

## Capitolo 6

# Processi d'urto

Gli esperimenti che coinvolgono processi d'urto sono strumenti fondamentali d'indagine nella fisica nucleare e delle particelle.

In un tipico esperimento d'urto si individuano un oggetto da studiare che funge solitamente da *bersaglio* e dei *proiettili*, sotto forma di fascio incidente. L'individuazione di proiettile e bersaglio non è però sempre univoca, a volte appartengono entrambi a fasci collidenti l'uno contro l'altro e in certi casi si creano fasci di *bersagli* che vengono accelerati contro *proiettili*.

Talvolta le misure sperimentali su reazioni nucleari non permettono di rivelare tutti i prodotti di reazione: quando se ne rivelano solo alcuni si parla di misure *inclusive*. Se al contrario tutti i prodotti di reazione vengono rivelati e identificati si parla di misure *esclusive*.

Le reazioni nucleari innescate da processi d'urto hanno luogo sempre nel rispetto di un certo insieme di leggi di conservazione. Inoltre può accadere che nel corso d'una reazione particelle del fascio presenti nel canale d'ingresso non si ritrovino nel canale d'uscita e che l'equivalente energetico della loro massa, e/o parte della loro energia cinetica, si trasformino in altre particelle e/o eccitazione dei prodotti presenti nel canale d'uscita della reazione.

### 6.1 Sezioni d'urto

La misura dei tassi di reazione in esperimenti d'urto, detti anche di *scattering*, così come degli spettri energetici e delle distribuzioni angolari dei prodotti di reazione, fornisce informazioni sulle caratteristiche dinamiche delle interazioni, quindi sulla forma del potenziale d'interazione e sull'intensità della forza d'accoppiamento.

Si introduce il concetto di sezione d'urto che può essere considerata una misura della probabilità relativa che una certa reazione abbia luogo. Si immagini una situazione in cui si ha un fascio collimato di particelle  $a$  incidenti su un bersaglio macroscopico contenente nuclei  $X$ . Sia

$$I_a = dN_a/dt = n_a v_a S \quad (6.1)$$

l'intensità della corrente di particelle  $a$  incidenti per unità di tempo, con  $n_a$  la loro densità nel fascio,  $v_a$  la loro velocità ed  $S$  l'area della sezione retta del fascio incidente sul bersaglio macroscopico. Si può introdurre anche la densità di flusso incidente  $j_a = n_a v_a$ .

Detto  $N_t$  il numero di nuclei bersaglio per unità d'area ed  $R_b$  il rateo con cui appaiono le particelle in uscita dalla reazione, si definisce la *sezione d'urto*

$$\sigma = \frac{R_b}{I_a N_t} \quad (6.2)$$

che risulta avere quindi le dimensioni di un'area per nucleo. Il suo valore può essere anche molto diverso da quello dell'area geometrica del "disco di materia" del nucleo bersaglio. Si pensa quindi alla sezione d'urto per una certa reazione come una quantità che ha le dimensioni di un'area efficace, proporzionale alla probabilità che la reazione in questione abbia luogo.

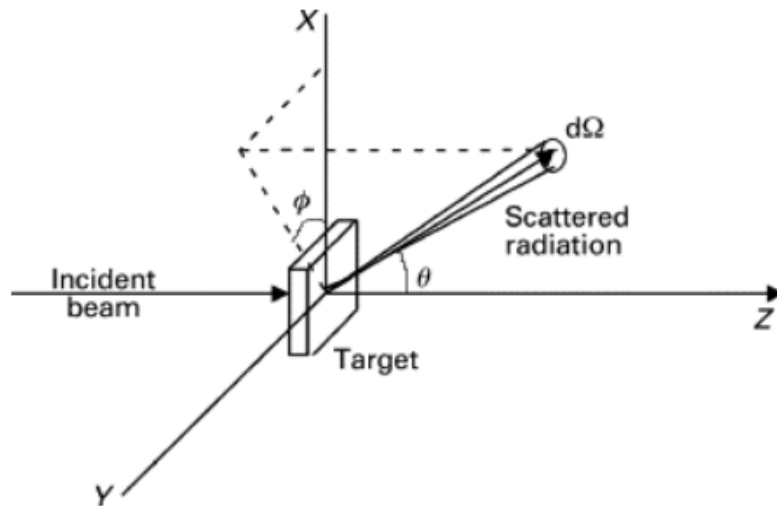


Figura 6.1: Geometria di scattering su bersaglio fisso.

