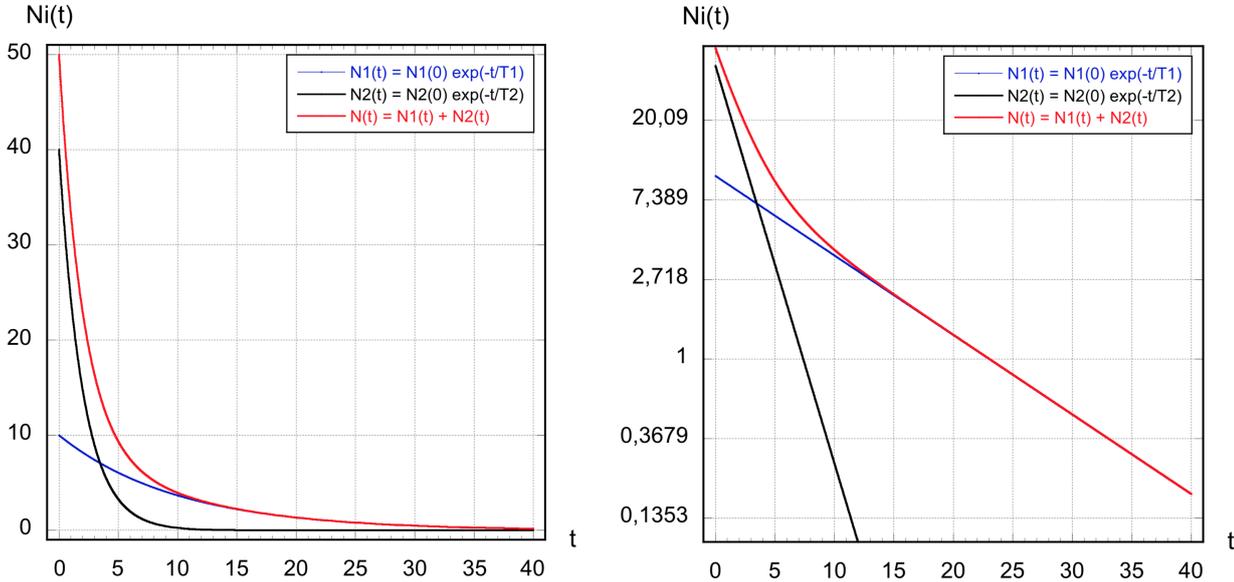


Figura 4.4: A sinistra, in scala lineare, gli andamenti di  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$  e la loro somma, nell'ipotesi che  $N_1(0) = 10$ ,  $N_2(0) = 40$ ,  $\tau_1 = 10$  e  $\tau_2 = 10$ ; a destra lo stesso in scala semi-logaritmica.

ovvero per  $t \geq t'$  con  $t' \gg \tau_1$ , si dovrebbe ottenere una legge

$$N_2^{(fit)}(t) = N_2^{(fit)}(0) e^{-t/\tau_2^{(fit)}}$$

in grado di riprodurre la corretta legge di decadimento  $N_2(0) e^{-t/\tau_2}$  tanto meglio quanto più vale  $t' \gg \tau_1$ , ovviamente sempre che per  $t \geq t'$  ci siano a disposizione abbastanza valori sperimentali sui quali fare un fit affidabile.

In quest'ipotesi si può dunque sottrarre a  $N_*^{(sp)}(t_i)$  per ogni valore di  $t_i$ , quanto dato da  $N_2^{(fit)}(t_i)$ , e quanto resta,  $N_1^*(t_i)$ , dovrebbe essere compatibile con la distribuzione dovuta ai decadimenti della sola sostanza 1:

$$\left[ N_*^{(sp)}(t_i) - N_2^{(fit)}(t_i) \right] \propto N_1^*(t_i) \approx N_1(t_i)$$

Effettuando quindi un fit sui valori rappresentati da  $N_1^*(t_i)$  si ottengono stime anche per  $N_1(0)$  e per  $\tau_1$ .

- Il caso  $\tau_2 \ll \tau_1$  è chiaramente simmetrico a quello ora discusso.

Un fattore che influenza quanto bene la procedura permetta di risalire a stime di  $N_1(0)$ ,  $N_2(0)$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  è il rapporto  $N_1/N_2$ , peraltro non conoscibile a priori.

## 4.2 Decadimento radioattivo di più sostanze

Una sostanza radioattiva può come detto decadere in un'altra anch'essa radioattiva e in tal caso le due si dicono in relazione genetica, con la prima chiamata *genitore* e la seconda *figlia*. Ciò può estendersi a molte "generazioni".

Si supponga di avere al tempo  $t = 0$ ,  $N_1(0)$  ed  $N_2(0)$  atomi delle sostanze radioattive (1) e (2), in relazione genetica. Se ne vogliono trovare le quantità  $N_1(t)$  ed  $N_2(t)$  presenti nel generico istante  $t$  successivo. La sostanza (1) decade secondo la legge

$$dN_1 = -N_1\lambda_1 dt \quad (4.11)$$

e per ogni suo atomo decaduto se ne forma uno della sostanza (2). Il numero di atomi della sostanza (2) quindi varia per due ragioni: da un lato diminuisce per i decadimenti spontanei degli atomi della sostanza (2), dall'altro cresce per effetto della formazione di atomi della sostanza (2) come prodotto del decadimento di atomi della sostanza (1). La variazione totale risultante è quindi:

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad (4.12)$$

con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  le costanti di decadimento delle due sostanze.

Per una terza sostanza derivante dal decadimento di (2) si ha, in modo analogo:

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \quad (4.13)$$

e così via.

Considerando  $k$  diverse generazioni in cascata si ha un sistema di  $k$  equazioni differenziali che può essere risolto ponendo:

$$\begin{cases} N_1 = a_{11}e^{-\lambda_1 t} \\ N_2 = a_{21}e^{-\lambda_1 t} + a_{22}e^{-\lambda_2 t} \\ \dots \\ N_k = a_{k1}e^{-\lambda_1 t} + a_{k2}e^{-\lambda_2 t} + \dots + a_{kk}e^{-\lambda_k t} \end{cases} \quad (4.14)$$

Le costanti  $a_{ij}$  vanno determinate in modo che le [4.14](#) soddisfino le equazioni differenziali e le condizioni iniziali  $N_i(0)$ . Sostituendo le [4.14](#) in [4.11](#), [4.12](#),

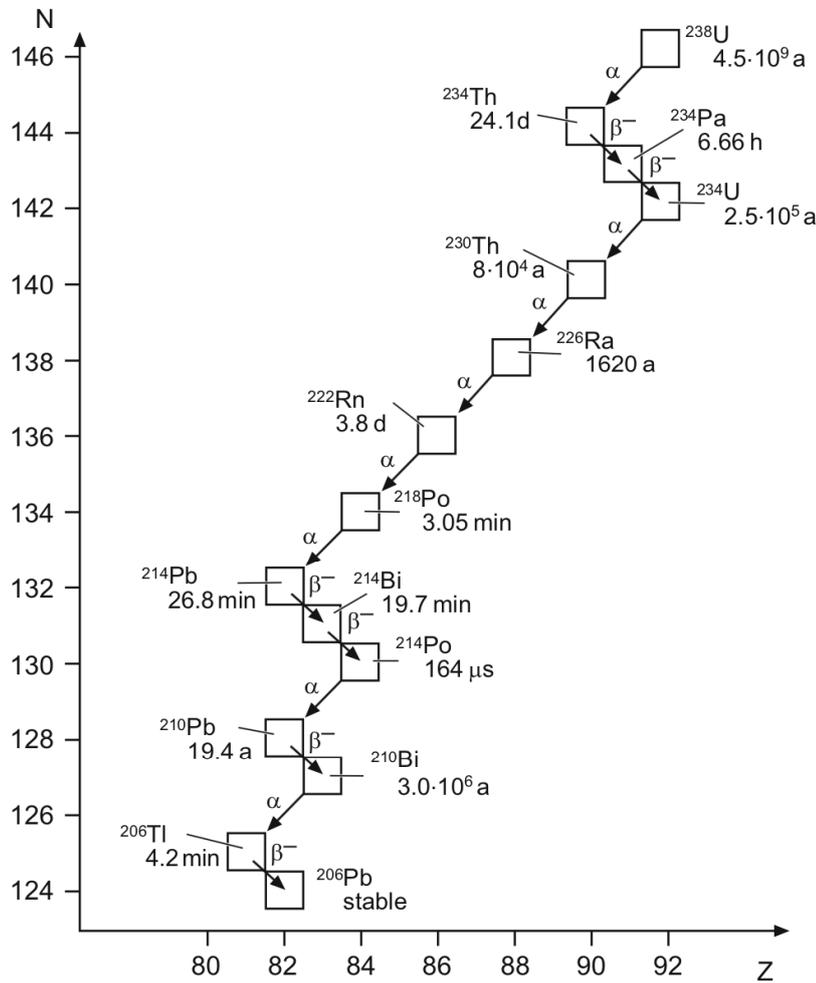


Figura 4.5: Famiglia radioattiva naturale dell'U<sup>238</sup>.

**4.13**, ecc. si ottiene la seguente formula di ricorrenza, valida per i coefficienti  $a_{ij}$  con indici  $i \neq j$

$$a_{ij} = a_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{(\lambda_1 - \lambda_j)(\lambda_2 - \lambda_j) \dots (\lambda_i - \lambda_j)} a_{11} \quad (4.15)$$

I coefficienti con indici uguali si ricavano dalla condizione

$$N_i(0) = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ik} \quad (4.16)$$

Nel caso vi siano costanti di disintegrazione  $\lambda$  fra loro uguali, la **4.14** va modificata sostituendo, agli esponenziali con ugual valore di  $\lambda$ , termini della forma  $te^{-\lambda t}$ ,  $t^2 e^{-\lambda t}$ , ... .

Ogni espressione della **4.14** contiene una somma d'esponenziali in cui compaiono le costanti di disintegrazione di tutte le sostanze che precedono quella

considerata.

Alcuni casi specifici di condizioni iniziali hanno notevole importanza pratica. Si consideri il caso in cui all'inizio è presente la sola sostanza 1 con  $N_1(0)$  atomi. Applicando direttamente le [4.14](#), [4.15](#) e [4.16](#) si ha, procedendo fino alla terza generazione

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\ N_3(t) = N_1(0)\lambda_1\lambda_2 \left[ \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right] \end{cases} \quad (4.17)$$

Si consideri ora l'andamento col tempo delle attività di due sostanze radioattive, un genitore (1) e una sostanza figlia (2), di una stessa catena radioattiva  $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t)$  e si determini l'istante  $t_{1,2}^*$  in cui le due attività combaciano.

Ciò implica, in base alla [4.6](#)

$$\lambda_1 N_1(t) = \lambda_2 N_2(t) \quad (4.18)$$

e sostituendo dalla [4.17](#)

$$\lambda_1 N_1(0)e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

da cui

$$t_{1,2}^* = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (4.19)$$

L'istante in cui l'entità della sostanza figlia ha il suo massimo si ottiene uguagliando a zero la variazione temporale della quantità di sostanza figlia

$$dN_2(t)/dt = N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}) = 0$$

da cui infine

$$t_{max} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (4.20)$$

Quindi ne deriva l'interessante risultato che nel caso sia presente ad un istante iniziale una sola sostanza radioattiva, la sostanza figlia raggiunge il massimo della sua entità allo stesso istante in cui la sua attività coincide con quella della sostanza genitore,  $t_{max} = t_{1,2}^*$ .

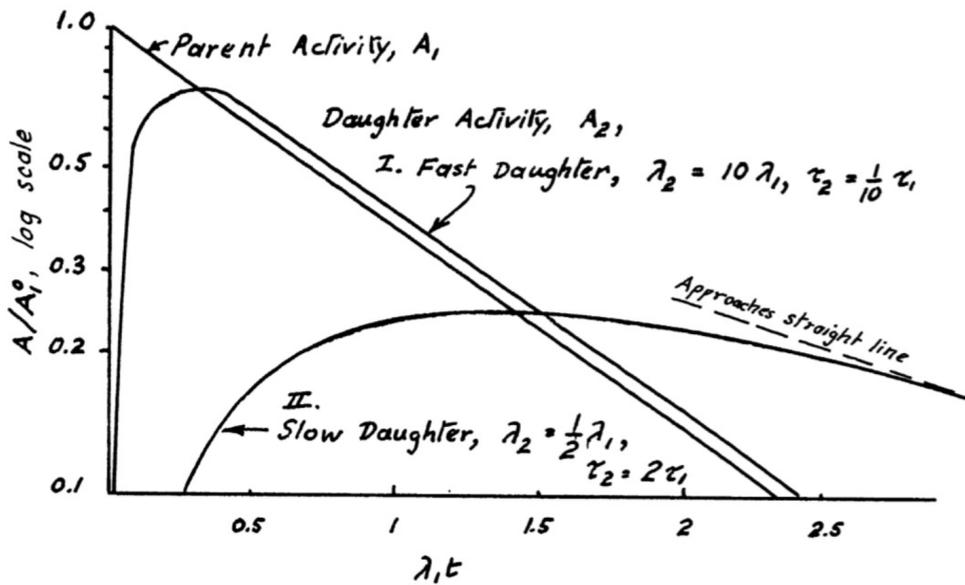


Figura 4.6: Ratei di decadimento di particelle figlie con probabilità di decadimento minore o maggiore di quella di uno stesso genitore.

Si consideri ora la catena radioattiva  $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t) \xrightarrow{\lambda_2} N_3(t)$  e si faccia sempre riferimento ai risultati presentati nelle [4.17](#), supponendo però che la sostanza di terza generazione sia stabile, ovvero  $\lambda_3 = 0$ . In tal caso

$$N_3(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right) \quad (4.21)$$

Si vedano ora quattro casi notevoli.

1. Supponendo dapprima  $\lambda_1 > \lambda_2$ , si ha che dopo un tempo  $t$  abbastanza lungo, per cui  $t \gg 1/\lambda_1$ , si può trascurare il primo esponenziale in parentesi per  $N_2(t)$  dalle [4.17](#), ottenendo

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \quad (4.22)$$

il che mostra come in questo caso, per tempi  $t > t_{max}$ , la sostanza figlia (2) proceda decadendo sostanzialmente secondo la propria costante di decadimento  $\lambda_2$ , quindi secondo la propria vita media  $\tau_2$ .

2. Se invece si suppone  $\lambda_1 < \lambda_2$ , si ha che dopo un tempo  $t$  abbastanza lungo, per cui  $t \gg 1/\lambda_2$  e quindi anche  $t > t_{max}$ , si può trascurare il secondo esponenziale in parentesi per  $N_2(t)$  dalle [4.17](#), ottenendo

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \quad (4.23)$$

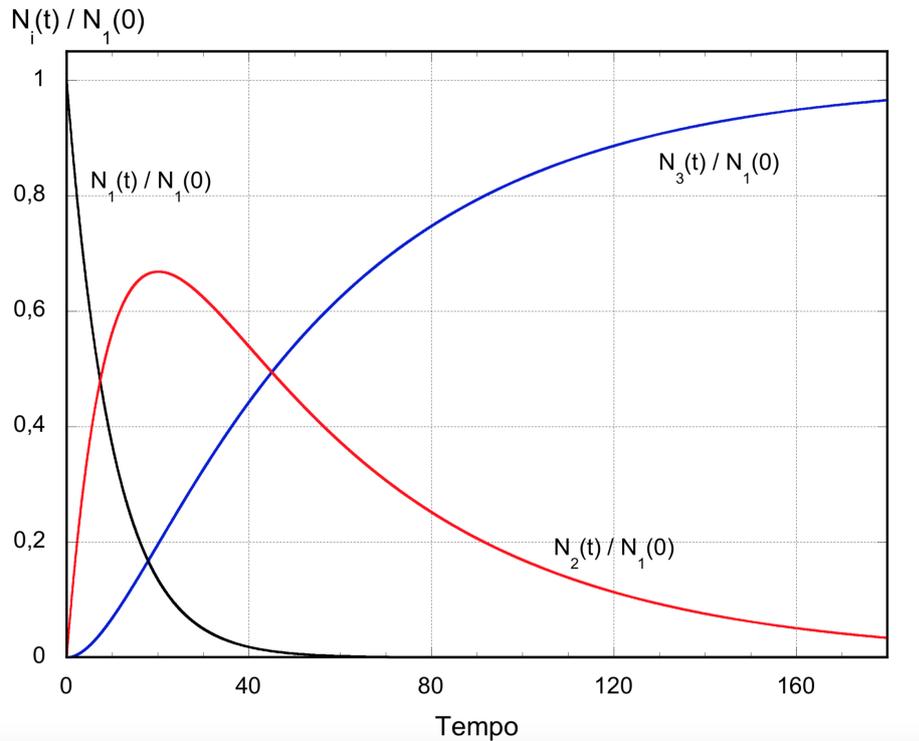


Figura 4.7: Esempio di una serie radioattiva con tre membri, di cui all'inizio è presente solo il genitore, l'ultimo è stabile e quello intermedio ha una vita media cinque volte superiore a quella del genitore

che mostra come in questo caso la sostanza figlia (2) proceda decedendo sostanzialmente secondo la costante di decadimento  $\lambda_1$  della sostanza genitore, quindi secondo la vita media  $\tau_1$ .

Ciò risulta comprensibile riflettendo sul fatto che essendo lento il rateo di decadimento della sostanza (1) rispetto a quello della sostanza (2), lo è anche quello di formazione della sostanza (2), che però decade poi rapidamente subito dopo essersi formata.

Moltiplicando per  $\lambda_2$  i due termini della [4.23](#) si ottiene, per il rateo di decadimenti della sostanza (2), ovvero per la sua attività  $\mathcal{A}_2(t)$

$$\mathcal{A}_2(t) = \lambda_2 N_2(t) \cong \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathcal{A}_1(t) \quad (4.24)$$

- Supponendo ora  $\lambda_1 \ll \lambda_2$ , dalla [4.24](#) e sempre per tempi  $t > t_{max}$ , si ha  $\mathcal{A}_2(t) \cong \mathcal{A}_1(t)$ , individuando quello che viene detto un *equilibrio transiente* fra le attività degli elementi (1) e (2), con un rapporto sostanzialmente costante fra esse:  $\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1 \cong \lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) \cong 1$ .

4. Se ora, oltre a considerare  $\lambda_1 \ll \lambda_2$  si suppone anche  $\lambda_1 \cong 0$ , e si considerano tempi  $t$  tali che  $1/\lambda_1 \gg t \gg 1/\lambda_2$ , allora

$$\begin{cases} N_1(t) \cong N_1(0) \\ N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases} \quad (4.25)$$

da cui:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1(t) \cong \mathcal{A}_1(0) \\ \mathcal{A}_2(t) \cong \mathcal{A}_1(0) (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases} \quad (4.26)$$

Si è quindi in presenza di un'attività molto piccola e quasi costante  $\mathcal{A}_1(t)$ . L'attività  $\mathcal{A}_2(t)$  tende all'equilibrio per tempi  $t \gg \lambda_2^{-1}$ , quando  $e^{-\lambda_2 t} \rightarrow 0$  e  $\mathcal{A}_2(t) \rightarrow \mathcal{A}_1(0)$ , quindi in regime di quasi saturazione, ovvero di quasi equilibrio (Figura [9.5](#)).

L'effettivo equilibrio richiederebbe d'altronde  $dN_1(t)/dt = 0$ , ed estendendo di nuovo al caso di una generica catena radioattiva con  $k$  decadimenti successivi, ciò implicherebbe l'uguaglianza di tutte le attività

$$\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_2(t) = \mathcal{A}_3(t) = \dots = \mathcal{A}_k(t) \quad (4.27)$$

Questa condizione non può però essere effettivamente raggiunta in quanto l'aver  $dN_1(t)/dt = 0$  significherebbe che la sostanza genitore è stabile, con  $\lambda_1 = 0$  e  $\tau_1 = \infty$ . È d'altronde possibile conseguire una condizione tanto più prossima a quella dell'effettivo equilibrio quanto più lentamente decade la sostanza genitore rispetto ad ogni sostanza figlia della catena radioattiva. In tal caso, col crescere del tempo  $t$ , si tende alla condizione

$$N_1(t)\lambda_1 = N_2(t)\lambda_2 = N_3(t)\lambda_3 = \dots = N_k(t)\lambda_k \quad (4.28)$$

detta di *equilibrio secolare*. Essa risulta infatti applicabile soltanto quando un materiale, contenente tutti i prodotti di decadimento provenienti da una sostanza genitore, è stato lasciato indisturbato per un tempo sufficientemente lungo da permettere il conseguimento della suddetta condizione di equilibrio.