Si definisce il *tasso di reazione*  $dN/dt$  come il numero di particelle che attraversando nell'unità di tempo l'unità d'area di un bersaglio interagiscono con esso. In tal caso vale

$$\frac{dN}{dt} = n_a v_a N_t \sigma \quad (6.3)$$

Si supponga d'avere un rivelatore sistemato in modo da rivelare particelle  $b$  prodotte dalle interazioni tra particelle del fascio e bersagli, entro l'angolo solido  $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ , centrato nella direzione individuata dagli angoli  $(\vartheta, \varphi)$  rispetto al bersaglio  $X$ .

Siano  $dR_b$  la frazione di rateo intercettata dal rivelatore e conseguentemente  $d\sigma$  la frazione di sezione d'urto da esso esplorata.

Considerando che le particelle uscenti non saranno necessariamente emesse in modo uniforme in tutte le direzioni, ma potranno presentare una distribuzione angolare dipendente sia da  $\vartheta$  che da  $\varphi$ , indicando con  $r(\vartheta, \varphi)$  tale distribuzione si ha  $dR_b = r(\vartheta, \varphi)d\Omega/4\pi$ , da cui

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r(\vartheta, \varphi)}{4\pi I_a N_t} \quad (6.4)$$

che è detta *sezione d'urto differenziale*, spesso indicata come  $\sigma(\vartheta, \varphi)$  (talvolta impropriamente come  $\sigma(\vartheta)$ ). La sezione d'urto di reazione  $\sigma$  si trova quindi integrando la  $d\sigma/d\Omega$  su tutto l'angolo solido

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\varphi \quad (6.5)$$

Spesso si è anche interessati a conoscere la probabilità di trovare particelle diffuse con un'energia compresa in un certo *range*  $dE_c$ , e in tal caso si considera la *sezione d'urto doppiamente differenziale*  $d^2\sigma/dE_b d\Omega$ .

**Table 11.1** Reaction Cross Sections

Cross Sections	Symbol	Technique	Possible Application
Total	$\sigma_t$	Attenuation of beam	Shielding
Reaction	$\sigma$	Integrate over all angles and all energies of b (all excited states of Y)	Production of radioisotope Y in a nuclear reaction
Differential (Angular)	$d\sigma/d\Omega$	Observe b at $(\theta, \phi)$ but integrate over all energies	Formation of beam of b particles in a certain direction (or recoil of Y in a certain direction)
Differential (Energy)	$d\sigma/dE$	Don't observe b, but observe excitation of Y by subsequent $\gamma$ emission	Study of decay of excited states of Y
Doubly differential	$d^2\sigma/dE_b d\Omega$	Observe b at $(\theta, \phi)$ at a specific energy	Information on excited states of Y by angular distribution of b

Figura 6.2: Sezioni d'urto ...

Sostanzialmente trattando di una specifica reazione, il significato esatto del

termine *sezione d'urto* dipende da cosa esattamente si misura. Nello schema sono richiamati diversi tipi di misure di scattering, come li si attua, le applicazioni possibili e la tipologie di sezione d'urto associata.

Si consideri ad esempio il caso dell'attenuazione dell'intensità di un fascio incidente per effetto dell'interazione con un certo bersaglio; in tal caso la sezione d'urto considerata è quella totale  $\sigma_{Tot}$  senza distinzione per le specifiche tipologie d'interazione fra proiettili e bersagli.

Si possono voler distinguere, fra tutte le tipologie d'interazione possibili, quelle di tipo anelastico da quelle elastiche, scrivendo allora

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{el} + \sigma_{anel} \quad (6.6)$$

### 6.1.1 Lunghezza di attenuazione

Si suppone un fascio di intensità iniziale  $I_0$  incidente su un bersaglio spesso di densità  $\rho \text{ kg} \times \text{m}^{-3}$ . Sia  $z$  la lunghezza del percorso compiuto dalle particelle del fascio penetrate nel bersaglio e si vuole determinare l'intensità residua  $I(z)$  del fascio in funzione di  $z$ . Si consideri un generico spessore infinitesimo di bersaglio compreso fra  $z$  e  $z+dz$  e sia  $dR_i$  il numero totale di interazioni per unità di tempo fra particelle del fascio e nuclei del bersaglio nello spessore  $dz$ . La corrispondente variazione dell'intensità del fascio sarà dunque  $dI(z) = -dR_i$ .

La densità di flusso incidente in funzione di  $z$  è

$$j_a(z) = \frac{I(z)}{S}$$

Detta  $n_t$  la densità volumetrica dei nuclei bersaglio si ha quindi

$$dI(z) = -dR_i = -\sigma_{Tot} j_a(z) S dN_t = -\sigma_{Tot} \frac{I(z)}{S} n_t S dz$$

da cui

$$\frac{dI(z)}{I(z)} = -n_t \sigma_{Tot} dz$$

e infine

$$I(z) = I_0 e^{-n_t z \sigma_{Tot}} \quad (6.7)$$

Si definisce la *lunghezza di attenuazione*  $L_{att}$  come la distanza  $z$  percorsa dal fascio nel bersaglio, dopo la quale l'intensità del fascio stesso si è ridotta di un fattore  $1/e$ ,

$$L_{att} = \frac{1}{n_t \sigma_{Tot}} \quad (6.8)$$

Esplicitando la relazione fra  $\rho$  ed  $n_t$ , detti  $N_0$  il numero di Avogadro,  $A$  la massa in grammi di una mole di nuclei bersaglio si ha, ricordando che  $1\text{kg}/\text{m}^3 = 10^{-3}\text{g}/\text{cm}^3$

$$n_t = \frac{\rho N_0 10^{-3}}{A}$$

### 6.1.2 Luminosità

Un'altra grandezza utile è la "luminosità"  $\mathcal{L}$ , definita come il numero di urti potenziali nell'unità di tempo fra le particelle di un fascio incidente e i centri diffusori di un bersaglio, ovvero  $I_a N_t S = I_a n_t \Delta z S$ . Dalla [6.2](#) si ha

$$\mathcal{L} = I_a N_t S = \frac{R_b}{\sigma} \quad (6.9)$$

per cui la luminosità ha le dimensioni dell'inverso di un'area per l'inverso di un tempo:  $[\mathcal{L}] = [m]^{-2} [s]^{-1}$ .

Nel caso si tratti non di un fascio collidente contro un bersaglio fisso ma dell'interazione di due fasci, costituiti da successivi pacchetti di particelle equispaziati e portati a collidere l'uno contro l'altro in un anello di accumulazione la cui circonferenza sia lunga  $C$ , si definisce la luminosità secondo il seguente ragionamento: si supponga vi siano  $k$  pacchetti di particelle, circolanti ognuno con velocità di modulo  $v$ , e si indichino rispettivamente con  $N_a$  ed  $N_t$  i numeri di particelle presenti nei pacchetti circolanti in un verso e nel verso opposto. Opportuni campi magnetici li portano a collidere in un particolare punto della traiettoria circolare un numero pari a  $(k v)/C$  volte al secondo. La luminosità risulta quindi

$$\mathcal{L} = \frac{(N_a N_t k v)/C}{S} \quad (6.10)$$

dove  $S$  rappresenta l'area della sezione retta del volume d'intersezione dei fasci in corrispondenza della zona dell'urto.

Naturalmente la luminosità aumenta al migliorare della focalizzazione dei fasci entro un'area  $S$  che in questo caso appunto diminuisce in corrispondenza della zona d'interazione.

Si definisce anche la *luminosità integrata* come

$$\mathcal{L}_{int} = \int \mathcal{L} dt \quad (6.11)$$

Il numero  $N(\Delta t)$  di interazioni osservabili in un certo intervallo di tempo  $\Delta t$  coincide quindi col prodotto fra la luminosità integrata nell'arco di tempo  $\Delta t$  e la relativa sezione d'urto totale  $\sigma_{Tot}$

$$N(\Delta t) = \mathcal{L}_{int} \cdot \sigma_{Tot} \quad (6.12)$$

### 6.1.3 Sezione d'urto in funzione dell'impulso

A seconda del problema studiato, lo stato finale  $f$  può essere caratterizzato da diverse variabili associate alla particella diffusa. Una quantità tipicamente considerata è l'impulso  $\mathbf{p}$  della particella diffusa nello stato finale. In

tal caso la sezione d'urto totale  $\sigma_{Tot}$  del processo si ottiene integrando la sezione d'urto differenziale  $d\sigma/d\mathbf{p}$  su tutti i possibili valori di  $\mathbf{p}$

$$\sigma_{Tot} = \int_f \frac{d\sigma}{d\mathbf{p}} d\mathbf{p} \quad (6.13)$$

La quantità  $d\mathbf{p}$  può poi essere esplicitata in diverse coordinate, a seconda della migliore geometria nella quale trattare il problema specifico