L'equilibrio può essere raggiunto anche nel caso in cui la sostanza genitore venga prodotta nel tempo con un rateo di produzione  $\mathcal{R}$  uguale al suo rateo di decadimento  $\lambda N(t)$ . Un caso del genere si può avere ad esempio bombardando un campione di sostanza i cui nuclei siano stabili, con un fascio di particelle che inducano un numero di trasmutazioni su  $\mathcal{R}$  atomi/s verso un elemento radioattivo che poi decada con una costante  $\lambda$ . Questo procedimento è in pratica utilizzato per produrre elementi radioattivi sfruttando ad esempio neutroni provenienti da reattori o fasci di particelle prodotti in acceleratori.

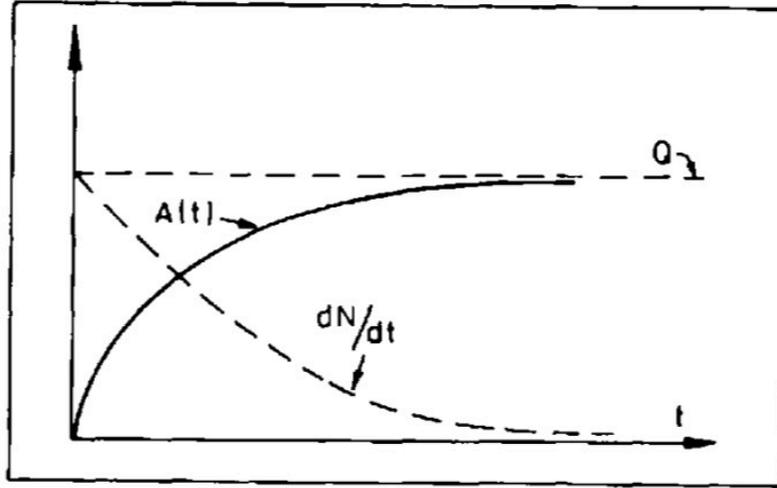


Figura 4.8: Equilibri asintotici fra ratei di produzione e attività.

La variazione del numero  $N(t)$  di nuclei radioattivi presenti si ottiene dal bilanciamento fra il rateo  $\mathcal{R}$  di formazione e il rateo  $-\lambda N(t)$  di decadimento:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mathcal{R} - \lambda N(t) \quad (4.29)$$

che se  $\mathcal{R} = \text{cost.}$ , si può riscrivere ridefinendo e quindi separando le variabili:

$$\frac{d[\mathcal{R} - \lambda N(t)]}{\mathcal{R} - \lambda N(t)} = -\lambda dt \quad (4.30)$$

Integrandola, nell'ipotesi che all'istante iniziale  $t = 0$  si abbiano  $N(0) = 0$  nuclei, si ottiene

$$\mathcal{R} - \lambda N(t) = [\mathcal{R} - \lambda N(0)] e^{-\lambda t} \implies N(t) = \frac{\mathcal{R}}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (4.31)$$

da cui

$$\mathcal{A}(t) = \lambda N(t) = \mathcal{R} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (4.32)$$

che rappresenta un andamento a saturazione, tipico dei casi in cui formazione e decadimento sono in competizione. In figura 9.5 sono schematicamente illustrati l'attività  $\mathcal{A}(t) \equiv \lambda N(t)$ , o rateo di decadimento radioattivo, e la variazione temporale del numero di nuclei genitori  $dN(t)/dt$ , per un sistema con un rateo di formazione di  $\mathcal{R}$  atomi/s.

Se il tempo d'irraggiamento del campione è piccolo rispetto alla vita media ( $t \ll \tau$ ) si può espandere l'esponenziale fino al termine lineare in  $t$  per cui  $\mathcal{A}(t) \simeq \mathcal{R}\lambda t$ , con l'attività che cresce ad un rateo praticamente costante. Per brevi tempi d'irraggiamento l'accumulo di nuclei prodotti è quindi

praticamente lineare nel tempo e non viene significativamente intaccato dai decadimenti.

Per tempi lunghi rispetto a  $\tau$  l'esponenziale tende a 0 e l'attività si mantiene approssimativamente costante

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{R} , \quad \text{per } t \gg \tau \quad (4.33)$$

È la condizione in cui la nuova "attività" è prodotta circa con lo stesso rateo al quale la vecchia scompare, ed è un esempio di equilibrio secolare.

S'osservi che se si irradia un campione per un certo tempo e poi lo si toglie dalla zona d'irraggiamento, da quel momento esso mostrerà una diminuzione dell'attività con andamento esponenziale decrescente. Per produrre un campione utilizzabile è quindi sufficiente irradiare per un tempo dell'ordine di  $2 \div 3$  vite medie.

### 4.3 Tecniche radioattive di datazione

Le tecniche di datazione basate sui decadimenti radioattivi permettono di ottenere le informazioni più attendibili in merito alle valutazioni dei tempi assoluti delle epoche geologiche. Le sostanze comunemente utilizzate per questi scopi sono l'uranio e i suoi isotopi, il torio, il potassio e il rubidio.

La storia iniziale del pianeta Terra non è nota, ma ad un certo punto le rocce raggiunsero la loro composizione attuale, cristallizzandosi e differenziando i loro diversi componenti minerali. Un processo di metamorfosi, seppur lento, è tutt'ora in atto. La datazione radioattiva si riferisce sostanzialmente alla possibilità di determinare il tempo di formazione dei minerali, ovvero la loro età. Una roccia che al momento della sua formazione contenesse ad esempio una certa quantità di uranio, ha accumulato nel tempo trascorso, elio prodotto dal decadimento dell'uranio. Ogni atomo di  $^{238}\text{U}$  che si trasforma in  $^{206}\text{Pb}$  emette infatti otto particelle  $\alpha$ , ovvero otto nuclei di elio, che se non sfuggono dalla roccia permettono di datare quest'ultima dalla valutazione fra l'uranio ancora presente e l'elio nel frattempo accumulato. Anche il torio permette di attuare un procedimento simile.

Particolare attenzione va posta nel verificare che l'elio e l'uranio non siano sfuggiti dai campioni in analisi durante la storia della roccia, cosa peraltro frequente per quanto concerne l'elio. Il rapporto uranio/piombo è anche utilizzabile e risente meno dei problemi che caratterizzano l'elio<sup>3</sup>, dovuti a diffusione o fuga dalle rocce. Si utilizzano inoltre anche i rapporti  $^{206}\text{Pb}/^{207}\text{Pb}$ ,  $\text{K}/\text{Ar}$  e  $^{87}\text{Rb}/^{87}\text{Sr}$ .

---

<sup>3</sup>La molecola di elio è monoatomica e molto piccola, da cui l'estrema facilità per l'elio di sfuggire da materiali in cui sia presente o sia stato assorbito.

Si veda ora come implementare questa tecnica, considerando che la si vuole applicare a decadimenti che si sviluppano su tempi geologici ( $\sim 10^9$  y) per i quali non si è in grado di misurare direttamente l'attività in funzione del tempo. Quanto si fa in tali casi è utilizzare i numeri relativi di nuclei genitori e figli osservati al tempo  $t_1$  (oggi) in un campione di materiale, confrontandoli con i numeri relativi al tempo  $t_0$ , quando il materiale in studio si è cristallizzato a costituire la roccia (minerale) intrappolando i nuclei genitori nella loro "posizione" attuale.

Dato il decadimento dell'isotopo (nucleo/atomo) genitore G nell'isotopo (nucleo/atomo) figlio F, bisogna semplicemente *contare*, ad esempio con metodi chimici, gli attuali numeri di atomi G ed F,  $N_G(t_1)$  e  $N_F(t_1)$ ; se null'altro tranne il decadimento radioattivo ha agito a partire dal tempo  $t_0$  nel modificare  $N_G(t)$  ed  $N_F(t)$ , allora supposto che al tempo  $t_0$  della formazione non vi fosse ancora presenza di nuclei figli, cioè  $N_F(t_0) = 0$ , si ha

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_G(t_0) \quad (4.34)$$

e ancora

$$N_G(t_1) = N_G(t_0) e^{-\lambda(t_1-t_0)} \quad (4.35)$$

da cui

$$\Delta t \equiv t_1 - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left[ \frac{N_G(t_0)}{N_G(t_1)} \right] = \frac{1}{\lambda} \ln \left[ 1 + \frac{N_F(t_1)}{N_G(t_1)} \right] \quad (4.36)$$

Noti quindi la costante di decadimento  $\lambda$  del nucleo genitore, misurabile in laboratorio, e il rapporto attuale fra abbondanza di nuclei genitori e figli, si ottiene l'età del campione in studio con una precisione dipendente da quella con cui è nota  $\lambda$  e dalla statistica di conteggio per  $N_G$  ed  $N_F$ .

Nelle relazioni [4.34](#) e [4.35](#) sono implicite delle assunzioni che devono essere accuratamente verificate prima di applicare la relazione [4.36](#) alla determinazione dell'età di un campione. La [4.34](#) assume infatti, come detto, che  $N_F(t_0) = 0$ , e anche che nel tempo intercorso dalla formazione del campione fino ad oggi non si siano verificati fenomeni che hanno portato a modificare il numero totale di atomi presenti, variando il rapporto genitori/figli, se non per quanto dovuto al processo di decadimento radioattivo.

La [4.35](#) assume che la variazione di  $N_G$  dipenda soltanto dal decadimento e che quindi non vengano introdotti ulteriori atomi genitori né da altri, diversi e concomitanti, fenomeni di decadimento, né da reazioni nucleari, come ad esempio quelle inducibili da raggi cosmici.

Si può modificare la procedura per l'ottenimento di  $\Delta t$  tenendo conto anche dell'eventuale numero di nuclei/atomii figli  $F$  già presenti nel campione all'istante  $t_0$  della sua formazione, anche se al momento  $t_1$  dell'analisi del campione non si può dire quali atomi figli siano derivati dal decadimento durante il tempo  $\Delta t$  e quali ci fossero fin dall'inizio.

Si supponga che al tempo  $t_0$  siano già presenti  $N_F(t_0)$  nuclei figli, ad esempio formati da decadimenti del genitore in tempi precedenti  $t_0$  o comunque inglobati nel campione al momento  $t_0$  della sua formazione. La [4.34](#) diventa in questo caso

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_F(t_0) + N_G(t_0) \quad (4.37)$$

La quantità  $N_F(t_0)$  non è però nota e questo non permette quindi di ottenere  $\Delta t$ . Se tuttavia nel campione è presente anche un diverso isotopo  $F'$  della specie figlia, che sia stabile e non proveniente dal decadimento di un genitore con lunga vita media, si può comunque risalire all'età del campione. Indicata con  $N_{F'}$  la popolazione dell'isotopo  $F'$ , il fatto che esso sia stabile implica  $N_{F'}(t_1) = N_{F'}(t_0)$ , da cui

$$\frac{N_F(t_1) + N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_F(t_0) + N_G(t_0)}{N_{F'}(t_0)} \quad (4.38)$$

che diventa

$$\frac{N_F(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} [e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1] + \frac{N_F(t_0)}{N_{F'}(t_0)} \quad (4.39)$$

I rapporti  $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$  e  $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$  possono essere misurati in laboratorio ma resta sempre incognito il rapporto isotopico  $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$ . Avviene che minerali che cristallizzano secondo una comune origine dovrebbero mostrare uguali età e anche uguali rapporti isotopici  $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$ , anche se in essi il numero  $N_G(t_0)$  degli stessi atomi genitori può essere molto diverso, ad esempio per la diversa composizione chimica.

Supponendo corretta quest'ipotesi ci si attende al momento della misura, ovvero al tempo  $t_1$ , di osservare minerali con diversi rapporti  $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$  e  $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$ , corrispondenti ad una medesima coppia di valori  $\Delta t$  e  $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$ .

Questa ipotesi può essere analizzata graficando  $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$  rispetto a  $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$ : per svariati minerali la [4.39](#) mostra infatti una dipendenza lineare fra i rapporti, con pendenza data da  $[e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1]$  e intercetta  $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$ .

Un esempio, relativo al decadimento  $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr}$  ( $T_{1/2} = 4.8 \times 10^{10}$  y), confrontato con l'isotopo stabile  $^{86}\text{Sr}$ , è illustrato in figura [4.9](#). La buona linearità della regressione sui punti sperimentali suffraga l'ipotesi che non vi siano state perdite di nuclei genitori o figli.

Le rocce terrestri superficiali più vecchie datate con tali metodi hanno un'età di  $4.374 \times 10^9 \pm 0.006 \cdot 10^9$  anni e sono costituite da granuli di zircone scoperti in Australia, nella regione di Jack Hills, nel 2013. Il risultato, compatibile con l'età dei frammenti di meteoriti più antichi analizzati, suggerisce che la crosta terrestre si sia formata circa 100 milioni di anni dopo il gigantesco impatto che potrebbe aver dato origine alla Luna.

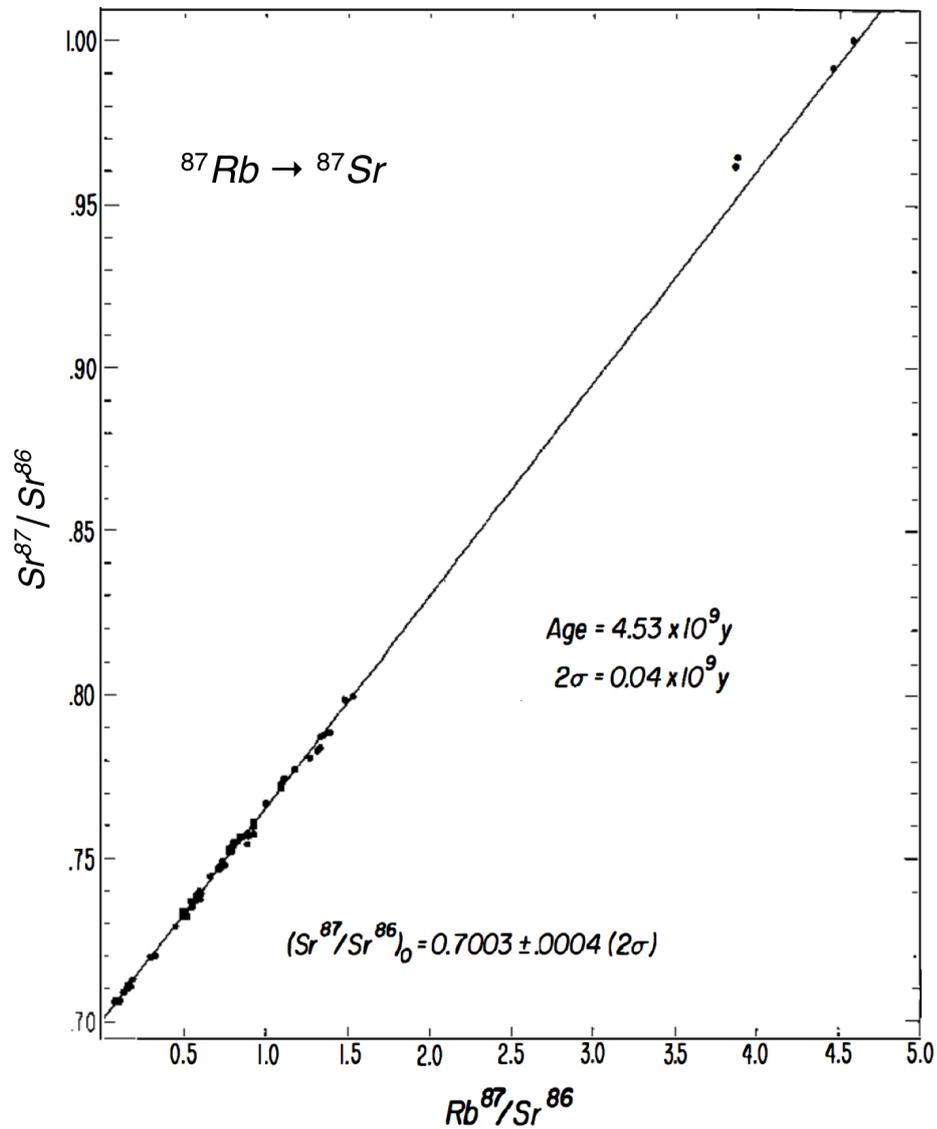


Figura 4.9: Tecnica di datazione Rb-Sr, tratto da G.W. Wertherill, Ann. Rev. Nucl. Sci. 25 (1975) 283.

Per datazioni di campioni più giovani, come quelli di materiali di tipo organico, il metodo che fa uso dell'isotopo radioattivo  $^{14}\text{C}$  del Carbonio è il più utilizzato.

Una struttura organica vivente assorbe anidride carbonica,  $\text{CO}_2$ , e il contenuto in carbonio di quest'ultima è costituito quasi interamente da  $^{12}\text{C}$  (98.89%), mescolato ad una piccola percentuale di  $^{13}\text{C}$  (1.11%).

Il  $^{14}\text{C}$  radioattivo, che decade  $\beta^-$  in  $^{14}\text{N}$  con una vita media  $\tau = 8267$  an-

ni, è continuamente formato negli strati alti dell'atmosfera per effetto della cattura, da parte dell'azoto atmosferico, dei neutroni termici quali prodotti secondari del bombardamento dei raggi cosmici. L'equilibrio dinamico che si instaura fra produzione e decadimento, supposti stabili la struttura chimica e in densità media dell'atmosfera, oltrechè il flusso di raggi cosmici che la investe, mantengono costante la concentrazione di  $^{14}\text{C}$  nell'atmosfera stessa. Il  $^{14}\text{C}$  così prodotto con un rateo  $\mathcal{R}(^{14}\text{C})$ , reagisce con l'ossigeno per dare anidride carbonica  $^{14}\text{CO}_2$  che viene riutilizzata dalle piante durante la fotosintesi clorofilliana.

Con questo meccanismo il  $^{14}\text{C}$  si trasferisce quindi nei composti organici e attraverso la catena alimentare è presente in ogni struttura vivente secondo un preciso rapporto (abbondanza isotopica), pari a circa 1.3 atomi di  $^{14}\text{C}$  ogni  $10^{12}$  atomi di  $^{12}\text{C}$ . Tutta la materia vivente è dunque leggermente radioattiva in funzione del suo contenuto di  $^{14}\text{C}$ .

Supposto che il rateo di produzione di  $^{14}\text{C}$  da parte dei raggi cosmici si mantenga relativamente costante<sup>4</sup>, ne consegue che la materia organica, se vive sufficientemente a lungo, raggiunge l'equilibrio del suo contenuto di  $^{14}\text{C}$  con quello dell'atmosfera

$$\frac{dN(^{14}\text{C})}{dt} = 0 \quad \implies \quad \mathcal{R}(^{14}\text{C}) = \lambda(^{14}\text{C}) N(^{14}\text{C}) \quad (4.40)$$

e tramite il metabolismo lo mantiene sino alla morte, momento a partire dal quale smette di assumere  $^{14}\text{C}$  e quindi di essere in equilibrio, per il suo contenuto, con il  $^{14}\text{C}$  atmosferico. Dal momento della morte dell'organismo il suo contenuto di  $^{14}\text{C}$  decresce quindi secondo la legge del decadimento radioattivo.

Si può dunque determinare l'età di un campione organico a partire dal momento della morte dell'organismo cui esso è appartenuto, misurando l'attività per grammo di carbonio in esso contenuto, detta *attività specifica* ( $\mathcal{A}_{sp}$ ), e confrontandola con l'attività specifica del carbonio atmosferico, pari a circa 0.23 Bq/g, ovvero 13.8 disintegrazioni/g al minuto.