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &\equiv dp'_x dp'_y dp'_z && \text{cartesiane ortogonali} \\ &\equiv p'^2 dp' \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi' && \text{sferiche} \\ &\equiv p'_\perp dp'_\perp dp'_\parallel d\varphi' && \text{cilindriche} \end{aligned} \quad (6.14)$$

dove con i simboli "||", " $\perp$ " e " $\varphi$ " si intendono rispettivamente le coordinate assiale, radiale e angolare, come anche trattato nell'Appendice [A.1](#)

#### 6.1.4 Sezione d'urto invariante

Il sistema di riferimento naturale per un processo d'urto è quello del centro di massa delle particelle che interagiscono, e può non coincidere col sistema di riferimento in cui si effettua la misura.

Le caratteristiche di un processo non devono del resto dipendere dal particolare sistema di riferimento scelto per la misura, infatti la sezione d'urto è definita sostanzialmente come una superficie ortogonale alla direzione del moto delle particelle incidenti, ed è quindi un invariante relativistico.

Ricordando le leggi di trasformazione delle variabili dal sistema del laboratorio al sistema del centro di massa, come riportato in Appendice [A.1](#), si può esprimere la sezione d'urto differenziale in funzione di variabili invarianti.

Le componenti dell'impulso si trasformano come indicato dalla [A.23](#) e quindi  $d\mathbf{p}$  non è un invariante, come non lo è  $d\mathbf{p}_\parallel$ , mentre invece lo sono  $d\mathbf{p}_\perp$  e  $d\sigma$ .

Il rapporto  $d\mathbf{p}_\parallel/E$  è invariante, essendo  $(E/c) = (p_\perp^2 + p_\parallel^2 + m^2c^2)^{1/2}$ ,

$$\begin{aligned} dp'_\parallel &= \gamma (dp_\parallel - \beta dE) = \gamma dp_\parallel \left(1 - \frac{\beta p_\parallel}{E}\right) = \\ &= \frac{\gamma E - \beta \gamma p_\parallel}{E} dp_\parallel = \frac{E'}{E} dp_\parallel \end{aligned} \quad (6.15)$$

Di conseguenza la *sezione d'urto invariante*

$$E \frac{d\sigma}{d\mathbf{p}} \quad (6.16)$$

è indipendente dal sistema di riferimento scelto per effettuare la misura.

### 6.1.5 Probabilità di transizione e sezione d'urto

La conoscenza della sezione d'urto differenziale di un processo che conduce un sistema dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$ , permette di calcolare la probabilità di transizione nell'unità di tempo  $dP_{i \rightarrow f}/dt$  associata ad ogni particella bersaglio

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP_{i \rightarrow f}}{dt} \frac{V}{v_a} \quad (6.17)$$

essendo,  $V = A \times \Delta z$  il volume efficace del bersaglio e  $v_a$  il modulo della velocità di ogni particella incidente.

## 6.2 Approccio quantistico al concetto di sezione d'urto

Il tasso di reazioni, fissate l'intensità del fascio incidente e la densità di nuclei nel bersaglio, dipende dalle proprietà del potenziale d'interazione e dal numero di stati finali accessibili alla reazione.

Il potenziale d'interazione può venir descritto tramite l'operatore Hamiltoniano  $\mathcal{H}_{int}$ . In una reazione il ruolo di questo potenziale è di trasformare la funzione d'onda  $\psi_i$  dello stato iniziale del sistema, nella funzione d'onda dello stato finale del sistema,  $\psi_f$ .

Il corrispondente *elemento della matrice di transizione*, detto anche *ampiezza di probabilità per la transizione*, è dato da

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \mathcal{H}_{int} \psi_i dV \quad (6.18)$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio, ovvero in pratica a tutto il volume utile di normalizzazione. Concettualmente l'approccio è equivalente per la trattazione dei decadimenti.

Per determinare il numero di stati finali disponibili, da cui anche dipende il tasso di reazione, si tiene conto che nello *spazio delle fasi*, lo spazio esadimensionale delle coordinate e degli impulsi, in accordo col principio di indeterminazione, ogni particella occupa un volume pari ad  $h^3 = (2\pi\hbar)^3$ .

Si consideri una particella diffusa entro un volume  $V$  con impulso di modulo compreso nell'intervallo fra  $p'$  e  $p' + dp'$  <sup>1</sup>. Ciò corrisponde, nello spazio degli impulsi, ad un guscio sferico con raggio minore  $p'$ , spessore  $dp'$  e volume pari a  $4\pi p'^2 dp'$ . Non considerando per ora processi che determinino modifiche dello stato di spin, si ottiene per il numero finale  $dn(p')$  di stati disponibili

$$dn(p') = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p'^2 dp' \quad (6.19)$$

<sup>1</sup>L'apice caratterizza qui la particella diffusa. Inoltre in questo paragrafo con  $p$  si intende il modulo del vettore impulso  $\mathbf{p}$ , e non il quadri-impulso.

Il volume  $V$  su cui normalizzare corrisponde al volume che contiene tutte le particelle incidenti durante il tempo  $t$  in cui hanno luogo gli urti, quindi

$$V = v_a t S = \frac{I_a t}{n_a} = \frac{N_a}{n_a} \quad (6.20)$$

essendo  $S$  l'area della sezione retta del fascio incidente,  $v_a$  il modulo della velocità di ogni particella del fascio,  $N_a$  la totalità delle particelle nel fascio,  $I_a$  ed  $n_a$  l'intensità del loro flusso incidente e la loro densità, supposte uniformi.

Ricordando che l'energia totale e l'impulso di una particella sono legate dalla relazione

$$dE' = v' dp' \quad (6.21)$$

dedotta in Appendice [A](#), si ha per la densità  $\rho(E')$  degli stati finali nell'intervallo energetico  $dE'$

$$\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{4\pi p'^2 V}{v' (2\pi\hbar)^3} \quad (6.22)$$

Il collegamento fra tasso di reazione, elemento della matrice di transizione e densità degli stati finali è dato dalla *seconda regola d'oro* di Fermi come per i decadimenti, dove il loro tasso è legato all'elemento della matrice di transizione e alla densità dei possibili stati finali.

Essa esprime qui il tasso di reazione  $W$  [2](#) per nucleo bersaglio e per particella del fascio incidente, quindi la quantità

$$W = \frac{dN(E)/dt}{N_b N_a} \quad (6.23)$$

dove si è esplicitata, per le particelle del fascio che hanno interagito, l'eventuale dipendenza dall'energia  $E$  in gioco nel canale d'ingresso della reazione. Sostituendo quindi in base alle [6.3](#) e [6.20](#) si ottiene

$$W = \frac{dN(E)/dt}{N_b N_a} = \frac{\sigma v_a}{V} \quad (6.24)$$

Di conseguenza si ha, per la sezione d'urto

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_a} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rho(E') V \quad (6.25)$$

Se si conosce il potenziale d'interazione la [6.25](#) permette quindi di calcolare la sezione d'urto  $\sigma$ . Altrimenti si possono utilizzare i valori misurati della sezione d'urto  $\sigma$  e l'equazione [6.25](#) per calcolare l'elemento di matrice  $\mathcal{M}_{fi}$ .

---

<sup>2</sup>Il tasso di reazioni è stato introdotto nel paragrafo [6.1](#)



## Capitolo 7

# Reazioni nucleari in regime non relativistico

Le prime reazioni nucleari indotte sono state prodotte nel laboratorio di Rutherford con particelle  $\alpha$  da sorgenti radioattive. In alcuni di questi primissimi esperimenti le particelle  $\alpha$  semplicemente rimbalzavano elasticamente sui nuclei bersaglio. In esperimenti successivi Rutherford osservò la modificazione o "trasmutazione" di specie nucleari come nella reazione studiata nel 1919



Il primo acceleratore di particelle in grado di indurre reazioni nucleari fu realizzato da Cockroft e Walton che nel 1930 osservarono la reazione



Le reazioni con energie fino a poche decine di MeV nel canale di reazione vengono dette a *bassa energia*. Quelle nell'intervallo 100 MeV  $\div$  1 GeV sono dette di *media energia* e comportano anche la produzione di mesoni e la trasformazione di protoni in neutroni e viceversa. A energie superiori si possono produrre anche altre particelle più massive e determinare riarrangiamenti dei quark che costituiscono i nucleoni interagenti.

Una tipica reazione nucleare  $a + X \rightarrow Y + b$  si scrive anche



con  $a$  il proiettile,  $X$  il nucleo bersaglio, eventualmente a riposo nel SL,  $Y$  e  $b$  i prodotti di reazione. Spesso  $Y$  è un prodotto pesante che si ferma nella struttura del bersaglio e non viene osservato direttamente, mentre  $b$  è leggero e può essere rivelato.

Se  $a$  è un raggio  $\gamma$  la reazione è detta *foto-nucleare*, se  $b$  è un raggio  $\gamma$  la reazione viene detta *cattura radiativa*.