Detto  $t_0$  il tempo della morte dell'organismo, e  $t_1$  il tempo della misura, si ha, per l'età  $\Delta t = (t_1 - t_0)$  del campione

$$\mathcal{A}_{sp}(^{14}\text{C}, t_1) = \mathcal{A}_{sp}(^{14}\text{C}, t_0) e^{-\lambda(t_1 - t_0)} \quad (4.41)$$

da cui:

$$\Delta t \equiv (t_1 - t_0) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\mathcal{A}_{sp}(^{14}\text{C}, t_0)}{\mathcal{A}_{sp}(^{14}\text{C}, t_1)} \quad (4.42)$$

I metodi di datazione che sfruttano l'attività danno affidamento fino a tempi sostanzialmente non superiori a  $7 \times \tau$ , quindi con il  $^{14}\text{C}$  si possono ottenere

---

<sup>4</sup>Il livello di  $^{14}\text{C}$  in atmosfera è variato significativamente nel tempo, per motivi naturali e "umani", come ad esempio nel XX secolo per gli esperimenti con ordigni nucleari. Per ottenere datazioni affidabili bisogna dunque ricorrere a metodi complementari, che affiancano e complementano quello del radiocarbonio

datazioni di una certa attendibilità fino a tempi inferiori a circa  $6 \times 10^4$  y.  
Si può fare ancor meglio utilizzando la tecnica della spettrometria di massa

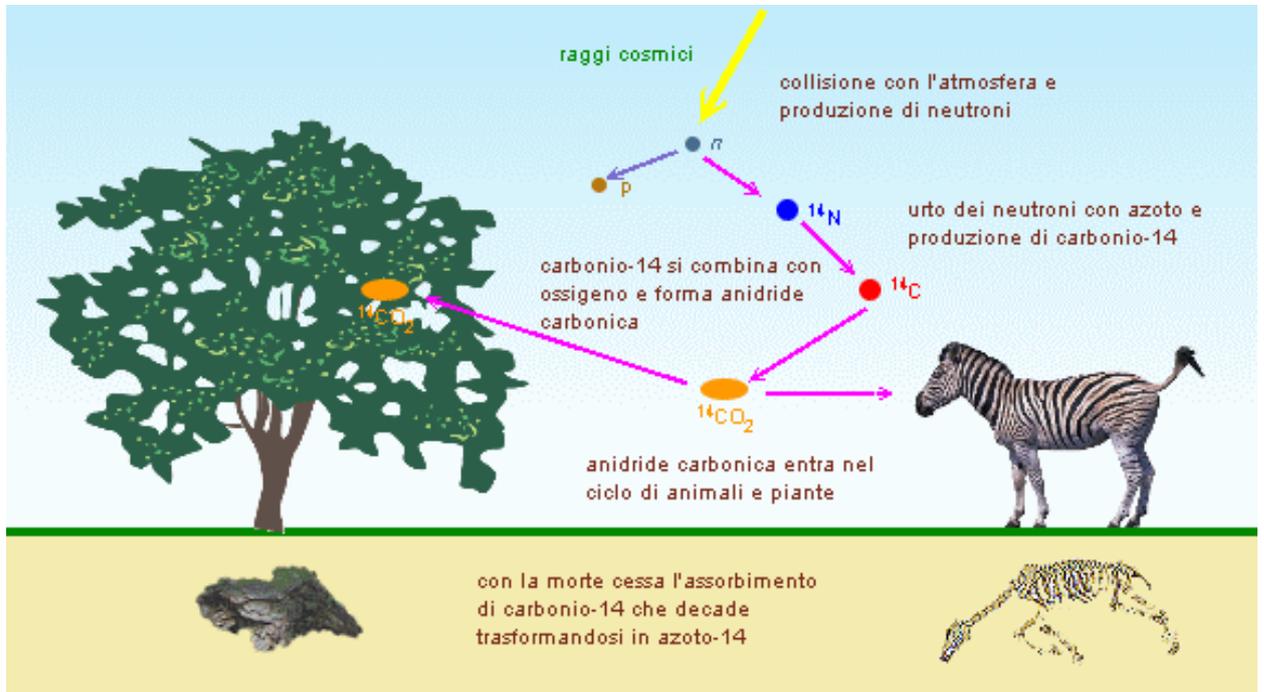


Figura 4.10: Schematizzazione del ciclo del  $^{14}\text{C}$ .

con acceleratore (AMS) che permette di contare direttamente il numero di atomi sia di  $^{14}\text{C}$  che anche di altri isotopi, presenti in un campione.

## Capitolo 5

# Decadimenti nucleari

### 5.1 Generalità

Un nucleo  ${}^A_Z X$  si dice *stabile* rispetto al decadimento

$${}^A_Z X \longrightarrow {}^{A-A'}_{Z-Z'} X + \sum_{i=1}^n {}^{A^i}_{Z^i} b \quad (5.1)$$

con  $\sum_{i=1}^n A^i = A'$  e  $\sum_{i=1}^n Z^i = Z'$ , se risulta negativa la differenza fra le masse

$$\Delta M_b(A, Z) = M_X(A, Z) - M_X(A - A', Z - Z') - \sum_{i=1}^n M_b(A^i, Z^i) \quad (5.2)$$

Se invece  $\Delta M_b > 0$ , il processo [5.1](#) ha luogo spontaneamente, a meno di vincoli legati al rispetto di leggi di conservazione.

Questo presuppone che gli  $n + 1$  prodotti del decadimento vengano emessi contemporaneamente. Non è però sempre così, soprattutto per  $n > 2$ . In quei casi ci si può trovare di fronte a catene di decadimenti sequenziali che partendo dai prodotti di un iniziale decadimento binario o ternario, ne coinvolgono poi alcuni in decadimenti successivi per cui, alla fine di tutto il processo, si possono avere molti prodotti come risultato del decadimento iniziale di un solo nucleo o particella, ma non tutti saranno stati emessi contemporaneamente. Lo studio di questi casi si può ricondurre a quello di decadimenti indipendenti, se si è in grado di risolvere la sequenza temporale con cui si manifestano.

Per decadimenti binari la quantità

$$E_b(A, Z) = \Delta M_b(A, Z)c^2 < 0 \quad (5.3)$$

è detta energia di legame di  ${}^{A'}_{Z'} b$  nel nucleo  ${}^A_Z X$ . L'opposto di  $E_b(A, Z)$ , detta energia di separazione, rappresenta l'energia minima che deve essere fornita al nucleo  ${}^A_Z X$  affinché esso emetta  ${}^{A'}_{Z'} b$ .

Quindi, equivalentemente a quanto visto sopra, se  $E_b(A, Z) > 0$ , il processo avviene spontaneamente, e i termini a destra della freccia nella [5.1](#) sono detti *prodotti del decadimento*.

La quantità totale di energia rilasciata in un decadimento è anche detta  $Q$ -valore del decadimento, e si ha quindi che un decadimento può aver luogo spontaneamente solo se  $Q > 0$ .

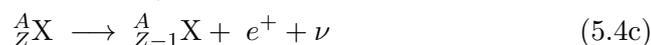
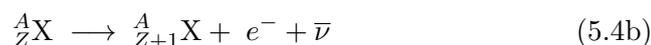
Dall'analisi dei valori sperimentali delle masse dei nuclidi naturali e di molti artificiali si trova, nel caso in cui  ${}^A_Z b$  sia un protone  $p$ , un neutrone  $n$  o un deutone  $d \equiv {}^2_1\text{H}$ , che vale sempre  $E_b(A, Z) < 0$ , ovvero il decadimento spontaneo [5.1](#) non può aver luogo, quindi le radioattività naturali *protonica*, *neutronica* e *deutonica* sono energeticamente proibite.

In alcuni casi si osserva la cosiddetta *emissione ritardata* di neutroni o di protoni, che hanno però luogo sempre immediatamente a ridosso dell'emissione di un elettrone, o di un positrone (o di una cattura K), conseguenti a un decadimento  $\beta$ .

Per alcuni nuclei pesanti si ha  $E_\alpha(A, Z) > 0$ , ed è quindi energeticamente possibile l'emissione spontanea di particelle  $\alpha$  da parte di quei nuclei pesanti. La grande energia di legame del nucleo di elio, pari a circa 28.3 MeV, rende inoltre la sua emissione da un nucleo pesante particolarmente favorevole, da un punto di vista energetico, rispetto a quella di altri frammenti nucleari leggeri.

Calcolando le energie di legame di protoni e neutroni, tramite la [5.3](#) si evidenzia che i nuclei con numero magico  $N^*$  di neutroni sono eccezionalmente stabili, in quanto le energie di legame per i loro protoni e neutroni sono maggiori di quelle calcolate per i nuclei con valori adiacenti di  $N$ .

Gli schemi di decadimento nucleare  $\alpha$  e  $\beta$  sono rispettivamente



Analizzando il diagramma  $Z - N$  si trova che il punto rappresentativo di un nucleo  $\beta$ -instabile si sposta lungo una linea isobarica verso il basso o verso l'alto, a seconda che venga emesso un positrone  $e^+$  o un elettrone  $e^-$ ; il punto rappresentativo di un nucleo  $\alpha$ -instabile si sposta invece nel punto di coordinate  $(N - 2; Z - 2)$ . Ciò è detto legge dello spostamento radioattivo. Si trova sperimentalmente che tutti i nuclei con  $Z > 82$  hanno almeno un nuclide  $\alpha$ -instabile. Fra i pochi nuclei  $\alpha$ -instabili con  $Z < 82$  ci sono il neodimio ( ${}^{144}_{60}\text{Nd}$ ), il samario ( ${}^{146}_{62}\text{Sm}$  e  ${}^{147}_{62}\text{Sm}$ ), il gadolinio ( ${}^{148}_{64}\text{Gd}$  e  ${}^{149}_{64}\text{Gd}$ ), il terbio ( ${}^{149}_{65}\text{Tb}$  e  ${}^{150}_{65}\text{Tb}$ ), l'afnio ( ${}^{174}_{72}\text{Hf}$ ), il platino ( ${}^{190}_{78}\text{Pt}$ ).

I nuclei  $\alpha$ -instabili  ${}^{238}_{92}\text{U}$ ,  ${}^{235}_{92}\text{U}$  e  ${}^{232}_{90}\text{Th}$  sono i capostipiti di tre serie radioattive ognuna delle quali, tramite una successione di decadimenti a catena  $\alpha$

e  $\beta$ , termina con un isotopo stabile del piombo.

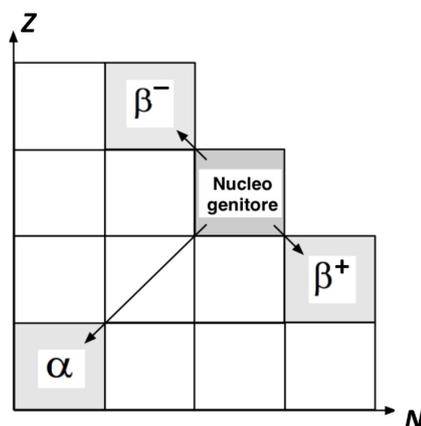


Figura 5.1: Legge dello spostamento radioattivo di Soddy-Fajans.

## 5.2 Radioattività $\alpha$

Fu Rutherford nel 1909 a scoprire che la radiazione  $\alpha$  è costituita da nuclei di elio: egli fece decadere sotto vuoto una sostanza radioattiva che emetteva particelle  $\alpha$  e analizzando poi il contenuto dell'ambiente originariamente vuoto trovò presenza di elio.

Il decadimento  $\alpha$  rappresenta quindi la disintegrazione di un nucleo genitore in un nucleo figlio e un nucleo di elio



e può essere considerato come una fissione spontanea del nucleo genitore (si veda il capitolo [13](#)) in due nuclei figli con masse fortemente asimmetriche. Esso è sostanzialmente dovuto all'azione concomitante delle forze nucleari attrattive e di quelle elettromagnetiche repulsive.

La sua importanza cresce al crescere del numero di massa  $A$ , in quanto la repulsione coulombiana, dipendendo da  $Z^2$ , cresce più rapidamente della forza di legame nucleare che dipende approssimativamente da  $A$  solo per nuclei leggeri per poi saturare al crescere di  $A$ .

Il decadimento  $\alpha$  si presta a molte applicazioni, alcune delle quali descritte in Appendice [D](#).

### 5.2.1 Energetica dei decadimenti $\alpha$

Per studiare l'energetica del processo si supponga il nucleo genitore inizialmente a riposo rispetto a un osservatore inerziale solidale col sistema del

laboratorio (SL), che in questo caso coincide con quello del centro di massa (CM); la conservazione dell'energia si esprime come

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + E_{k,Y} + M_\alpha c^2 + E_{k,\alpha} \quad (5.6)$$

con  $M_X$ ,  $M_Y$  ed  $M_\alpha$  le masse rispettivamente del nucleo genitore, di quello figlio e della particella  $\alpha$ ,  $E_{k,Y}$  ed  $E_{k,\alpha}$  le energie cinetiche del nucleo figlio e della particella  $\alpha$ .

Dalla [5.6](#) si ha

$$E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = (M_X - M_Y - M_\alpha) c^2 = \Delta M c^2 \equiv Q_\alpha \quad (5.7)$$

che viene detto  $Q$ -valore del decadimento  $\alpha$  e coincide con l'energia a disposizione della disintegrazione. Le energie in gioco sono tali da permettere, con buona approssimazione, l'utilizzo delle formule non relativistiche; le energie cinetiche del nucleo figlio e della particella  $\alpha$  sono quindi

$$E_{k,Y} = \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 \quad , \quad E_{k,\alpha} = \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 \quad (5.8)$$

con  $v_Y$  e  $v_\alpha$  le velocità del nucleo figlio e della particella  $\alpha$ . Avendo supposto il nucleo genitore a riposo, la conservazione dell'impulso implica che nucleo figlio e particella  $\alpha$  si muovano con impulsi opposti

$$M_Y v_Y = -M_\alpha v_\alpha \quad \text{da cui,} \quad v_Y = \frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha \quad (5.9)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} E_{k,Y} + E_{k,\alpha} &= \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} M_Y \left( \frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha \right)^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \\ &= \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 \left( \frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{da cui,} \quad E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = E_{k,\alpha} \left( \frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) = Q_\alpha \quad (5.10)$$

e ancora

$$E_{k,\alpha} = \frac{M_Y}{M_\alpha + M_Y} Q_\alpha \quad \text{ed} \quad E_{k,Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{k,\alpha} \quad (5.11)$$

Non potendo essere negativa l'energia cinetica della particella  $\alpha$  emessa nel decadimento, ne deriva che questo, per aver luogo, deve necessariamente essere un processo esotermico, ovvero

$$\Delta M \geq 0 \quad \text{e} \quad Q_\alpha \geq 0 \quad (5.12)$$

Nel caso di nuclei pesanti, con  $A \gg 1$ , la gran parte dell'energia liberata dal decadimento diventa energia cinetica della particella  $\alpha$ . Dalla seconda delle [5.11](#) si ha infatti in questo caso

$$E_{k,Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{k,\alpha} \ll E_{k,\alpha} \quad (5.13)$$

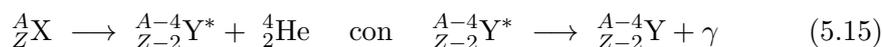
Ponendo  $(M_\alpha/M_Y) \simeq 4/(A-4)$  si ha

$$E_{k,\alpha} \approx \frac{A-4}{A} Q_\alpha \quad , \quad E_{k,Y} \approx \frac{4}{A} Q_\alpha \quad (5.14)$$

che permettono una rapida stima dell'energia rilasciata nel decadimento, nota che sia  $Q_\alpha$ . Nel seguito si ometterà per semplicità il pedice  $\alpha$ .

Trattandosi di un decadimento in due corpi osservato nel sistema del centro di massa del nucleo genitore, l'energia cinetica espressa dalla prima delle [5.11](#) e il modulo della velocità della particella  $\alpha$  emessa nel decadimento, dovrebbero assumere entrambi un unico valore.

Accurate misure in proposito hanno tuttavia evidenziato una struttura fine negli spettri energetici delle particelle  $\alpha$  emesse da materiali radioattivi per diversi possibili  $Q$ -valori. Le particelle  $\alpha$  del picco più intenso dello spettro sono prodotte da sole, mentre le altre sono sempre accompagnate dalla concomitante emissione di fotoni  $\gamma$ . Questo concorre a suggerire la presenza nei nuclei di livelli energetici e di una sottostante struttura di stati discreti. In tal caso quindi un nucleo genitore, decadendo  $\alpha$ , può trasformarsi nello stato fondamentale di un nucleo figlio emettendo una particella  $\alpha$  di energia corrispondente all'intero  $Q$ -valore disponibile, o può prima decadere in uno stato eccitato  ${}_{Z-2}^{A-4}Y^*$  del nucleo figlio emettendo una particella  $\alpha$  di energia inferiore all'intero  $Q$ -valore. Il nucleo figlio eccitato risultante potrà quindi decadere al proprio livello fondamentale emettendo fotoni  $\gamma$ , come ad esempio nel caso del torio  ${}^{228}\text{Th}$  che decade  $\alpha$  nel radio  ${}^{224}\text{Ra}$ , illustrato in figure [5.2](#).



Questo tipo di processo avviene raramente nei nuclei pari-pari, dato il loro ridotto  $Q$ -valore. Nei nuclei pari-dispari e dispari-dispari invece, è meno probabile che il nucleone spaiato prenda parte al processo di formazione della particella  $\alpha$ , per cui ha una maggior probabilità di trovarsi in un livello eccitato del nucleo figlio  $Y$ , dopo il decadimento  $\alpha$ .

La struttura fine dello spettro può essere determinata dalla misura delle energie cinetiche delle diverse particelle  $\alpha$  osservate in un particolare decadimento, confrontata con il corrispondente  $Q$ -valore disponibile.

$$Q_\alpha \approx E_{k,\alpha} + E_\gamma \quad (5.16)$$

La misura diretta delle energie dei fotoni  $\gamma$  associati conferma quindi l'esistenza nel nucleo di una struttura a stati energetici discreti.

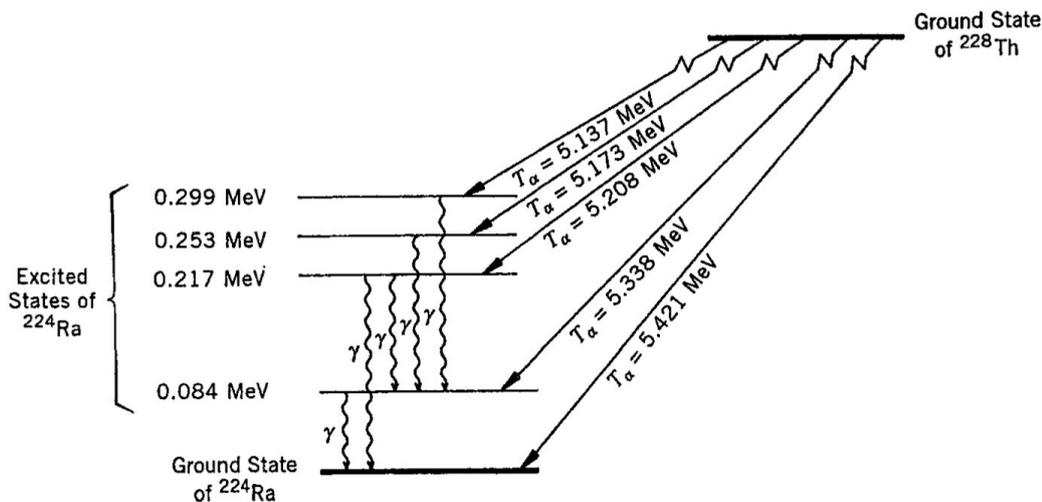


Figura 5.2: Struttura dello spettro di emissione  $\alpha$  del torio  $^{228}\text{Th}$ .

Talvolta si osserva l'emissione di particelle  $\alpha$  con energie maggiori di quelle corrispondenti alla transizione tra i due livelli fondamentali dei nuclei genitore e figlio, ed è dovuta a decadimenti che avvengono a partire da livelli eccitati del nucleo genitore.

### 5.2.2 Soglia di instabilità

Si vuole ora individuare per quali valori di  $A$  e  $Z$  il decadimento  $\alpha$  sia energeticamente possibile, tenendo conto del fatto che in ogni decadimento una parte dell'energia di massa del genitore è convertita in energia cinetica dei prodotti del decadimento.

Dato che la massa di un nucleo equivale alla somma delle masse dei nucleoni costituenti meno l'energia totale di legame divisa per  $c^2$ , e dato che nel decadimento  $\alpha$  i nucleoni non cambiano natura, si ha che il decadimento può aver luogo soltanto se accompagnato da un aumento dell'energia di legame per nucleone nei prodotti finali, rispetto al nucleo genitore.

Analizzando l'andamento dell'energia media di legame per nucleone  $\langle B \rangle \equiv |B/A|$  in funzione di  $A$ , come mostrata in figura 2.1, ed essendo il  $^{56}\text{Fe}$  il nuclide più stabile, ciò è possibile soltanto nella regione dove  $\partial\langle B \rangle/\partial A < 0$  e contemporaneamente  $A > 60$ .