Se  $a$  e  $b$  coincidono, e così pure  $X$  e  $Y$ , si ha diffusione *elastica* se  $Y$  e  $b$  sono nel loro stato fondamentale, *anelastica* se  $Y$  o  $b$  o entrambi sono in uno stato eccitato.

Talvolta  $a$  e  $b$  sono la stessa particella ma la reazione produce un ulteriore nucleone nel canale d'uscita, espulso dal nucleo  $X$  per effetto dell'urto; questo meccanismo di reazione è detto di *knockout*.

Vi sono *reazioni di trasferimento* in cui uno o più nucleoni vengono scambiati fra proiettile e bersaglio, come nel caso in cui un deutone incidente si trasforma in un protone o in un neutrone in uscita con la cessione di un neutrone o di un protone al bersaglio  $X$  per trasformarlo in  $Y$ .

Le reazioni possono essere classificate anche in base al meccanismo che le governa. Le reazioni di trasferimento appartengono ad esempio alle cosiddette *reazioni dirette*, nel corso delle quali solo pochi nucleoni, tipicamente del bersaglio, prendono effettivamente parte al processo, con la restante parte dei nucleoni del bersaglio che svolgono un ruolo di sostanziali spettatori passivi.

Questo tipo di reazioni porta alla rimozione o all'inserimento di singoli nucleoni, permettendo di studiare direttamente la struttura a shell dei nuclei. C'è poi l'altro caso estremo, detto meccanismo del *nucleo composto*, in cui proiettile e bersaglio si fondono per un breve lasso di tempo durante il processo, ripartendosi completamente l'energia disponibile prima che il sistema così costituito, detto appunto *nucleo composto*, si disecchi emettendo uno o più nucleoni in un modo che ricorda l'evaporazione di una molecola da un liquido caldo.

Fra questi due casi estremi trovano posto le cosiddette *reazioni di risonanza*, nel corso delle quali il proiettile forma col bersaglio uno stato *quasi-legato* prima dell'emissione del prodotto leggero della reazione.

## 7.1 Leggi di conservazione

La conservazione dell'*energia totale* e dell'*impulso totale* sono utilizzate per correlare le energie misurabili dei prodotti di reazione alle energie note delle particelle incidenti.

L'energia misurata di  $b$  permette di dedurre l'energia d'eccitazione degli stati di  $Y$  o la differenza di massa tra  $X$  e  $Y$ .

Nei processi a bassa energia, nel corso dei quali non hanno luogo produzione di pioni e/o riarrangiamenti dei quark costituenti, vale la conservazione separata del *numero di protoni e di neutroni*, che deriva dalla più generale conservazione del *numero barionico*.

Le interazioni deboli hanno un ruolo trascurabile sulla scala temporale caratteristica delle reazioni nucleari, che è dell'ordine di  $10^{-16} \div 10^{-22}$  s.

La conservazione del *momento angolare* aiuta nel correlare gli spin delle particelle del canale d'ingresso col momento angolare orbitale dei prodotti dei

canali d'uscita delle reazioni, deducibili da misure delle loro distribuzioni angolari. Si può così risalire agli spin degli specifici stati nucleari.

La conservazione della *parità* permette, noto il momento angolare orbitale dei prodotti di reazione, tramite la regola  $(-1)^\ell$  e dalla conoscenza degli altri valori di parità, di risalire alle parità incognite degli eventuali stati eccitati.

## 7.2 Energetica delle reazioni nucleari

La conservazione dell'energia totale per una reazione del tipo [7.3](#) si scrive

$$m_X c^2 + E_{k,X} + m_a c^2 + E_{k,a} = m_Y c^2 + E_{k,Y} + m_b c^2 + E_{k,b} \quad (7.4)$$

Dove  $E_k$  indica le energie cinetiche per le quali a basse energie si può utilizzare l'approssimazione non relativistica.

Si definisce il  $Q$ -valore di una reazione analogamente a quanto fatto per i decadimenti radioattivi

$$Q = (m_X + m_a - m_Y - m_b) c^2 \equiv E_{k,Y} + E_{k,b} - E_{k,X} - E_{k,a} \quad (7.5)$$

Il  $Q$ -valore può risultare positivo, negativo o nullo.

Se  $Q > 0$  la reazione si dice *eso-energetica* o *esotermica* e parte della massa del sistema iniziale, ovvero della sua energia di legame, è stata trasformata in energia cinetica dei prodotti di reazione.

Se  $Q < 0$  la reazione si dice *endoenergetica* o *endotermica* e in tal caso parte dell'energia cinetica presente nel canale d'ingresso è stata convertita in massa o in energia di legame dei prodotti di reazione.

Le relazioni [7.4](#) e [7.5](#) valgono qualunque sia il sistema di riferimento scelto. Ci si pone nel Sistema del Laboratorio (SL), in cui i nuclei bersaglio sono a riposo, trascurando il moto termico.

Si definisce un "piano di reazione" tramite la direzione dell'asse del fascio incidente e quella della traiettoria di uno dei prodotti uscenti. Dalla conservazione delle componenti dell'impulso ortogonali a tale piano discende immediatamente che anche la traiettoria dell'altro prodotto uscente giace sullo stesso piano. La geometria della reazione è illustrata in figura [7.1](#). La conservazione dell'impulso dà

$$\begin{aligned} p_a &= p_b \cos\vartheta + p_Y \cos\xi \\ 0 &= p_b \sin\vartheta + p_Y \sin\xi \end{aligned} \quad (7.6)$$

Supponendo noto  $Q$ , con  $E_{k,a}$  e quindi  $p_a$  parametri controllabili dallo sperimentatore, le [7.5](#) e [7.6](#) costituiscono un insieme di tre equazioni in quattro incognite ( $\vartheta$ ,  $\xi$ ,  $E_{k,b}$ ,  $E_{k,Y}$ ) che non possiede quindi un'unica soluzione.

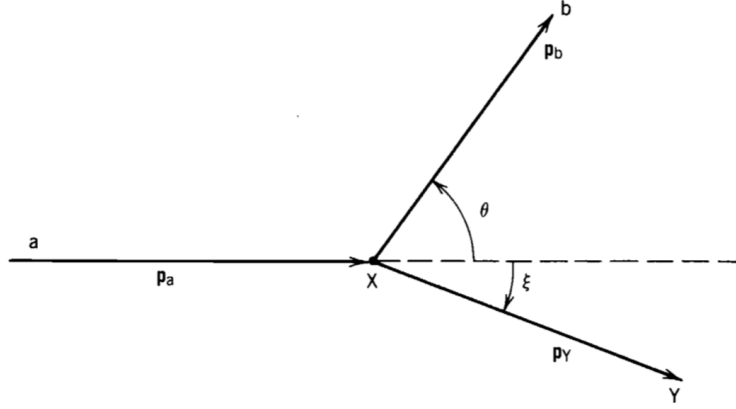


Figura 7.1: Geometria base di una reazione  $a + X \rightarrow Y + b$ .

Se il nucleo residuo Y non viene osservato, si possono eliminare dalle equazioni le quantità  $\xi$  ed  $E_{k,Y}$ , trovando dunque la relazione tra  $E_{k,b}$  e  $\vartheta$

$$\sqrt{E_{k,b}} = \frac{\sqrt{m_a m_b E_{k,a}} \cos \vartheta}{m_Y + m_b} \pm \frac{\sqrt{m_a m_b E_{k,a} \cos^2 \vartheta + (m_Y + m_b) [m_Y Q + (m_Y - m_a) E_{k,a}]}}{m_Y + m_b} \quad (7.7)$$

In figura 7.2 è mostrato l'andamento di  $E_{k,b}$  verso  $E_{k,a}$  per la reazione  ${}^3\text{H}(p, n){}^3\text{He}$ , con  $Q$ -valore  $Q = -763.75$  keV. Tranne che per un piccolo intervallo energetico  $1.019 \text{ MeV} \leq E_{k,a} \leq 1.147 \text{ MeV}$ , c'è corrispondenza biunivoca fra  $E_{k,b}$  e  $\vartheta$ , fissato un valore di  $E_{k,a}$ .

Dal grafico in figura 7.2 si nota anche che  $E_{k,a}$  ha un valore minimo assoluto  $E_{th}$  al di sotto del quale la reazione non può aver luogo e ciò corrisponde a valori negativi del  $Q$ -valore

$$E_{th} = (-Q) \frac{m_Y + m_b}{m_Y + m_b - m_a} \quad (7.8)$$

La condizione di soglia si manifesta sempre per  $\vartheta = 0$  e quindi  $\xi = 0$ , e corrisponde ai prodotti di reazione Y e b che si muovono assieme in direzione e verso comuni, sempre però restando due entità separate. Si tratta di un urto perfettamente centrale in cui non vi è stata trasformazione d'energia nella creazione di impulsi trasversi rispetto alla direzione dell'asse del fascio. Se  $Q > 0$  non ci sono condizioni di soglia al procedere della reazione, anche se bisogna tener conto della possibile barriera coulombiana, oltre alle forze nucleari a corto range.