Il  $Q$ -valore del decadimento  $\alpha$  espresso dalla 5.7 può essere scritto in termini delle energie medie di legame per nucleone  $\langle B \rangle_{X,Y,\alpha}$  dei nuclei coinvolti

$$\begin{aligned}
 Q &\equiv [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M_\alpha] c^2 = \\
 &= A(\langle B_Y \rangle - \langle B_X \rangle) - 4(\langle B_Y \rangle - \langle B_\alpha \rangle) > 0
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

Essendo  $\langle B_\alpha \rangle \simeq 7.1$  MeV l'energia media di legame di un nucleone nella particella  $\alpha$ , quindi minore di quelle per i nuclei pesanti coinvolti nel decadimento, ne segue che il secondo termine della [5.17](#) è positivo, da cui si ha che la soglia di instabilità deve essere decisamente superiore ad  $A = 60$ . Utilizzando la formula di Weizsäcker [2.55](#) a meno del termine d'accoppia-

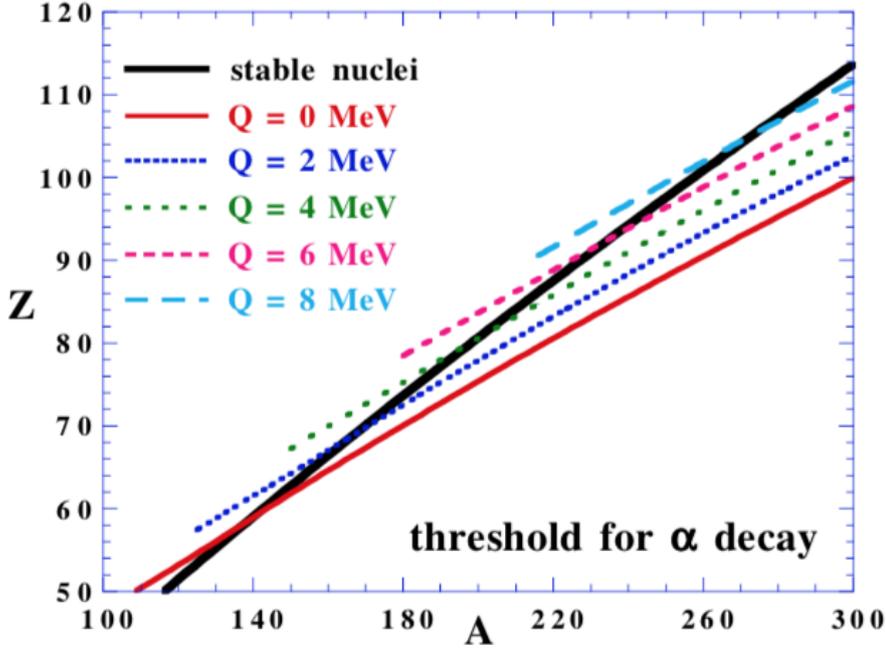


Figura 5.3: Linee di instabilità per il decadimento  $\alpha$ .

mento, ponendo  $Z(Z-1) \simeq Z^2$ , e sviluppando in serie troncando al primo membro, il calcolo del  $Q$ -valore dà

$$\begin{aligned}
 Q &= 4\langle B \rangle_\alpha - [A\langle B \rangle_X - (A-4)\langle B \rangle_Y] = B_\alpha - (B_X - B_Y) \simeq \\
 &\simeq B_\alpha + 4b_V + 4 \left[ \frac{2}{3}b_S + b_C Z \left( 1 - \frac{Z}{3A} \right) \right] A^{-1/3} - 4b_{sim} \left( 1 - \frac{2Z}{A} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

Sostituendo ora i valori dei parametri  $b_k$  come riportati in [2.56](#), si ottengono nel piano  $(Z, A)$ , le linee per  $Q = \text{costante}$  (fig. [5.3](#)) che individuano le *soglie di instabilità* del decadimento per emissione di particelle  $\alpha$  con energia cinetica  $E_k \simeq Q$ . Si noti che si ottiene:

$$\begin{aligned}
 Q = 0 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 140 \\
 Q = 4 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 200 \\
 Q = 8 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 240
 \end{aligned}$$

Il decadimento  $\alpha$  per nuclei con  $140 < A < 200$  è sì possibile, ma date le lunghissime vite medie che lo caratterizzano, risulta praticamente inosservabile; si può quindi affermare che i nuclei con  $A < 200$  sono essenzialmente stabili rispetto all'emissione  $\alpha$ .

### 5.2.3 Teoria del decadimento $\alpha$

I dati sperimentali mostrano una probabilità di decadimento  $\alpha$  del nucleo genitore come funzione rapidamente crescente dell'energia  $E_{k,\alpha}$ , ovvero di  $Q_\alpha$ , e dunque la riga più intensa dello spettro è quella dal livello fondamentale del nucleo genitore al livello fondamentale del nucleo figlio.

Per organizzare i dati e prima della formulazione d'una teoria da parte di Gamow et al., Geiger e Nuttall suggerirono, nel 1911, una relazione empirica fra la probabilità di decadimento  $\lambda_\alpha$  e l'energia totale, ovvero il  $Q$ -valore a disposizione del decadimento, per ogni catena isotopica

$$\log \lambda_\alpha = A(Z) Q_\alpha^{-1/2} + B(Z) \quad (5.19)$$

con  $A(Z)$  e  $B(Z)$  coefficienti che vanno determinati con fit sui dati sperimentali. Prendendo l'esponente ad ogni membro della [5.19](#)

$$\lambda_\alpha(Q_\alpha) \propto e^{D(Z) Q_\alpha^{-1/2}} \quad (5.20)$$

La relazione di Geiger e Nuttall descrive abbastanza bene i dati finché la dipendenza di  $\log \lambda_\alpha$  dal numero di neutroni si mantiene lineare.

È un risultato che una teoria del decadimento alfa deve riprodurre.

La teoria proposta nel 1928 da Gamow, e indipendentemente da Gurney e Condon per spiegare il decadimento  $\alpha$ , pur fornendo una descrizione quantitativa e predittiva del fenomeno è però basata su un approccio che si avvale di assunzioni e descrizioni fisiche approssimate.

L'idea di partenza è che le particelle  $\alpha$  emesse dai nuclei non esistano come tali nei nuclei molto prima del decadimento, ma si formino sostanzialmente all'inizio di questo processo. Si ammette che almeno a sufficiente distanza dal centro di massa del sistema, il nucleo genitore possa essere descritto, pochi istanti prima del decadimento, come un sistema costituito da "particella  $\alpha$  + nucleo figlio", assumendo che la particella  $\alpha$  possieda una propria identità strutturale e si muova all'interno di una buca di potenziale.

L'energia potenziale del sistema nella sua interezza può allora essere rappresentata come l'energia del sistema "particella  $\alpha$  + nucleo figlio" considerati come due sottosistemi nucleari separati.

L'altezza della barriera coulombiana per nuclei con  $A \simeq 200$  è dell'ordine di  $20 \div 25$  MeV, e particelle  $\alpha$  con energie cinetiche dell'ordine di pochi MeV, come quelle emesse per decadimento alfa, non riescono a superarla e avvicinarsi sufficientemente al nucleo da interagire con esso tramite interazione nucleare.

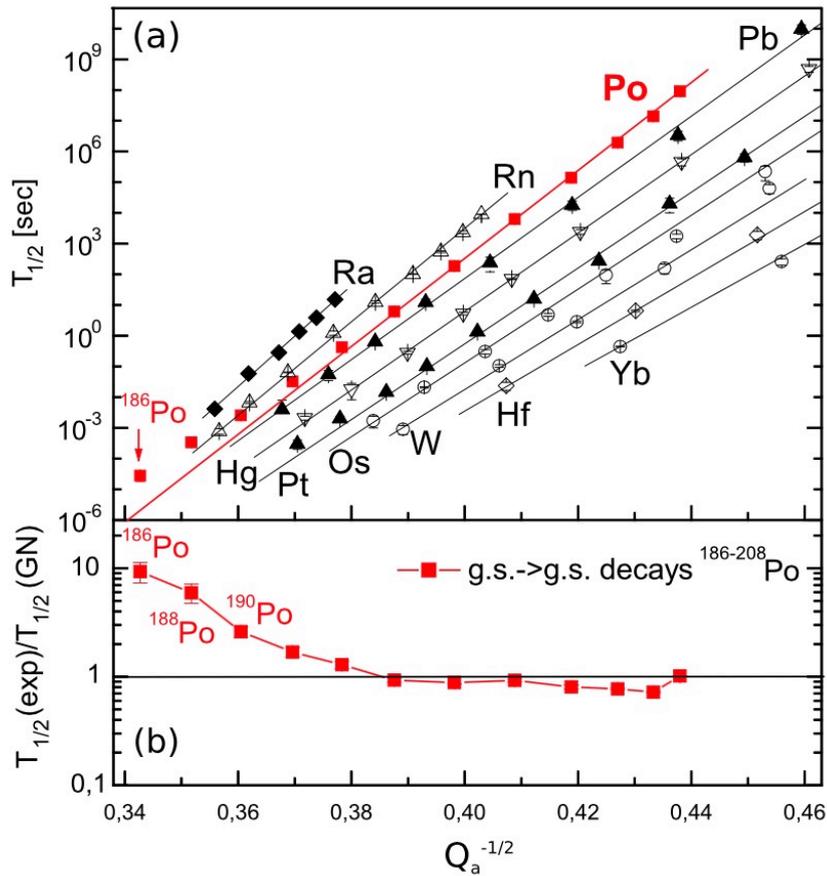


Figura 5.4: Dipendenza del tempo di dimezzamento  $T_{1/2}$  dall'inverso della radice quadrata del  $Q$ -valore, per i decadimenti  $\alpha$  di alcune catene isotopiche. Sono sovrapposte le previsioni secondo Geiger-Nuttal ed è in evidenza il comportamento del Po. (Andreyev et al., Phys. Lett. B 734 (2014) 203)

D'altro canto se si immagina una particella  $\alpha$  di bassa energia cinetica legata in un nucleo, anch'essa vede questa stessa barriera coulombiana ma dall'interno del nucleo, e nondimeno riesce talvolta ad uscire dal nucleo. Come ciò possa succedere costituisce un notevole rompicapo, finchè non si capì che l'emissione di particelle  $\alpha$  da un nucleo è un fenomeno squisitamente quantistico, legato all'*effetto tunnel*.

### Trasmissione attraverso una barriera rettangolare

Si consideri dapprima il caso di una barriera di potenziale rettangolare monodimensionale, distinguendo tre regioni

$$\begin{aligned}
\text{I: } & V = 0 & -\infty < x < 0 \\
\text{II: } & V = U & 0 < x < b \\
\text{III: } & V = 0 & b < x < \infty
\end{aligned}$$

Per una particella con energia cinetica  $E < U$  la barriera risulta classicamente impenetrabile. Dal punto di vista quantistico essa ha invece una *trasparenza* non nulla.

Si tratti la particella come un'onda di lunghezza d'onda ridotta  $\lambda = \hbar/mv =$

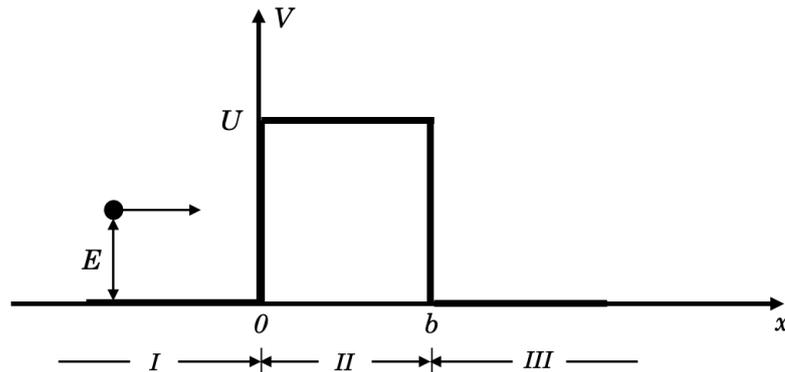


Figura 5.5: Barriera rettangolare monodimensionale.

$\hbar/\sqrt{2mE}$ , con  $m$  la massa ridotta del sistema, e ampiezza  $A_1$ . Una parte dell'onda, con ampiezza  $B_1$ , è riflessa dalla barriera in  $x = 0$  e una parte, con ampiezza  $A_2$ , trasmessa. Similmente in  $x = b$ , una parte dell'onda

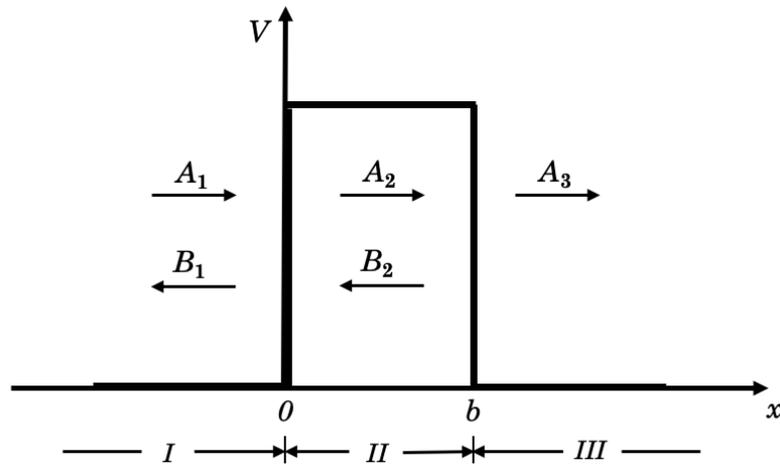


Figura 5.6: Trasmissione e riflessione da barriera rettangolare.

penetrata nella barriera è riflessa con ampiezza  $B_2$  e la parte restante emer-

ge dall'altra parte della barriera con ampiezza  $A_3$ . Si definisce *fattore di penetrazione della barriera* il rapporto

$$P = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \quad (5.21)$$

e *trasparenza*, o *coefficiente di trasmissione* della barriera, il rapporto

$$T = \frac{|A_3|^2 k_{III}}{|A_1|^2 k_I} \quad (5.22)$$

con  $k_{III}$  e  $k_I$  i numeri d'onda  $1/\lambda$  nelle regioni *III* e *I*.

Le funzioni d'onda della particella nelle diverse regioni si ottengono come soluzioni dell'equazione di Schrödinger unidimensionale

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad (5.23)$$

Come funzioni d'onda per la particella incidente nella regione *I* nella direzione positiva di  $x$ , e per la riflessa sempre nella regione *I* ma nella direzione negativa di  $x$ , si scelgono onde piane

$$\begin{aligned} A_1 e^{ik_I x} \\ B_1 e^{-ik_I x} \end{aligned}$$

per cui la funzione d'onda totale nella regione *I* si ottiene come sovrapposizione lineare di queste due componenti

$$\psi_I = A_1 e^{ik_I x} + B_1 e^{-ik_I x} \quad (5.24)$$

con numero d'onda

$$k_I = \frac{1}{\lambda_I} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (5.25)$$

Similmente per la regione *III*

$$\psi_{III} = A_3 e^{ik_{III} x}, \quad \text{con } k_{III} = k_I, \quad \text{in questo caso specifico.} \quad (5.26)$$

$\psi_I$  e  $\psi_{III}$  sono soluzioni dell'equazione di Schrödinger per le regioni *I* e *III*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad (5.27)$$

Nella regione *II* il termine energetico dell'equazione di Schrödinger è

$$E - V = E - U = -E_B \quad (5.28)$$

dove  $E_B > 0$  svolge il ruolo di un'energia di legame. La soluzione anche

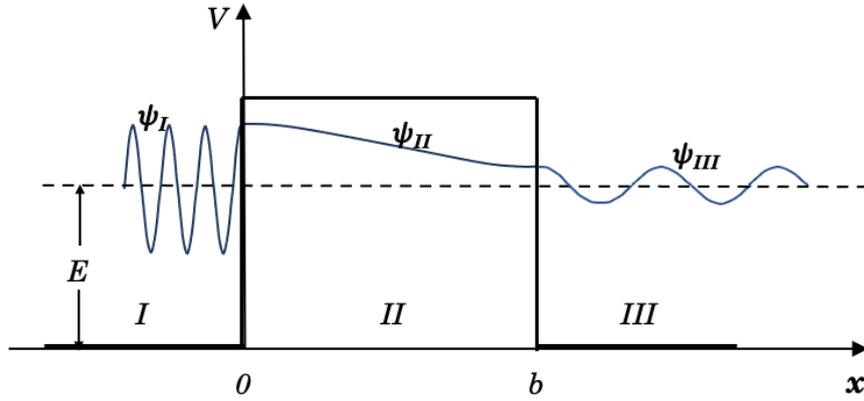


Figura 5.7: Funzione d'onda attraverso una barriera rettangolare.

in questo caso è una sovrapposizione lineare di componenti relative a moti progressivi e regressivi nella direzione  $x$

$$\psi_{II} = A_2 e^{ik_{II}x} + B_2 e^{-ik_{II}x}, \quad \text{con} \quad k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{-2mE_B}}{\hbar} \quad (5.29)$$

Per  $E < U$  il numero d'onda  $k_{II}$  è immaginario puro, conviene quindi introdurre un numero d'onda reale  $k'_{II}$  definito come

$$k'_{II} = ik_{II} = \frac{\sqrt{2mE_B}}{\hbar}$$

La funzione d'onda nella regione  $II$  diventa così

$$\psi_{II} = A_2 e^{k'_{II}x} + B_2 e^{-k'_{II}x} \quad (5.30)$$

Le equazioni per  $\psi_I$ ,  $\psi_{II}$  e  $\psi_{III}$  contengono un'ampiezza nota  $A_1$  (che può essere normalizzata ad 1) e quattro ampiezze incognite  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  e  $A_3$  che devono essere determinate per calcolare la trasparenza  $T$ .

I quattro coefficienti  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  e  $A_3$  devono avere valori tali da rendere soddisfatta la condizione di continuità delle funzioni d'onda e delle loro derivate prime in  $x = 0$  e in  $x = b$ .

La funzione  $\psi_{II}$  non è periodica in quanto  $k_{II}$  è immaginario.

Le condizioni di continuità danno quattro equazioni

$$\begin{aligned} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) &\rightarrow A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ \psi_{II}(b) = \psi_{III}(b) &\rightarrow A_2 e^{k'_{II}b} + B_2 e^{-k'_{II}b} = A_3 e^{ik_{III}b} = A_3 e^{ik_I b} \end{aligned} \quad (5.31)$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi_I}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}\right)_{x=0} &\rightarrow ik_I(A_1 - B_1) = k'_{II}(A_2 - B_2) \\ \left(\frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}\right)_{x=b} = \left(\frac{\partial \psi_{III}}{\partial x}\right)_{x=b} &\rightarrow k'_{II}(A_2 e^{k'_{II}b} - B_2 e^{-k'_{II}b}) = ik_{III}A_3 e^{ik_{III}b} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Posto

$$p = \sqrt{2mE}, \quad q = \sqrt{2mE_b}, \quad k = k_I = k_{III} = \frac{p}{\hbar}$$

e moltiplicando la prima per  $ip/\hbar$  e sommando poi membro a membro con la terza si ottiene

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{q}{ip}\right) A_2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q}{ip}\right) B_2 \quad (5.33)$$

Moltiplicando la seconda per  $k'_{II} = q/\hbar$  e sommando poi membro a membro con la quarta si ottiene

$$A_2 = \frac{1}{2} A_3 e^{ikb} \left(1 + \frac{ip}{q}\right) e^{-qb/\hbar} \quad (5.34)$$

mentre sottraendo

$$B_2 = \frac{1}{2} A_3 e^{ikb} \left(1 - \frac{ip}{q}\right) e^{qb/\hbar} \quad (5.35)$$

Sostituendo nella [5.33](#) si ha

$$A_1 = \frac{1}{4} A_3 e^{ikb} \left[ \left(1 + \frac{q}{ip}\right) \left(1 + \frac{ip}{q}\right) e^{-qb/\hbar} + \left(1 - \frac{q}{ip}\right) \left(1 - \frac{ip}{q}\right) e^{qb/\hbar} \right] \quad (5.36)$$

Si ottiene quindi per il coefficiente di trasmissione della barriera

$$T = \frac{|A_3|^2 k_{III}}{|A_1|^2 k_I} = \frac{4 k_I^2 k'_{II}{}^2}{(k_I^2 + k'_{II}{}^2)^2 \sinh^2 k'_{II} b + 4 k_I^2 k'_{II}{}^2} \quad (5.37)$$

Ricordando che

$$k_I^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad e \quad k'_{II}{}^2 = \frac{2mE_b}{\hbar^2} = \frac{2m(U-E)}{\hbar^2}$$

si può scrivere  $T$  in termini dell'energia

$$T = \left\{ 1 + \frac{U^2}{4E(U-E)} \left[ \frac{1}{4} (e^{2k'_{II}b} + e^{-2k'_{II}b}) - \frac{1}{2} \right] \right\}^{-1} \quad (5.38)$$

Al limite con barriere rettangolari spesse per cui  $k'_{II}b \gg 1$  il termine in parentesi quadra si riduce in prima approssimazione a  $(e^{2k'_{II}b}/4)$  e quindi

$$T \longrightarrow \left[ \frac{U^2}{4E(U-E)} \frac{1}{4} e^{2k'_{II}b} \right]^{-1} = \frac{16E(U-E)}{U^2} e^{-2b\sqrt{2m(U-E)}/\hbar} \quad (5.39)$$

Si ha quindi

$$T \approx e^{\frac{-2b\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}} \quad (5.40)$$

che è sostanzialmente la *formula di Gamow*.

Questa si può ricavare anche partendo dalla [5.36](#), facendo la semplificazione

$$k_I \simeq k'_I I \quad \text{per cui} \quad E \simeq U - E \equiv /E_B$$

e supponendo, come fatto sopra, che  $k'_I b \gg 1$ , in tal caso si ha infatti  $p/q = \sqrt{E/E_B} \simeq 1$ , per cui

$$A_1 \approx \frac{1}{2} A_3 e^{ikb} e^{qb/\hbar} \quad (5.41)$$

Per la trasparenza si ha dunque

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \approx 4 |e^{-ikb} e^{qb/\hbar}|^2 = 4 e^{-2qb/\hbar} \approx e^{-2b\sqrt{2m(U-E)}/\hbar} \quad (5.42)$$

e si vede che essa è maggiore per particelle di massa  $m$  piccola, potenziali  $(U - E)$  non troppo elevati e ridotti spessori  $b$ , di conseguenza si può dedurre che gli elettroni dovrebbero superare agevolmente barriere di potenziale. Nel limite classico invece, ovvero per  $\hbar \rightarrow 0$ , la trasparenza tende a zero.

Nel caso di una barriera di forma arbitraria la trasparenza si ottiene generalizzando in modo approssimato la formula di Gamow, sostituendo la barriera effettiva con una barriera rettangolare *equivalente* che abbia un'altezza  $U_{eff}$  e una larghezza  $(b - a)$  opportune e tali che

$$\sqrt{\frac{2m(U_{eff} - E)}{\hbar^2}} = \frac{\int_a^b \sqrt{\frac{2m[V(x) - E]}{\hbar^2}} dx}{b - a} \quad (5.43)$$

per cui la trasparenza si scrive come

$$T \approx e^{-2 \sqrt{\frac{2m(U_{eff} - E)}{\hbar^2}} (b - a)} = e^{-2 \int_a^b \sqrt{\frac{2m[V(x) - E]}{\hbar^2}} dx} \quad (5.44)$$

### Trasmissione attraverso la barriera di potenziale nucleare

Si tratta ora il problema più realistico di una barriera di potenziale a simmetria sferica che rappresenti quello sentito da una particella carica entro un nucleo.

Data la simmetria assunta per il potenziale, si può fattorizzare la funzione d'onda espressa in coordinate polari sferiche  $r, \vartheta, \varphi$ , nelle singole variabili

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = f(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi) = f(r) Y(\vartheta, \varphi) \quad (5.45)$$

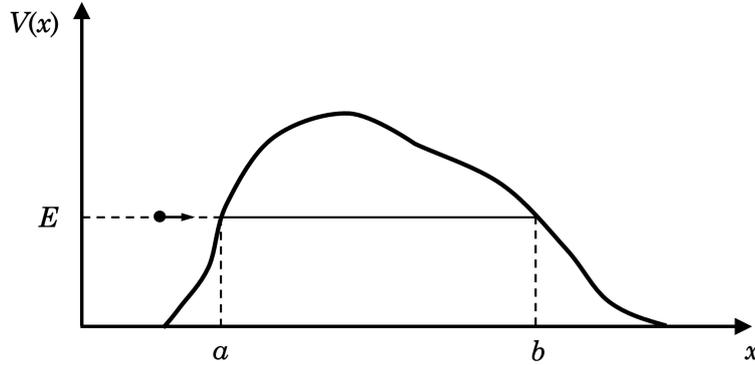


Figura 5.8: Barriera di forma arbitraria.

Come per l'atomo di idrogeno, l'equazione di Schrödinger del sistema può essere scissa in due parti, una dipendente dalla sola variabile radiale  $r$ , e una dalle sole variabili angolari  $\vartheta$  e  $\varphi$

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin^2 \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E_{tot} - V) \psi = 0 \quad (5.46)$$

Uguagliando le due parti a una medesima costante  $\ell(\ell+1)$ , con  $\ell$  un numero positivo o nullo, si ottengono due equazioni differenziali, quella angolare e quella radiale.

L'equazione angolare

$$\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin^2 \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \ell(\ell+1) Y = 0 \quad (5.47)$$

ha come soluzioni le armoniche sferiche

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} P_\ell^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (5.48)$$

con  $P_\ell^m(\cos \vartheta)$  le funzioni associate di Legendre.

L'equazione radiale

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{df(r)}{dr} \right] + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ (E_{tot} - V) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] f(r) = 0 \quad (5.49)$$

contiene la fisica del problema, in quanto contiene l'energia totale  $E_{tot}$  ed il potenziale  $V = V(r)$  del sistema fisico *nucleo + particella*.

Introducendo la funzione d'onda radiale modificata  $u(r) = rf(r)$ , la 5.49 diventa

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ (E_{tot} - V) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0 \quad (5.50)$$

che confrontata con l'equazione di Schrödinger per il caso unidimensionale, mostra sostanzialmente la presenza di un ulteriore termine di energia potenziale, ovvero

$$\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \quad (5.51)$$

che corrisponde ad un *potenziale centrifugo*, essendo sostanzialmente espresso come il quadrato di un operatore *momento angolare* fratto un operatore *momento d'inerzia*.

La [5.2.3](#) è quindi una sorta di energia rotazionale quanto-meccanica associata al moto delle particelle collidenti intorno al loro comune centro di massa, ed ha l'effetto di aumentare la barriera di potenziale di un nucleo ogniqualvolta è presente un momento angolare orbitale relativo.

In tal modo sostanzialmente, il moto relativo tridimensionale di due particelle interagenti con potenziale  $V(r)$  è ricondotto ad un moto unidimensionale nella coordinata  $r$ , pur di assumere come potenziale di interazione la somma

$$V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

La *barriera centrifuga* interviene quindi ogniqualvolta in cui in una disintegrazione o in un urto si abbia  $\ell \neq 0$ , anche per particelle elettricamente neutre, come si verifica quando un neutrone penetra la barriera nucleare. Essa agisce quindi nel senso di ridurre la probabilità di penetrazione della barriera.

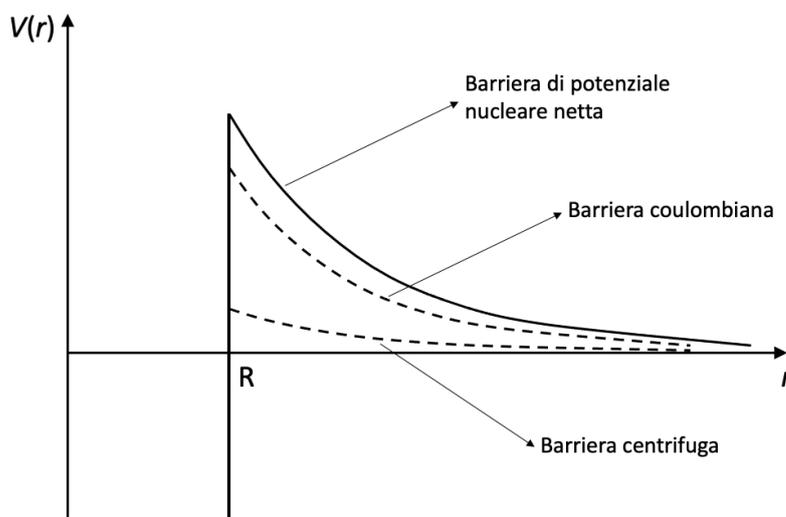


Figura 5.9: Contributo della barriera centrifuga.

### Costante di decadimento $\alpha$

Si ricava ora la relazione fra la trasparenza  $T$  e la costante  $\lambda_\alpha$  di decadimento  $\alpha$ . Si immagini un gran numero di uguali nuclei  $\alpha$ -attivi visti ognuno come l'insieme del nucleo figlio e della particella  $\alpha$  costretta a restare nel nucleo dalla presenza di una barriera di potenziale. Ciò è equivalente a considerare un fascio di particelle  $\alpha$ , rappresentabile da un'onda di intensità  $I_0$ , all'interno della barriera.

Si supponga che all'istante  $t = 0$  ogni particella  $\alpha$  incida sulla barriera del suo nucleo e che una frazione  $T$  di esse la attraversi. Si potrà esprimere quindi l'intensità dell'onda riflessa dalla barriera verso l'interno del nucleo dopo questo primo tentativo come  $(1 - T)I_0$ . Dopo  $n$  tentativi successivi nell'unità di tempo l'intensità è

$$I_n = (1 - T)^n I_0 = I_0 e^{n \ln(1-T)} \quad (5.52)$$

che per  $T$  molto piccolo si riduce a

$$\lim_{T \rightarrow 0} I_n = I_0 e^{-nT} \quad (5.53)$$

Detta  $v$  la velocità media della particella  $\alpha$  nel nucleo di raggio  $R$ , il tempo medio  $\Delta t$  fra due successivi tentativi di attraversamento della barriera è dato da  $\Delta t = 2R/v$ . Il numero medio  $n$  di tentativi nel tempo  $t$  è quindi  $n = tv/2R$ . Di conseguenza

$$I_n = I_0 e^{-T \frac{v}{2R} t} \quad (5.54)$$

Il numero medio di tentativi per unità di tempo  $dn/dt = v/2R$ , considerata realisticamente un'energia cinetica di 8 MeV per la particella  $\alpha$  nel nucleo, risulta dell'ordine di  $10^{21}$  quindi così alto da poter esprimere  $I_n$  come una funzione praticamente *continua* del tempo

$$I_n \longrightarrow I(t) = I_0 e^{-\lambda_\alpha t} \quad (5.55)$$

con

$$\lambda_\alpha = T \frac{v}{2R} = T \frac{dn}{dt} = T \lambda_0 \quad (5.56)$$

la costante di decadimento.

Si osservi che  $\lambda_0$  non cambia molto da nucleo a nucleo, ed è quindi praticamente sempre dell'ordine di  $10^{21} \text{ s}^{-1}$ , mentre  $T$  può variare molto da nucleo a nucleo.

Considerando ad esempio  $^{238}\text{U}$ , con  $\lambda_0 \simeq 10^{21} \text{ s}^{-1}$ , il numero  $n$  di tentativi nell'arco di una vita media  $\tau = 6.5 \times 10^9$  anni, risulta pari a circa  $10^{39}$ . Considerando ora la trasparenza  $T$  relativamente all'equazione radiale, nel-

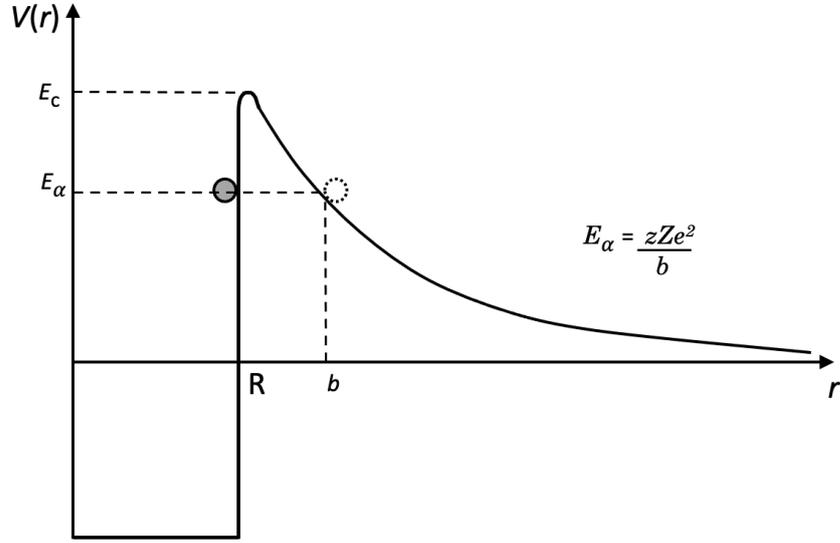


Figura 5.10: Schema posizionamento spaziale ed energetico della particella  $\alpha$  di decadimento, rispetto alla barriera coulombiana.

l'ipotesi di un nucleo genitore a simmetria sferica e integrando fra  $r = R$  ed  $r = b$  per un potenziale a forma di barriera coulombiana (fig 5.10)

$$\begin{aligned}
 T &= e^{-2 \int_R^b \sqrt{\frac{2m[V(r) - E]}{\hbar^2}} dr} = e^{-2 \int_R^b \sqrt{\frac{2m[(zZe^2/4\pi\epsilon_0 r) - E]}{\hbar^2}} dr} = \\
 &= e^{\sqrt{\frac{2mzZe^2}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \int_R^b \sqrt{\frac{1}{b} - \frac{1}{r}} dr} = e^{\sqrt{\frac{2mzZe^2b}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \left( \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} - \arccos\sqrt{\frac{R}{b}} \right)} \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

dove

$$G = \sqrt{\frac{2mzZe^2b}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \left( \arccos\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} \right) \quad (5.58)$$

è detto *fattore di Gamow*, per cui

$$\lambda_\alpha = \lambda_0 e^{-G} \quad (5.59)$$

Se  $E_{k,\alpha} \ll E_C$ , allora  $b \gg R$  e in prima approssimazione il termine in parentesi della 5.58 si riduce a  $\pi/2 - \sqrt{R/b}$ . Il fattore di Gamow può allora essere scritto come

$$G \simeq A + B\sqrt{R} \quad (5.60)$$

con  $A$  e  $B$  indipendenti da  $R$

$$A = \sqrt{\frac{\pi m z Z e^2 b}{2 \epsilon_0 \hbar^2}}, \quad B = \sqrt{\frac{2 m z Z e^2 b}{\pi \epsilon_0 \hbar^2}} \quad (5.61)$$

Una ancor più grezza approssimazione, con tolleranza entro il 30%, pone  $\pi/2 - \sqrt{R/b} \approx 1$ , da cui

$$G \simeq \sqrt{\frac{2mzZe^2b}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \sim (E_{k,\alpha})^{-1/2} \quad , \quad \text{con } b = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0E} \quad (5.62)$$

che conduce direttamente alla legge di Geiger e Nuttal.  
Si consideri ora l'esempio concreto



per il quale l'energia cinetica delle particelle  $\alpha$  osservate è  $E_{k,\alpha} = 4.05$  MeV, con una vita media  $\tau_{232\text{Th}} = 1.39 \times 10^{10}$  y.

Per il raggio del torio si ottiene  $R_{232\text{Th}} \simeq 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3} \simeq 7.4 \times 10^{-15}$  m.

$$T \simeq 4 \times 10^{-40} \quad (5.64)$$

La particella  $\alpha$  ha dunque una probabilità estremamente piccola di penetrare la barriera. Questo spiega oltretutto perchè particelle  $\alpha$  di bassa energia non siano assorbite da nuclei pesanti neppure grazie all'effetto tunnel.

Per una particella  $\alpha$  legata in un nucleo la situazione è però diversa. La sua energia cinetica nella buca è dell'ordine di

$$E'_{k,\alpha} \simeq U_0 + E_{k,\alpha} \simeq 44 \text{ MeV} \quad (5.65)$$

e la corrispondente velocità si può dunque ottenere dall'espressione non relativistica

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2E'_{k,\alpha}}{M_\alpha}} \simeq 0.15 c \quad (5.66)$$

Essendo confinata nella piccola regione di spazio associata al volume del nucleo essa sbatterà quindi contro la barriera di potenziale con una frequenza data approssimativamente da

$$\frac{v_\alpha}{R_0 A^{1/3}} \simeq 6.0 \times 10^{21} \text{ s}^{-1} \quad (5.67)$$

Si deduce una probabilità al secondo per la particella  $\alpha$  di sfuggire pari a

$$P(\text{emissione } \alpha) \simeq \frac{v_\alpha}{R_0 A^{1/3}} T \simeq 2.4 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1} \quad (5.68)$$

che coincide con la costante di decadimento  $\lambda_\alpha$  cui corrisponde una vita media

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha} \simeq 0.4 \times 10^{18} \text{ s} \simeq 1.3 \times 10^{10} \text{ y} \quad (5.69)$$

valore molto prossimo a quello osservato sperimentalmente per il  ${}^{232}\text{Th}$ .

La probabilità di emissione dipende quindi sensibilmente dalla massa e dall'energia della particella emessa, e questo ha un risvolto importante anche

nel fenomeno della fissione spontanea. Il fatto poi che la probabilità di emissione risulti proporzionale ad  $E_{k,\alpha}^{1/2}$ , e che quindi la vita media per decadimento  $\alpha$  si accorci al crescere di  $E_{k,\alpha}$ , è consistente con quanto ci si attende anche intuitivamente.

In tabella sono riportati i valori calcolati di  $\tau_\alpha$  per alcune sequenze isotopiche, a confronto con i relativi valori sperimentali;  $(b - R)$  è la corrispondente larghezza della barriera.

	$Q_\alpha$ (MeV)	$R$ (fm)	$b$ (fm)	$G$	$\tau_{exp}$ (s)	$\tau_{th}$ (s)
${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th}$	4.27	8.52	60.7	0.53	$2.0 \times 10^{17}$	$3.3 \times 10^{17}$
						$({}^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} \rightarrow {}^{234}_{92}\text{U})$
${}^{234}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{230}_{90}\text{Th}$	4.86	8.49	53.3	0.51	$1.1 \times 10^{13}$	$1.1 \times 10^{13}$
${}^{230}_{90}\text{U} \rightarrow {}^{226}_{88}\text{Ra}$	4.77	8.45	53.1	0.51	$3.5 \times 10^{12}$	$3.9 \times 10^{12}$
${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn}$	4.87	8.41	50.9	0.50	$7.4 \times 10^{10}$	$7.4 \times 10^{10}$
${}^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\text{Po}$	5.59	8.37	43.3	0.46	$4.8 \times 10^5$	$4.2 \times 10^5$
${}^{218}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\text{Pb}$	6.11	8.33	38.7	0.43	$2.6 \times 10^2$	$1.6 \times 10^2$
						$({}^{214}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{214}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{214}_{84}\text{Po})$
${}^{214}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{210}_{82}\text{Pb}$	7.84	8.28	30.1	0.36	$2.3 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-4}$
						$({}^{210}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{210}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{210}_{84}\text{Po})$
${}^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\text{Th}$	5.41	8.24	43.7	0.47	$1.7 \times 10^7$	$5.8 \times 10^5$

## 5.3 Radioattività $\beta$

Il decadimento  $\beta$  nucleare è dovuto all'azione dell'interazione debole che è responsabile di molti altri processi fisici: numerosi decadimenti di particelle elementari, le reazioni indotte da neutrini, la non conservazione della parità nei decadimenti  $\gamma$  dei nuclei e negli spettri ottici degli atomi. Tutti i leptoni e gli adroni conosciuti sono soggetti all'interazione debole. In astrofisica il suo ruolo è importante nelle reazioni nucleari all'interno del Sole e nell'esplosione delle supernovae. Alcuni processi deboli, come l'asimmetria angolare del decadimento muonico, trovano promettenti applicazioni nell'analisi di effetti chimici fini, ... (Okun).

Svariati meccanismi coinvolgono elettroni e nucleo di uno stesso atomo; si vedrà dapprima la *conversione interna*, per poi soffermarsi più ampiamente sul *decadimento  $\beta$* .

### 5.3.1 Conversione interna

In un atomo la sovrapposizione spaziale tra la funzione d'onda di un suo elettrone, particolarmente uno delle shell più interne, e quella del nucleo non è mai nulla, da cui una probabilità finita che un elettrone si trovi dentro il nucleo del proprio atomo. Quando ciò si verifica l'elettrone ha la possibilità di accoppiarsi elettromagneticamente ad un eventuale stato energetico eccitato del nucleo acquisendone direttamente l'energia associata e determinando dunque la diseccitazione del nucleo senza che questo emetta un raggio  $\gamma$ .

In tal caso l'elettrone viene emesso dall'atomo, non dal nucleo, con un'energia cinetica  $E_{k,e}$  pari all'energia di transizione  $E^*$  dello stato eccitato del nucleo, equivalente alla differenza, moltiplicata per  $c^2$ , fra la massa del nucleo eccitato e dello stesso non eccitato, meno l'energia atomica  $B_e$  di legame dell'elettrone

$$E_{k,e} = E^* - B_e \quad (5.70)$$

Il processo di conversione interna non determina quindi una variazione del numero atomico dell'atomo coinvolto, ma soltanto una sua *ionizzazione*, costituendo nel contempo un meccanismo che permette al nucleo di diseccitarsi tramite un'interazione elettromagnetica ma senza produrre fotoni  $\gamma$  nello stato finale.

La gran parte degli elettroni emessi per conversione interna provengono dalle shell K, le più vicine ai nuclei, ma ve ne sono anche dalle shell L ed M.

Dopo l'emissione dell'elettrone per conversione interna, tipicamente un elettrone di una shell meno legata dello stesso atomo *cade* a riempire la posizione lasciata libera nella shell più interna, con la concomitante emissione di un raggio X caratteristico del salto energetico effettuato.

Lo spettro d'emissione di elettroni per conversione interna è quindi *discreto* e accompagnato dall'emissione ritardata di raggi X.

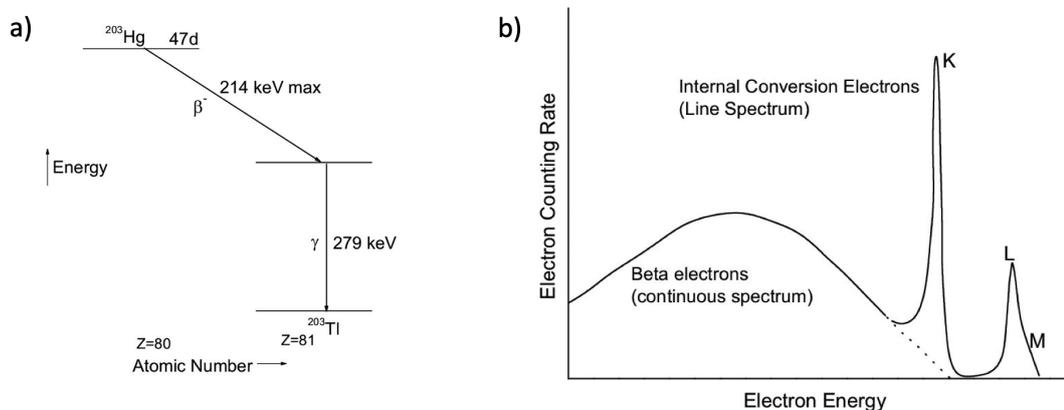


Figura 5.11: a) Decadimento  $\beta$  del mercurio  $^{203}\text{Hg}$ . b) Spettro  $\beta$  del  $^{203}\text{Hg}$ ; oltre alla parte continua si vedono anche i picchi dell'emissione per conversione interna dalle shell K, L ed M (non risolta).

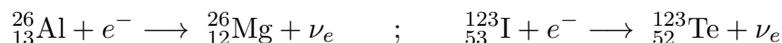
### 5.3.2 Decadimento $\beta$

Un nucleo con sovrabbondanza o viceversa con scarsità di neutroni, in cui cioè il rapporto  $N/Z$  è maggiore o rispettivamente minore che per i nuclei stabili, può trasformarsi in un nucleo più stabile emettendo un elettrone o rispettivamente un positrone. Il processo è detto *decadimento  $\beta$*  e viene indicato come in [5.4b](#) e in [5.4c](#), distinguendo in  $\beta^-$ , il primo ad essere osservato sperimentalmente da Rutherford nel 1900, e  $\beta^+$  a seconda che si tratti dell'emissione di elettroni o positroni. Per la conservazione della carica elettrica il numero di protoni del nucleo figlio è maggiore o minore di un'unità rispetto al nucleo genitore, senza che ciò conduca a una variazione del numero complessivo di nucleoni, fra genitore e figlio.

In pratica all'interno del nucleo genitore si è avuta o la trasformazione di un neutrone in un protone, decadimento  $\beta^-$ , o la trasformazione di un protone in un neutrone, decadimento  $\beta^+$ . Ricordando che i valori delle masse del protone, del neutrone e dell'elettrone (uguale a quella del positrone) sono rispettivamente  $938.272 \text{ MeV}/c^2$ ,  $939.565 \text{ MeV}/c^2$  e  $0.511 \text{ MeV}/c^2$ , si deduce che il decadimento  $\beta^-$  è energeticamente permesso anche per neutroni liberi che hanno una vita media  $\tau_n = 879.5 \text{ s}$ , mentre invece non lo è il decadimento  $\beta^+$  per protoni liberi, che infatti risultano stabili con un limite inferiore per la vita media di  $2.2 \cdot 10^{29}$  anni. La possibilità di decadimenti  $\beta^-$  e soprattutto  $\beta^+$ , nei nuclei dipende dalle energie di legame relative degli isobari con diversi valori di  $Z$  ed  $N$ .

Un nucleo con un numero di neutroni inferiore rispetto a un corrispondente isobaro stabile, ovvero con un eccesso di protoni, può ridurre di un'unità

la propria carica anche assorbendo un elettrone da un orbitale atomico del proprio atomo, tipicamente da un orbitale K. Questo processo è detto *cattura K*.



In seguito a questa cattura un elettrone da un orbitale più esterno casca nell'orbitale dell'elettrone catturato dal nucleo, con la conseguente emissione di uno o più raggi-X. Anche in questo caso il numero di nucleoni del nucleo resta comunque invariato.

Nelle misure sui decadimenti  $\beta$  le uniche particelle che venivano osservate come prodotti di decadimento erano elettroni o positroni, assieme al corrispondente nucleo figlio; ciò fece inizialmente pensare che si trattasse di un processo di disintegrazione in due corpi, come il decadimento  $\alpha$ . In tal caso, dalla conservazione dell'energia nel centro di massa del nucleo  $X$  genitore, per l'energia totale  $E_e$  dell'elettrone si dovrebbe avere, come mostrato nella relazione [B.5](#) dell'Appendice [B](#)

$$E_e = \frac{M_X^2 c^2 + m_e^2 c^2 - M_Y^2 c^2}{2M_X}$$

e di conseguenza, per l'energia cinetica  $E_{k,e}$  dell'elettrone

$$E_{k,e} = \frac{M_X^2 c^2 + m_e^2 c^2 - M_Y^2 c^2}{2M_X} - m_e c^2$$

Ci si attendeva, in base a quest'ipotesi e come per il decadimento  $\alpha$ , che il prodotto più leggero del decadimento, l'elettrone o il positrone, raccolta la gran parte dell'energia a disposizione del decadimento la mostrasse in uno spettro discreto con un unico valore, un picco ben definito centrato attorno ad  $E_{k,e}$ .

Gli spettri misurati di emissione  $\beta$  hanno invece un andamento continuo, a partire da un valore minimo, compatibile con zero, fino ad annullarsi in corrispondenza ad un valore massimo che entro le precisioni sperimentali, corrisponde ad  $E_{max} \cong E_{k,e}$ . Quando gli spettri  $\beta$  furono osservati per le prime volte ci fu anche la tentazione di mettere in discussione la validità di un principio che fino ad allora era apparso fermo e incrollabile, la conservazione dell'energia per un sistema fisico isolato<sup>[1]</sup>, e un nucleo durante il processo di decadimento  $\beta$ , può senz'altro essere considerato come un sistema fisico isolato.

Se inoltre il decadimento  $\beta$  fosse proprio in due soli corpi nello stato finale, ciò implicherebbe che neppure il momento angolare totale del nucleo genitore sarebbe conservato nel decadimento. Siccome infatti il numero di nucleoni, fermioni con spin semi-intero pari ad  $\hbar/2$ , resta invariato fra nucleo genitore e figlio, indipendentemente da qualsiasi possibile variazione di

<sup>1</sup>Niels Bohr fu per un pó uno dei più ferventi sostenitori di quest'ipotesi!



Un decadimento in almeno tre corpi dá ragione dell'andamento continuo degli spettri energetici e non solo.

La conservazione della carica elettrica richiede che la particella proposta da Pauli sia neutra. Siccome inoltre le energie cinetiche massime degli elettroni/positroni emessi nei decadimenti  $\beta$  corrispondono praticamente all'energia che avrebbero se il decadimento fosse in due soli corpi, se ne deduce che la massa di tale particella è molto piccola, sostanzialmente compatibile con *zero*.

Uno dei compiti di questa particella era anche di garantire la conservazione del momento angolare nel decadimento  $\beta$ , e da ciò consegue che deve essere un fermione con momento angolare di spin pari ad  $\hbar/2$ .

Le caratteristiche dedotte per questa particella, a meno della massa, la fanno in un certo qual modo assomigliare a un neutrone, ed è per questo che Fermi la chiamò *neutrino*, indicata dalla lettera  $\nu$ .

Con l'introduzione del neutrino le [5.71](#) si possono più correttamente scrivere

$${}^A_Z X \longrightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu} \quad (5.72a)$$

$${}^A_Z X \longrightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu \quad (5.72b)$$

$${}^A_Z X + e^- \longrightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu \quad (5.72c)$$

tenendo conto della differenza fra neutrino e anti-neutrino.

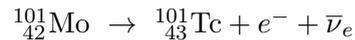
Sperimentalmente si trova che in una sequenza isobarica il nucleo con massa inferiore è stabile rispetto al decadimento  $\beta$ .

Considerando i nuclei con numero di massa  $A$  dispari si vedano come esempio gli isobari con  $A = 101$ . In tal caso l'isobaro di massa minima è il rutenio  ${}^{101}_{44}\text{Ru}$ , un nuclide pari-dispari che per quanto visto nei paragrafi [1.4](#) e [2.5.2](#), è in corrispondenza al minimo della parabola che descrive la sequenza isobarica. Isobari con più neutroni, quali  ${}^{101}_{42}\text{Mo}$  e  ${}^{101}_{43}\text{Tc}$ , decadono convertendo un neutrone del nucleo in un protone secondo la

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (5.73)$$

Il numero atomico di ogni nucleo figlio è quindi superiore di un'unità a quello del nucleo genitore.

Si ha dunque



Gli isobari con un eccesso di protoni rispetto al  ${}^{101}_{44}\text{Ru}$  decadono invece  $\beta^+$  convertendo un protone interno al nucleo secondo la

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \quad (5.74)$$

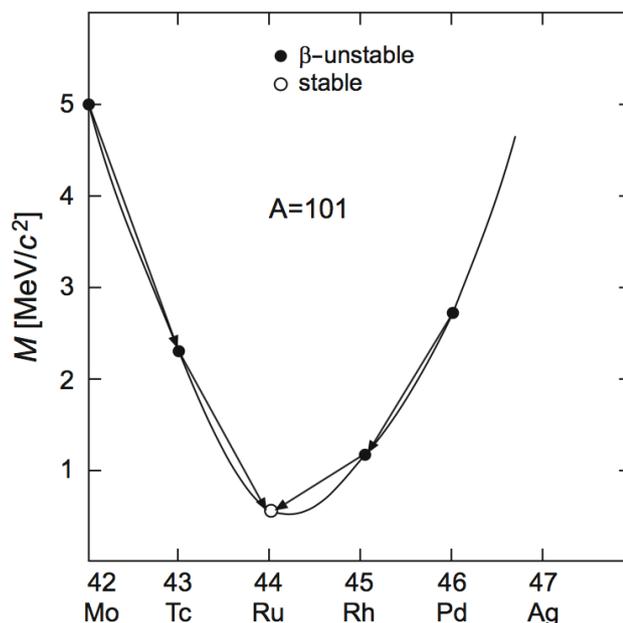
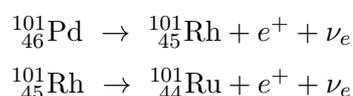


Figura 5.13: Sequenza isobarica del rutenio  $^{101}_{44}\text{Ru}$

In tal caso l'isobaro  $^{101}_{44}\text{Ru}$  è prodotto dalla sequenza



Si ricordi che il principio di conservazione dell'energia vieta la [5.74](#) al di fuori dei nuclei, mentre invece la [5.73](#) è permessa. Il fatto che la [5.74](#) possa aver luogo all'interno di un nucleo implica che sia energeticamente permessa, ovvero che l'incremento in energia di legame del nucleo figlio derivante dal decadimento sia sufficiente, cioè  $\geq (m_n + m_e + m_{\bar{\nu}_e} - m_p) c^2$ .

Si considerino ora i nuclei con numero di massa  $A$  pari. Sempre per quanto visto nei paragrafi [1.4](#) e [2.5.2](#), in questo caso le sequenze isobariche si dispongono secondo due diversi andamenti parabolici, uno per i nuclei dispari-dispari e uno, separato del doppio dell'energia di accoppiamento  $2|B_{ac}(A, Z)|$  nella formula di Weizsäcker, per i nuclei pari-pari.

Capita spesso che soprattutto per valori di  $A > 70$  vi sia più di un isobaro  $\beta$ -stabile. Si considerino come esempio gli isobari con  $A = 106$ .

Gli isobari pari-pari  $^{106}_{46}\text{Pd}$  e  $^{106}_{48}\text{Cd}$  sono sulla parabola inferiore e  $^{106}_{46}\text{Pd}$ , il più stabile dei due, si trova in corrispondenza al minimo della parabola pari-pari. Il  $^{106}_{48}\text{Cd}$  è  $\beta$ -stabile in quanto i due isobari dispari-dispari a lui più prossimi sono situati a livelli energetici superiori, come mostrato in

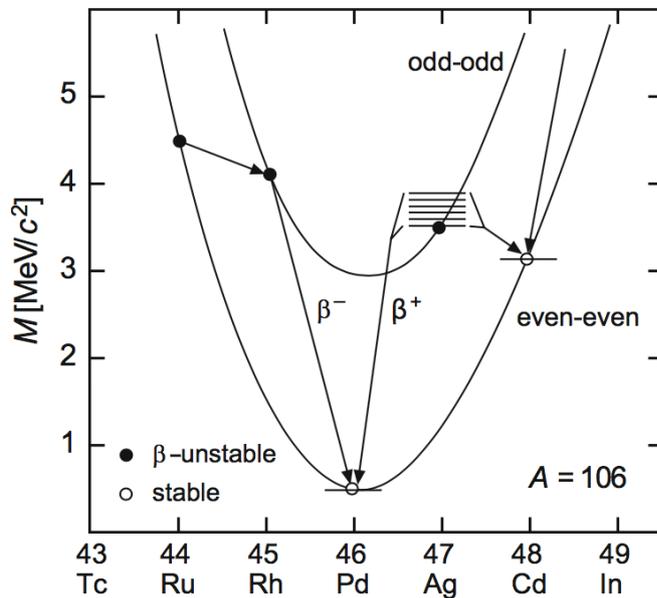


Figura 5.14: Sequenze isobariche del Palladio  $^{106}_{46}\text{Pd}$

figura 5.14. Il decadimento del  $^{106}_{48}\text{Cd}$  in  $^{106}_{46}\text{Pd}$  sarebbe possibile soltanto attraverso un cosiddetto *decadimento doppio  $\beta$* <sup>4</sup>



La probabilità di un simile processo è però così piccola che il  $^{106}_{48}\text{Cd}$  può essere considerato praticamente stabile.

I nuclei dispari-dispari hanno sempre almeno un nucleo pari-pari loro prossimo più fortemente legato nella sequenza isobarica, e di conseguenza sono instabili. Le sole eccezioni a questa regola sono i nuclei leggeri  $^2_1\text{H}$ ,  $^6_3\text{Li}$ ,  $^{10}_5\text{B}$  e  $^{14}_7\text{N}$  che sono  $\beta$ -stabili in quanto l'aumento dell'energia di asimmetria nella formula di Weizsäcker supera in valore assoluto la diminuzione nell'energia d'accoppiamento.

Vi sono anche nuclei che possono decadere sia  $\beta^-$  che  $\beta^+$ , come il potassio  $^{40}_{19}\text{K}$  e il  $^{64}_{29}\text{Cu}$ .

### Cattura elettronica

Per quanto concerne la cattura elettronica o *cattura K* essa, come per la conversione interna, è dovuta alla non trascurabile sovrapposizione spaziale che la funzione d'onda di un tale elettrone ha con la funzione d'onda del nucleo, favorendo così la possibilità che un protone di questo e l'elettrone si

<sup>4</sup>Si veda ad esempio Povh et al. 7<sup>a</sup> ed., Cap. 18, par. 7.

combinino per formare un neutrone e un neutrino secondo la



Questa reazione si osserva prevalentemente in nuclei pesanti per i quali il raggio nucleare è maggiore e l'estensione radiale degli orbitali atomici è minore. Solitamente gli elettroni catturati provengono dall'orbitale più interno, K appunto, la cui funzione d'onda ha la massima sovrapposizione spaziale con la zona occupata dal nucleo. Similmente al processo di conversione interna, la cattura di un elettrone dall'orbitale K ingenera la successiva cascata, nella vacanza da lui lasciata, di un altro elettrone dell'atomo proveniente da orbitali più esterni, quindi a energie più elevate, con la conseguente emissione di caratteristici raggi-X.

Questo processo è energeticamente in competizione col decadimento  $\beta^+$ , come si può vedere ad esempio nel caso del  $^{40}_{19}\text{K}$ , di cui in figura 5.15 è riportato lo schema dei livelli. Il  $^{40}_{19}\text{K}$  è un isotopo naturale con abbondanza

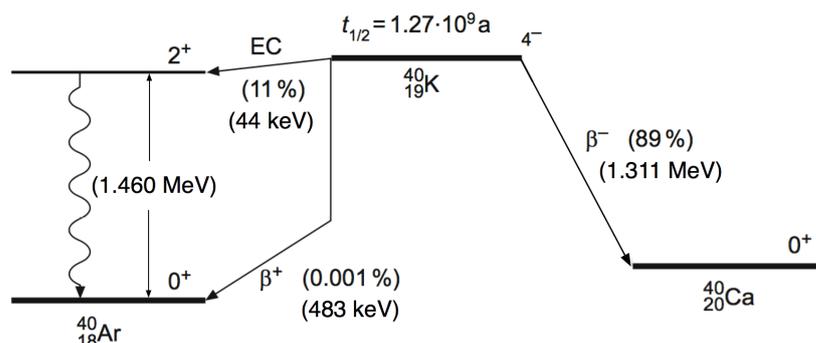


Figura 5.15: Decadimenti  $\beta$  e cattura K del  $^{40}_{19}\text{K}$

dello 0.0117 % che può decadere  $\beta^-$  verso il livello fondamentale del  $^{40}_{20}\text{Ca}$ , con probabilità dell'89.25 % e un Q-valore di 1.311 MeV. Ma esso può anche, con probabilità del 10.55 %, dar luogo a una cattura K con successiva emissione di fotoni da 1.460 MeV verso il livello fondamentale di  $^{40}_{18}\text{Ar}$ . La residua probabilità di decadimento  $\beta^+$ , sempre verso  $^{40}_{18}\text{Ar}$ , è pari a circa 0.001 % e l'energia di 483 keV a disposizione di positrone e neutrino tiene conto della frazione, pari a 1.022 MeV, necessaria a creare la coppia  $e^+e^-$ .

### Vite medie

Per quanto concerne le vite medie caratteristiche dei decadimenti dei nuclei  $\beta$ -instabili,  $\tau_\beta = 1/\lambda_\beta$ , i loro valori spaziano fra circa  $10^{16}$  anni e circa  $10^{-3}$  secondi, con la massima energia d'emissione  $E_0$  variabile da alcune frazioni di MeV fino a circa 7 MeV.

Un'analisi fenomenologica effettuata da Sargent mostra che la costante di

decadimento  $\beta$  va circa come la quinta potenza dell'energia rilasciata

$$\lambda_{\beta} = \frac{1}{\tau_{\beta}} \propto E^5 \quad (5.76)$$

e dipende dalle caratteristiche dei nuclei genitore e figlio.

Non vi sono casi di due isobari contigui che siano  $\beta$ -stabili, anche se talvolta uno dei due ha vita media così lunga da poter essere a tutti gli effetti considerato stabile. Un ben noto esempio è il  $^{40}\text{K}$  che decadendo sia  $\beta^-$  che  $\beta^+$ , si trasforma in altri isobari per i quali entra in competizione anche la cattura K. I prodotti stabili del decadimento del  $^{40}\text{K}$  sono  $^{40}\text{Ar}$  e  $^{40}\text{Ca}$ , rappresentando un caso di due nuclei stabili con uguale numero di massa  $A$ , come in figura [5.15](#)

La scelta del  $^{40}\text{K}$  come esempio non è casuale, infatti esso contribuisce considerevolmente all'esposizione radioattiva di tutte le strutture biologiche: il potassio è un elemento essenziale nella trasmissione dei segnali nervosi e la sua concentrazione nel corpo umano è tale da far sì che esso costituisca circa il 16% della radiazione naturale cui siamo mediamente esposti.

I nuclidi  $\beta$ -instabili con emissione di positroni hanno tutti  $Z < 80$ .

### 5.3.3 Regole di Sargent

Nel 1933 Sargent, con l'intento di cercare regolarità che permettessero di capire il meccanismo alla base dei decadimenti  $\beta$ , mostrò che graficando il log. della costante di decadimento  $\lambda_{\beta}$  verso il log. della massima energia  $E_{max}$  degli elettroni da nuclei  $\beta$ -emettitori, la gran parte dei punti trovati cadeva in prossimità di due curve quasi rettilinee, come in figura [5.16](#).

Il diagramma risultante, detto di Sargent, costituisce una regola empirica del tipo di quella di Geiger-Nuttall per il decadimento  $\alpha$ .

In questo caso però le costanti di disintegrazione non cambiano molto velocemente con l'energia e le due curve non corrispondono ognuna a una diversa serie radioattiva. Per un definito valore di  $E_{max}$  la curva superiore fornisce un valore di  $\lambda_{\beta}$  circa 100 volte superiore a quello corrispondentemente fornito dalla curva inferiore, per cui, fissata un'energia, un decadimento  $\beta$  prossimo alla curva inferiore è circa 100 volte meno probabile di quello corrispondente sulla curva superiore. Ciò ha portato a chiamare *transizioni permesse* quelle rappresentate dalla curva superiore e *transizioni proibite* quelle rappresentate dalla curva inferiore. Chiaramente i termini "permesse" e "proibite" vanno intesi come valori di probabilità sostanzialmente diversi di decadimento spontaneo.

La descrizione della globalità dei dati sperimentali richiede di considerare separatamente curve di Sargent per nuclidi con numeri atomici piccoli, intermedi o grandi. In tutti i casi si ottengono più curve, una delle quali viene identificata come rappresentante le transizioni permesse e le altre come rappresentanti diversi livelli di transizioni proibite.

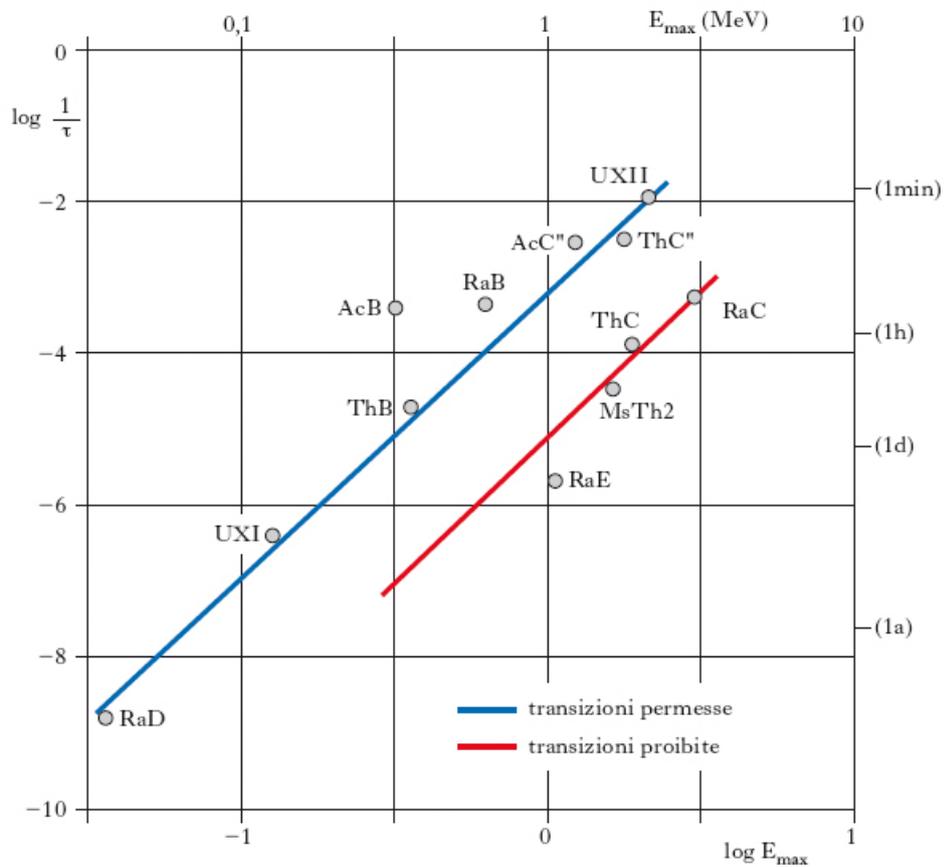


Figura 5.16: Tipico diagramma di Sargent.

Una teoria del decadimento  $\beta$  deve naturalmente poter riprodurre sia queste regolarità nei dati sperimentali che le caratteristiche degli spettri  $\beta$ .

### 5.3.4 Teoria di Fermi dell'interazione debole

Le vite medie misurate  $\tau_\beta$  associate ai decadimenti  $\beta$  sono molto maggiori dei tempi caratteristici coinvolti nelle interazioni nucleari ed elettromagnetiche: infatti la scala temporale tipica dei processi governati dall'interazione forte è dell'ordine dei  $10^{-23}$  s o inferiore, mentre quella dei processi governati dall'interazione elettromagnetica è dell'ordine dei  $10^{-16}$  s. Nonostante quindi i decadimenti  $\beta$  siano chiaramente un fenomeno nucleare, essi non coinvolgono però né la forza nucleare né quella elettromagnetica, e data la piccolezza delle probabilità  $\lambda_\beta = 1/\tau_\beta$  di decadimento ad essi associate, l'interazione che li governa deve essere *debole*.

Questa conclusione condusse Fermi a postulare l'esistenza di una nuova forza responsabile dei decadimenti  $\beta$ , la *forza debole*, che essendo efficace soltan-

to all'interno dell'ambiente nucleare dev'essere a breve raggio d'azione. La bassissima intensità di questa forza è quindi responsabile delle lunghe vite medie osservate nei decadimenti  $\beta$ . In termini di intensità relative, assunta come pari ad 1 quella della forza forte, si ha rispettivamente  $10^{-2}$  per l'elettromagnetica,  $10^{-5}$  per la debole e  $10^{-39}$  per la gravitazionale.

Così come nel caso dell'interazione elettromagnetica, il ridotto valore dell'intensità d'accoppiamento della forza debole permette di affrontare con tecniche perturbative la formulazione di una teoria del decadimento  $\beta$ .

Si è visto che all'interno dei nuclei non vi possono essere, stabilmente presenti, elettroni (dimensioni nucleari, modello Rutherford, ecc. ecc.), e conseguentemente si deduce che gli elettroni emessi durante il decadimento  $\beta$  non possono provenire dal nucleo ma devono essere stati prodotti al momento del decadimento. Questa sequenza è abbastanza analoga a quanto avviene nelle transizioni atomiche, in cui i fotoni non pre-esistono all'interno degli atomi ma sono prodotti al momento delle transizioni.

Così come la transizione in un atomo può essere capita come indotta, ad esempio, da un'interazione di dipolo, e quindi calcolata utilizzando la teoria delle perturbazioni, similmente il decadimento  $\beta$  può essere capito come dovuto alla debole forza rappresentata dall'Hamiltoniano di interazione debole.

Il calcolo della probabilità  $\lambda_\beta$  di transizione per unità di tempo, e della forma dello spettro energetico delle particelle emesse nel processo, può quindi essere affrontato come fatto da Fermi<sup>5</sup> con tecniche perturbative utilizzando la Regola d'Oro n. 2.

I risultati ottenuti da Fermi sono poi stati superati da sviluppi successivi e infine dalla *teoria elettrodebole* di S. Glashow, A. Salam e S. Weinberg. È nondimeno istruttivo e utile ripercorrere il calcolo nella sua forma originale; si tratta di una teoria di campo in cui l'Hamiltoniano d'interazione è un operatore agente sui campi fermionici tramite assorbimento o emissione di fermioni.

### 5.3.5 Il calcolo di Fermi

Fermi considera valida l'ipotesi di Pauli dell'esistenza del neutrino e suppone che in un decadimento  $\beta$  l'elettrone e il neutrino vengono formati al momento del decadimento e della loro emissione dall'atomo. Siano  $\psi_e$  e  $\psi_\nu$  le funzioni d'onda che descrivono gli stati nei quali sono state create le due particelle e si assuma che siano rappresentabili da due onde piane di impulsi rispettivamente  $\mathbf{p}_e$  e  $\mathbf{p}_\nu$

$$\psi_e = N_e e^{i\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_\nu = N_\nu e^{i\mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (5.77)$$

dove  $N$  rappresenta un fattore di normalizzazione.  $\psi_e$  è in realtà più complicata di quanto detto in quanto sente l'influenza della carica nucleare  $Ze$ .

<sup>5</sup>E. Fermi, Tentativo di una teoria dei raggi  $\beta$ , Nuovo Cimento 11 (1934) 1-19.

Considerarla un'onda piana è una buona approssimazione se l'energia dell'elettrone è molto maggiore dell'energia media di legame degli elettroni del nucleo di numero atomico  $Z$ . Per elettroni di bassa energia, dell'ordine ad esempio di 200 KeV, e in prossimità di un nucleo con alto valore di  $Z$ ,  $\psi_e$  è fortemente perturbata.

Fermi assunse che la probabilità d'emissione dipenda dalla probabilità per l'elettrone e il neutrino di essere "creati" contemporaneamente e nello stesso punto<sup>6</sup>, coincidente con le coordinate del centro di massa  $O$  del nucleo, che si considera anche come origine del sistema di riferimento. La probabilità d'emissione dipende quindi dal prodotto  $|\psi_e(O)|^2 |\psi_\nu(O)|^2$ , ma anche da altri fattori.

Uno è il modulo quadro dell'elemento di matrice  $\mathcal{M}$  fra gli stati iniziali e finale del nucleo. Questo è analogo a quello usato nella descrizione dell'emissione di fotoni per la quale, nel caso di radiazione da dipolo, si ha

$$\mathcal{M} = \int \psi_{fin}^*(\text{mom. el.}) \psi_{in} d\tau$$

Per l'interazione  $\beta$ ,  $\mathcal{M}$  non è noto esattamente, ma scegliendo la forma più semplice, la trasformazione  $n \rightarrow p$  assumendo che nel processo sia coinvolto un solo nucleone del nucleo, si ha

$$\mathcal{M} = \int \psi_p^* \psi_n d\tau \quad (5.78)$$

dove  $\psi_n$  e  $\psi_p$  rappresentano rispettivamente lo stato iniziale e finale del nucleone coinvolto. Se si tiene anche conto dei possibili stati di spin, allora  $\mathcal{M}$ <sup>7</sup> diventa un vettore la cui generica componente è

$$\mathcal{M}_i = \int \psi_p^* \sigma_i \psi_n d\tau \quad (5.79)$$

dove  $\sigma_i$  è l' $i$ -ma componente di un operatore relativistico di spin, per cui

$$|\mathcal{M}|^2 = \sum_{i=1}^3 |\mathcal{M}_i|^2 \quad (5.80)$$

L'espressione per la probabilità d'emissione include anche un fattore *costante*  $g^2$  che rappresenta l'intensità dell'accoppiamento che dà luogo all'emissione e gioca il ruolo di una costante universale, per la quale si trova sperimentalmente

$$10^{-48} \text{ g m}^3 \text{ s}^{-2} \lesssim g \lesssim 10^{-49} \text{ g m}^3 \text{ s}^{-2} \quad (5.81)$$

<sup>6</sup>Con questa assunzione Fermi ipotizzò sostanzialmente che non vi fosse necessità di una particella mediatrice per questo processo, essendo puntuale, approssimazione valida purchè le energie in gioco non siano troppo alte.

<sup>7</sup>La scelta di  $\mathcal{M}$  determina delle regole di selezione per i decadimenti  $\beta$ .

Tenendo conto di tutto e dalla Regola d'Oro n.2 si ha, per la probabilità d'emissione

$$\frac{2\pi}{\hbar} (|\psi_e(O)| |\psi_\nu(O)| |\mathcal{M}| g)^2 \frac{dn}{dE} \quad (5.82)$$

con  $dn/dE$  la densità energetica degli stati finali ed  $O$  che indica il *punto* in cui avviene il decadimento, assunto come centro di massa del nucleo genitore. Le funzioni d'onda  $\psi$  sono normalizzate sul volume  $V$  in modo che

$$\int_V \psi^* \psi d\tau = 1 \quad , \quad \text{per cui:} \quad N = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (5.83)$$

e

$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (5.84)$$

Ha senso dire che il nucleo è posizionato in  $\mathbf{r} = 0$  solo se  $\psi$  cambia poco sulle dimensioni del nucleo stesso.

Per valori dell'impulso  $p$  tipici dei decadimenti  $\beta$ , il *passo* con cui si hanno sensibili variazioni di  $\psi$  è dato da  $\lambda = \hbar/p \simeq 10^{-13}$  m, quindi grande se confrontato con le dimensioni nucleari, dell'ordine di  $10^{-14}$  m, cui sono estesi gli integrali che compaiono nell'elemento di matrice. Ha quindi abbastanza senso considerare il nucleo in buona approssimazione *puntiforme* in  $\mathbf{r} = 0$ . In tal caso le [5.84](#) si riducono a

$$\psi_e(O) = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad , \quad \psi_\nu(O) = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (5.85)$$

Si consideri ora la densità degli stati finali. Il numero  $dn'$  di stati d'onda piana con valore dell'impulso compreso fra  $p$  e  $p + dp$ , considerando la particella dovunque in  $V$  è

$$\frac{dn'}{dp} dp = \frac{V p^2 dp}{2\pi^2 \hbar^3} \quad (5.86)$$

quindi si ha, per  $dn$

$$dn = \frac{p_e^2 dp_e}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{p_\nu^2 dp_\nu}{2\pi^2 \hbar^3} V^2 = \frac{p_e^2 p_\nu^2}{4\pi^4 \hbar^6} V^2 dp_e dp_\nu \quad (5.87)$$

con  $dp_e dp_\nu = J dp_e dE$ , e  $J$  lo Jacobiano che trascurando l'energia di rinculo del nucleo rispetto alle energie di elettrone e neutrino, e assumendo nulla la massa del neutrino ( $m_\nu = 0$ ), può essere calcolato partendo dalla relazione  $E = cp_\nu + E_e$ , ottenendo<sup>8</sup>  $J = 1/c$ . Quindi:

$$\frac{dn}{dE} = \frac{p_e^2 p_\nu^2}{4\pi^4 \hbar^6 c} V^2 dp_e \quad (5.88)$$

---


$$^8 J = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_e}{\partial p_e} & \frac{\partial p_e}{\partial E} \\ \frac{\partial p_\nu}{\partial p_e} & \frac{\partial p_\nu}{\partial E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial p_e}{\partial E} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{c}$$

In base quindi alla [5.82](#) si ottiene la probabilità d'emissione per unità di tempo  $P(p_\nu, p_e) dp_e$  in funzione della sola variabile misurata, cioè l'impulso  $p_e$  dell'elettrone

$$P(p_\nu, p_e) dp_e = \frac{2\pi}{\hbar} \left( \frac{1}{V} |\mathcal{M}| g \right)^2 \frac{p_e^2 p_\nu^2 V^2 dp_e}{4\pi^4 \hbar^6 c} \quad (5.89)$$

Sempre nell'ipotesi  $m_\nu = 0$  si ha anche, detta  $E_{tot}$  l'energia totale a disposizione nello stato finale del decadimento, che coincide praticamente quasi con l'estremo superiore  $E_{e,max}$  della distribuzione in energia degli elettroni emessi:  $E_\nu = p_\nu c = E_{tot} - E_e$ , da cui:  $p_\nu = (E_{tot} - E_e) / c$ , che sostituito dá, per la probabilità d'emissione

$$P(p_e) dp_e = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} (E_{tot} - E_e)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.90)$$

Esprimendo infine  $p_{e,max}$  dalla  $E_{e,max} = \sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} \simeq E_{tot}$ , si ha:

$$P(p_e) dp_e = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \left( \sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.91)$$

che rappresenta sostanzialmente la distribuzione dello spazio delle fasi nel decadimento a tre corpi in cui la massa del nucleo residuo è molto maggiore di quella dell'elettrone, la cui massa è a sua volta molto maggiore di quella del neutrino.

### Rateo di decadimento

Per trovare ora il rateo di decadimento  $\lambda_\beta$ , o equivalentemente la vita media  $\tau_\beta$ , bisogna integrare su tutti i possibili valori di  $p_e$

$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{e,max}} \left( \sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.92)$$

Dalla misura della vita media  $\tau_\beta$  si può quindi ottenere il valore del prodotto fra la costante d'accoppiamento e l'elemento di matrice  $g |\mathcal{M}|$ .

Per risolvere l'integrale conviene ridefinire gli impulsi in unità di  $mc$ , rendendo così esplicita la dipendenza dalla massa dell'elettrone e ottenendo le due quantità  $\eta = p_e / (mc)$  ed  $\eta_0 = p_{e,max} / (mc)$ , tramite le quali si riesprime l'integrale della [5.92](#), chiamandolo  $F(\eta_0)$ :

$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2 m^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} F(\eta_0) \quad (5.93a)$$

$$\text{con, } F(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} \left( \sqrt{1 + \eta_0^2} - \sqrt{1 + \eta^2} \right)^2 \eta^2 d\eta \quad (5.93b)$$

Integrando la [5.93b](#) si ottiene

$$\begin{aligned}
 F(\eta_0) &= -\frac{1}{4}\eta_0 - \frac{1}{12}\eta_0^3 + \frac{1}{30}\eta_0^5 + \frac{1}{4}\sqrt{1+\eta_0^2} \ln\left(\eta_0 + \sqrt{1+\eta_0^2}\right) \\
 &= -\frac{1}{4}\eta_0 - \frac{1}{12}\eta_0^3 + \frac{1}{30}\eta_0^5 + \frac{1}{4}\sqrt{1+\eta_0^2} \operatorname{senh}^{-1}\eta_0
 \end{aligned}
 \tag{5.94}$$

Sviluppando il logaritmo si ottengono termini con potenze di  $\eta_0$  che nell'espressione per  $F(\eta_0)$  cancellano quelli delle potenze inferiori ad  $\eta_0^7$ . Si individuano quindi per  $F(\eta_0)$  le seguenti forme limite :

$$\eta_0 > 5 : F(\eta_0) \longrightarrow \frac{1}{30} \eta_0^5 \tag{5.95a}$$

$$\eta_0 < 0.5 : F(\eta_0) \longrightarrow \frac{2}{105} \eta_0^7 \tag{5.95b}$$

Alcuni valori di  $F(\eta_0)$ , calcolati nell'ipotesi che la funzione d'onda  $\psi$  sia quella di un'onda piana, sono riportati nella tabella seguente.

$\eta_0$	$F(\eta_0)$
0.5	0.00012
1	0.0115
2	0.557
3	6.23
4	29.5

La [5.95a](#), che descrive la condizione in cui gli elettroni sono decisamente relativistici, e quindi per essi si ha  $p_e \approx E$ , equivale sostanzialmente alla legge di Sargent [5.76](#).

Le approssimazioni fatte finora sono un pó drastiche, sia per l'elemento di matrice che per le funzioni d'onda dell'elettrone o del positrone emessi. Considerarle delle semplici onde piane significa trascurare l'interazione coulombiana dell'elettrone o del positrone col nucleo. Per tenerne conto si introduce, nell'espressione integranda per ottenere  $\lambda_\beta$ , un fattore  $f(\pm Z, \eta_0)$  dipendente dal nucleo e dall'energia dell'elettrone. La funzione integrata risultante dipende anch'essa da  $Z$  e si scrive  $F(\pm Z, \eta_0)$ , che per piccoli valori di  $Z$  si riduce alla  $F(\pm Z, \eta_0) \approx F(\eta_0)$  introdotta sopra. Si ha quindi per  $\lambda_\beta$

$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 m^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} |\mathcal{M}|^2 F(\pm Z, \eta_0) \tag{5.96}$$

per cui se il modulo quadro dell'elemento di matrice si mantiene  $\sim$  costante, anche il prodotto  $F \cdot \tau \simeq$  costante.

Nei decadimenti  $\beta$  con  $E_{tot} \gg m_e c^2$ , l'impulso dell'elettrone emesso è mediamente grande e si trova  $F(\pm Z, \eta_0) \approx 1$ .

$F(\pm Z, \eta_0)$  è significativamente diversa dall'unità soltanto per valori grandi di  $Z$  e piccoli delle energie.

### Forma degli spettri

Dalla [5.96](#), ricordando la [5.91](#), si può ottenere la forma dello spettro d'emissione  $\beta$ .

L'equazione [5.91](#) per la probabilità d'emissione di un elettrone nell'intervallo d'impulso  $dp_e$  dipende da  $p_e$  tramite il fattore

$$\left[ \left( \sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 \right]$$

che ha la forma mostrata in figura [5.17](#). La curva si avvicina a  $P(p_e) = 0$

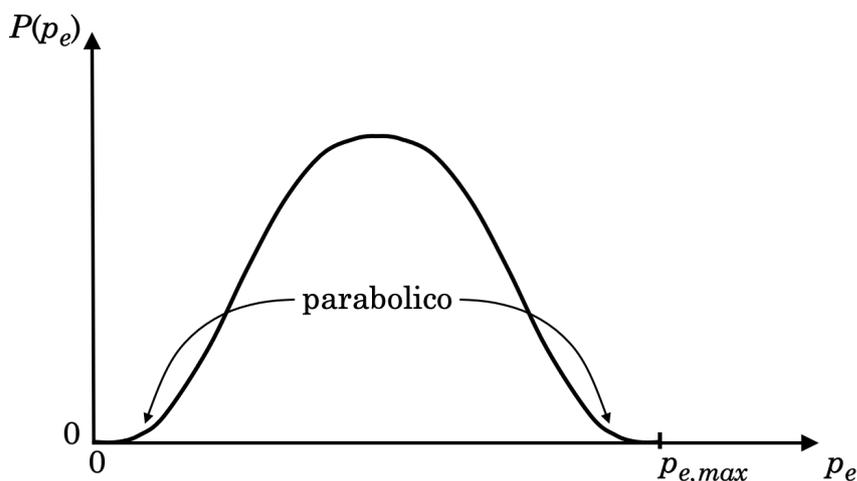


Figura 5.17: Forma dello spettro  $\beta$  a impulsi bassi e alti.

con andamento parabolico in prossimità dello 0, in quanto il quadrato della differenza fra le radici è circa costante per piccolissimi valori di  $p_e$ .

Inoltre raggiunge  $P(p_e) = 0$  sempre con andamento parabolico anche all'avvicinarsi di  $p_e$  a  $p_{e,max}$ . Infatti in tal caso  $p_e^2$  è circa costante e sviluppando in serie di Taylor attorno a  $p_{e,max}$  la seconda radice, si ha

$$c\sqrt{m^2 c^2 + p_e^2} = c\sqrt{m^2 c^2 + p_{e,max}^2} + c\frac{(p_e - p_{e,max})p_{e,max}}{\sqrt{m^2 c^2 + p_{e,max}^2}} + \dots$$

e prendendo il limite per  $p_e \rightarrow p_{e,max}$

$$\lim_{p_e \rightarrow p_{e,max}} \left( \sqrt{\dots} - \sqrt{\dots} \right)^2 = \frac{c^2 (p_e - p_{e,max})^2}{m^2 c^2 + p_{e,max}^2} p_{e,max}^2 \quad (5.97)$$

Bisogna poi tener conto delle diverse perturbazioni causate dalla carica nucleare sulle funzioni d'onda dell'elettrone o del positrone: la prima viene accresciuta e la seconda ridotta rispetto all'assenza di carica nucleare.

L'effetto è inoltre di portata maggiore a energie minori. Per gli elettroni la correzione in prossimità di  $p_e = 0$  è circa proporzionale ad  $1/p_e$ , da cui si deduce che l'andamento per elettroni del decadimento  $\beta^-$  in prossimità di  $p_e = 0$  è lineare.

Per positroni del decadimento  $\beta^+$  l'effetto è opposto, come mostrato in figura [5.18](#).

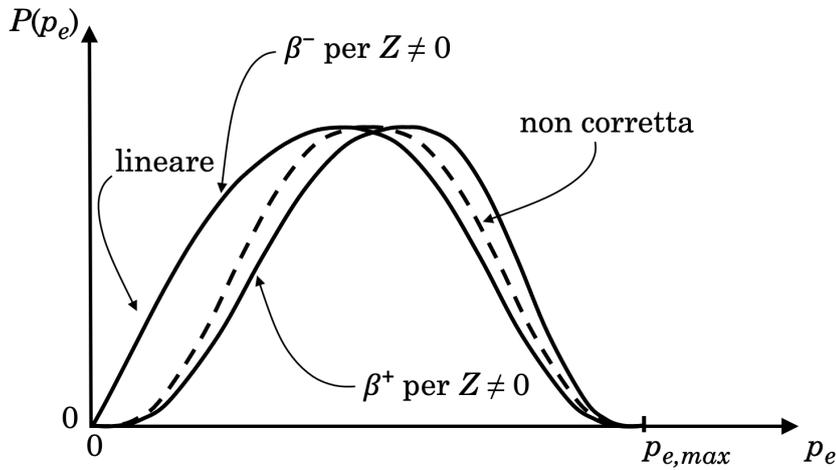


Figura 5.18: Forma degli spettri  $\beta^+$  e  $\beta^-$ .

Gli andamenti corrispondenti in funzione dell'energia cinetica  $E$  degli elettroni o dei positroni di decadimento sono dati, per  $E \ll m_e c^2$ , da

$$\left( \sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 dp_e \propto \left( E_{\beta}^{max} - E \right)^2 \sqrt{E} dE$$

osservando che  $p_e^2 dp_e = (p/2) dp_e^2 \propto \sqrt{E} dE$ .

### Massa del neutrino

Nell'ipotesi fatta da Fermi che la massa del neutrino sia nulla ( $m_\nu = 0$ ), l'andamento della distribuzione verso l'estremo superiore dei valori di  $p_e$  è dunque quello di un avvicinamento parabolico dolce al valore nullo. Se viceversa la massa del neutrino non fosse nulla si può provare (H. Bethe) che tale avvicinamento avverrebbe con derivata decrescente tendente a  $-\infty$ , tanto più marcato quanto maggiore fosse la massa del neutrino. I dati sperimentali sono compatibili con  $m_\nu = 0$  o comunque con una  $m_\nu$  inferiore a quanto rilevabile dai dati stessi.

Ciò rende chiaramente difficoltoso individuare sperimentalmente con precisione l'estremo superiore  $p_{e,max}$  dei valori di  $p_e$ , ovvero il punto in cui la distribuzione incontra l'asse delle ascisse, e quindi anche  $E_{e,max}$ .

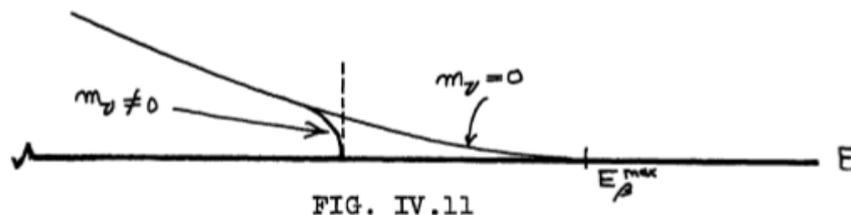


Figura 5.19: Massa del neutrino e forma dello spettro  $\beta$ .

### 5.3.6 Emissione ritardata di nucleoni

Gli stati eccitati nucleari popolatisi in seguito a decadimento  $\beta$  non si diseccitano sempre soltanto emettendo raggi  $\gamma$ . Occasionalmente essi risultano instabili anche per emissione di uno o più nucleoni. Il processo ha luogo in

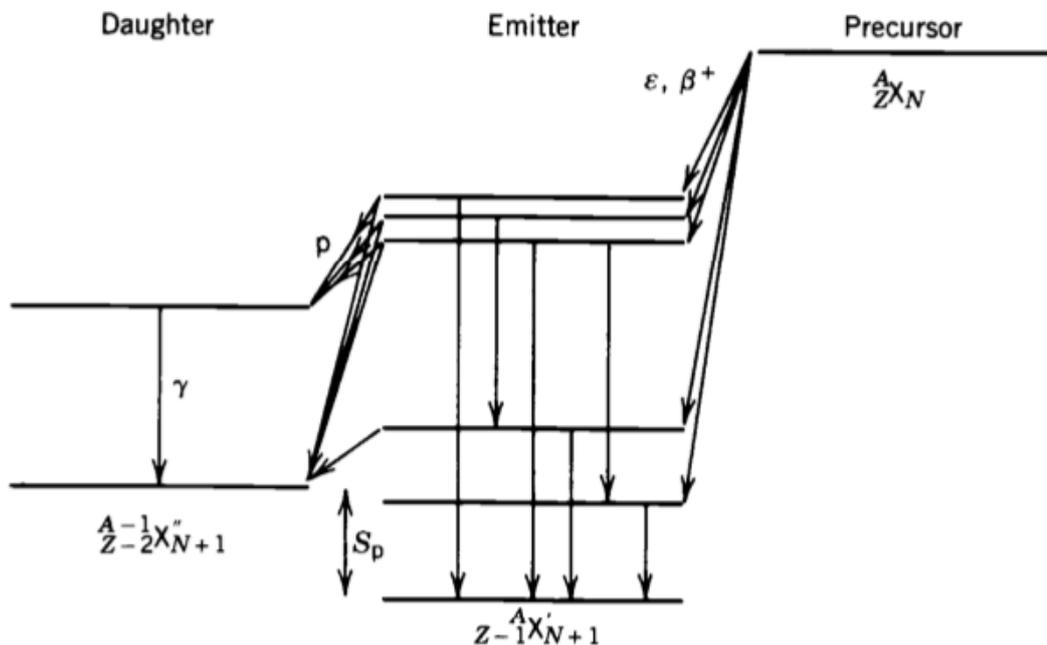


Figura 5.20: Schematizzazione dell'emissione ritardata di nucleoni stimolata da decadimento  $\beta$ .

tempi rapidissimi, competitivi con l'emissione  $\gamma$ , e nel complesso l'emissione d'un nucleone avviene con tempi caratteristici del decadimento  $\beta$ .

Le energie in gioco nel decadimento di nuclidi situati, per ogni valore di  $A$ , solo una o due posizioni oltre l'isobaro più stabile, sono piccole ( $1 \div 2$  MeV), e l'emissione di nucleoni singoli è quindi proibita energeticamente. Lontano dalla valle di stabilità le energie associate ai decadimenti possono però essere abbastanza grandi da popolare stati maggiormente eccitati che decadono poi con emissione di nucleoni (figura [5.20](#)).

Il nucleo *genitore* che decade  $\beta$  è detto precursore.

## 5.4 Radioattività $\gamma$

L'emissione di radioattività  $\gamma$  dai nuclei è un processo analogo a quello dell'emissione di raggi X dagli atomi. Si tratta della diseccitazione di uno stato nucleare eccitato verso uno stato meno eccitato, o verso lo stato fondamentale, tramite l'emissione di un fotone  $\gamma$  di energia pari alla differenza fra quelle dei due stati, a meno dell'energia di rinculo del nucleo emittente.

L'emissione  $\gamma$  si osserva da tutti i nuclei che presentano stati legati eccitati ( $A > 5$ ), e tipicamente segue decadimenti  $\alpha$  o  $\beta$  in quanto questi spesso lasciano in uno stato eccitato il nucleo figlio.

Le vite medie che caratterizzano i decadimenti  $\gamma$  sono generalmente inferiori a  $10^{-9}$  s, ma occasionalmente se ne possono presentare di più o molto più lunghe. Queste ultime caratterizzano stati *isomerici* o comunque *metastabili*.

Un processo che spesso compete con l'emissione  $\gamma$  è la *conversione interna*.

### 5.4.1 Energetica dei decadimenti $\gamma$

Si consideri il decadimento  $\gamma$  di un nucleo di massa  $M$  a riposo, dallo stato eccitato  $E_i$  allo stato finale  $E_f$ . Per la conservazione dell'impulso il nucleo finale non sarà a riposo ma avrà un impulso di rinculo  $p_R$  e una corrispondente energia cinetica di rinculo  $E_R$ , che si assume ragionevolmente non relativistica.

Conservazione di impulso ed energia totali danno

$$E_i = E_f + E_\gamma + E_R \quad (5.98)$$

$$0 = \mathbf{p}_R + \mathbf{p}_\gamma$$

Quindi  $p_R = p_\gamma$ , da cui, ponendo  $\Delta E = E_i - E_f$  e ricordando che  $E_\gamma = cp_\gamma$

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \quad (5.99)$$

da cui

$$E_\gamma = Mc^2 \left[ -1 \pm \left( 1 + 2 \frac{\Delta E}{Mc^2} \right)^{1/2} \right] \quad (5.100)$$

I valori di  $\Delta E$  sono tipicamente dell'ordine del MeV mentre le energie a riposo sono dell'ordine di  $A \times 10^3$  MeV. In buona approssimazione si può quindi sviluppare la radice fermandosi al terzo termine ottenendo

$$E_\gamma \simeq \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2} \quad (5.101)$$

Il termine legato al rinculo del nucleo è solitamente trascurabile, dell'ordine di  $10^{-5}$  e quindi inferiore alle incertezze sperimentali tipiche delle misure d'energia. Solo nel caso dell'effetto Mössbauer non si può trascurare il termine di rinculo.

### 5.4.2 Regole di selezione per decadimenti $\gamma$

Un nucleo può avere a disposizione molti stati eccitati. In figura 5.21 sono schematicamente illustrati i livelli energetici di un nucleo pari-pari con  $A \approx 100$ . Al di sopra dello stato fondamentale vi sono stati discreti indivi-

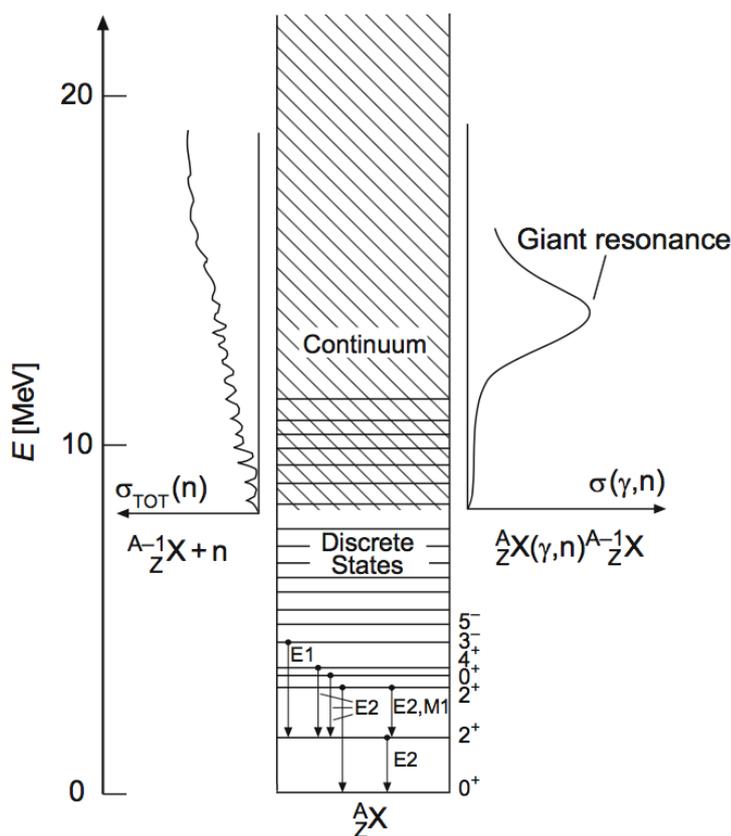


Figura 5.21: ... Stati Gamma ...

duali contraddistinti da specifici numeri quantici  $J^P$ . L'eccitazione di nuclei pari-pari corrisponde generalmente alla "rottura" del legame fra una coppia di nucleoni e richiede energie di circa  $1 \div 2$  MeV. Nuclei pari-pari con  $A \gtrsim 40$ , hanno raramente energie d'eccitazione inferiori ai 2 MeV; gli stati collettivi in nuclei deformati sono un'eccezione a questo e non possono essere spiegati in termini dell'eccitazione di una singola particella. Nei nuclei dispari-pari e dispari-dispari, il numero di stati eccitati a basse energie, tipicamente poche centinaia di keV, è considerevolmente maggiore.

Gli stati di nuclei eccitati a bassa energia decadono solitamente emettendo radiazione elettromagnetica. Una trattazione raffinata del fenomeno richiede l'uso della teoria dei campi quantizzati della radiazione elettromagnetica, di cui si utilizzeranno qui alcuni risultati rimandando a corsi successivi per

la loro deduzione.

Si può descrivere il fenomeno ricorrendo allo sviluppo in serie di una sovrapposizione di diversi termini multipolari, ognuno con la propria caratteristica distribuzione angolare. La radiazione elettrica di dipolo, quadrupolo, ottupolo, ecc. è indicata con E1, E2, E3, ecc.; similmente la corrispondente radiazione multipolare magnetica è indicata con M1, M2, M3, ecc.

La conservazione del momento angolare e della parità, caratteristiche dell'interazione elettromagnetica, determinano quali multipolarità siano permesse nella transizione: un fotone di multipolarità  $E\ell$  ha momento angolare  $\ell$  e parità  $(-1)^\ell$ , un fotone di multipolarità  $M\ell$  ha momento angolare  $\ell$  e parità  $(-1)^{\ell+1}$ . In tabella 5.1 sono riportate alcune regole di selezione per transizioni elettromagnetiche con le quali si può costruire un insieme di transizioni permesse quali ad esempio quelle in tabella 5.2. In una transizione  $J_i \rightarrow J_f$

Tabella 5.1: Regole di selezione per decadimenti  $\gamma$

Multipolarità	Elettrica			Magnetica		
	$E\ell$	$ \Delta J $	$\Delta P$	$M\ell$	$ \Delta J $	$\Delta P$
Dipolo	E1	1	-	M1	1	+
Quadrupolo	E2	2	+	M2	2	-
Ottupolo	E3	3	-	M3	3	+

Tabella 5.2: Esempi di transizioni nucleari elettromagnetiche

$J_i^{P_i}$	$J_f^{P_f}$	$\Delta P$	$L$	Transizioni permesse
$0^+$	$0^+$	No	-	Nessuna
$(1/2)^+$	$(1/2)^-$	Sì	1	E1
$1^+$	$0^+$	No	1	M1
$2^+$	$0^+$	No	2	E2
$(3/2)^-$	$(1/2)^+$	Sì	1, 2	E1, M2
$2^+$	$1^+$	No	1, 2, 3	M1, E2, M3
$(3/2)^-$	$(5/2)^+$	Sì	1, 2, 3, 4	E1, M2, E3, M4

la conservazione del momento angolare implica che sia soddisfatta la disuguaglianza triangolare  $|J_i - J_f| \leq \ell \leq J_i + J_f$ .

La vita media per emissione  $\gamma$  di uno stato eccitato dipende fortemente dalla multipolarità da cui avviene l'emissione ed è tanto più breve quanto più basso è il livello di multipolarità. Una transizione magnetica  $M\ell$  ha approssimativamente la stessa probabilità di una transizione elettrica  $E(\ell + 1)$ . Una transizione  $3^+ \rightarrow 1^+$ , ad esempio, è in linea di principio una miscela

di E2, M3 ed E4, ma risulta facilmente dominata dal contributo E2. Una transizione  $3^+ \rightarrow 2^+$  consiste usualmente in una miscela di M1 ed E2 ed E4, anche se sono possibili transizioni M3, E4 ed M5.

In una serie di stati eccitati  $0^+$ ,  $2^+$ ,  $4^+$ , il decadimento più probabile consiste in una cascata di transizioni E2 del tipo  $4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$ , e non in una singola transizione E4 del tipo  $4^+ \rightarrow 0^+$ .

La vita media di uno stato eccitato e la distribuzione angolare della radiazione elettromagnetica emessa costituiscono delle "firme" della multipolarità delle transizioni, che a loro volta rivelano spin e parità dei livelli eccitati del nucleo.

La probabilità di decadimento dipende fortemente anche dall'energia: per radiazione di multipolarità  $\ell$ , essa è infatti proporzionale ad  $E_\gamma^{2\ell+1}$ .

L'energia d'eccitazione di un nucleo può talvolta essere anche trasferita a un elettrone di un orbitale atomico tramite un processo detto *conversione interna*, in cui si immagina coinvolto un fotone *virtuale*, che non abbia dunque le restrizioni sui possibili stati di polarizzazione di un fotone reale; esso diviene un processo rilevante in transizioni per le quali risulta soppressa l'emissione  $\gamma$ , come nel caso di alta multipolarità o bassa energia d'eccitazione, e il nucleo coinvolto è pesante, per cui cresce la probabilità di una sovrapposizione spaziale non trascurabile fra le funzioni d'onda del nucleo e degli elettroni atomici.

La transizione  $0^+ \rightarrow 0^+$  non può aver luogo tramite l'emissione di un fotone, se quindi un nucleo è in uno stato eccitato  $0^+$ , e anche tutti i suoi livelli eccitati più bassi sono del tipo  $0^+$ , come per  $^{16}\text{O}$  o  $^{40}\text{Ca}$ , allora il suo decadimento dovrà procedere in modo diverso. Ciò può ad esempio avvenire per conversione interna, con l'emissione di due fotoni o se energeticamente permesso, con l'emissione di una coppia  $e^+e^-$ . La conservazione della parità vieta la conversione fra due livelli con  $J = 0$  e parità opposte.

La vita media di uno stato nucleare eccitato varia tipicamente fra  $10^{-9}$  e  $10^{-15}$  s, che corrispondono a stati con larghezze inferiori a 1 eV.

Gli stati che possono decadere soltanto attraverso transizioni a bassa energia e alta multipolarità hanno vite medie considerevolmente più lunghe. Essi sono detti *isomeri* e vengono indicati con una  $m$  in apice al simbolo dell'elemento. Un esempio estremo di isomero è il secondo stato eccitato di  $^{110}\text{Ag}$ , con energia d'eccitazione di 117.7 keV e  $J^P = 6^+$ . Esso si diseccita attraverso una transizione M4 nel primo stato eccitato (1.3 keV;  $2^-$ ), in quanto un decadimento diretto verso lo stato fondamentale  $1^+$  è ancor più improbabile, e la vita media  $\tau$  di  $^{110}\text{Ag}^m$  è pari a 339 giorni.

Un nucleo in uno stato eccitato  $^A_Z\text{X}^*$  può decadere allo stato fondamentale  $^A_Z\text{X}$  senza emettere radiazione  $\gamma$  ma cedendo l'energia d'eccitazione a un elettrone atomico tramite il processo di conversione interna. La vita media di quello stato eccitato è allora inferiore a quanto previsto dal solo processo

di decadimento radiativo, dato che le probabilità di decadimento si sommano

$$\lambda_{tot} = \lambda_{\gamma} + \lambda_c \quad (5.102)$$

essendo  $\lambda_c$  la probabilità di decadimento per conversione interna.