La condizione di non-biunivocità ha luogo per valori di energia compresi tra  $E_{th}$  ed  $E'_a$ , con

$$E'_a = (-Q) \frac{m_Y}{m_Y - m_a} \quad (7.9)$$

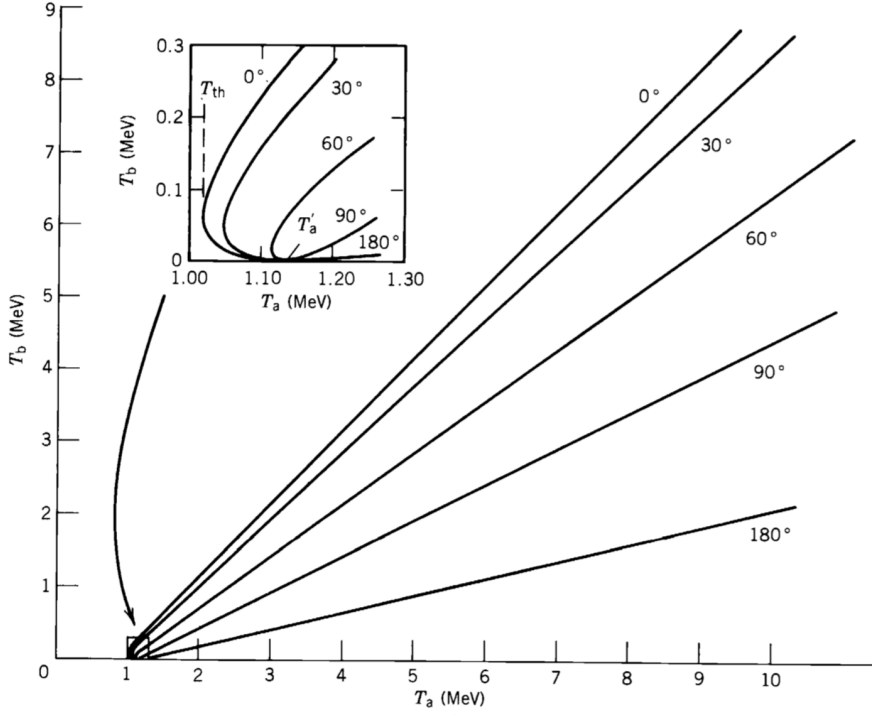


Figura 7.2:  $E_{k,b}$  verso  $E_{k,a}$  per la reazione  ${}^3H(p, n){}^3He$ . Nel riquadro è evidenziata la zona di non biunivocità.

e si presenta chiaramente solo per  $Q < 0$ , rivestendo un ruolo importante esclusivamente per reazioni che coinvolgano nuclei di masse confrontabili. Dalle [7.8](#) e [7.9](#) si ottiene

$$E'_a - E_{th} \simeq E_{th} \frac{m_a m_b}{m_Y (m_Y - m_a)} \left( 1 - \frac{m_b}{m_Y} + \dots \right) \quad (7.10)$$

da cui si nota che se  $a$  e  $b$  sono nuclei con  $A \leq 4$  e  $Y$  è un nucleo pesante o medio pesante, allora l'intervallo  $(E'_a - E_{th})$  di non-biunivocità è inferiore all'1% dell'energia di soglia della reazione. Un secondo esempio per la reazione  ${}^{14}C(p, n){}^{14}N$  è mostrato in figura [7.3](#).

Si osserva che la zona di non-biunivocità si manifesta fino ad un valore angolare massimo possibile  $\vartheta_m$  che equivale alla condizione di annullamento dell'argomento della seconda radice quadrata presente nella [7.7](#)

$$\cos^2 \vartheta_m = - \frac{(m_Y + m_b) [m_y Q + (m_Y - m_a) E_{k,a}]}{m_a m_b E_{k,a}} \quad (7.11)$$

Per  $E_{k,a} = E'_{k,a}$  la zona di non-biunivocità si estende da  $\vartheta = 0$  sino a  $\vartheta_m = 90^\circ$ ; in prossimità di  $E_{k,a} = E_{th}$  ha invece luogo soltanto per  $\theta_m \simeq 0$ . Se una reazione è invece caratterizzata dall'aver  $Q > 0$ , come detto non

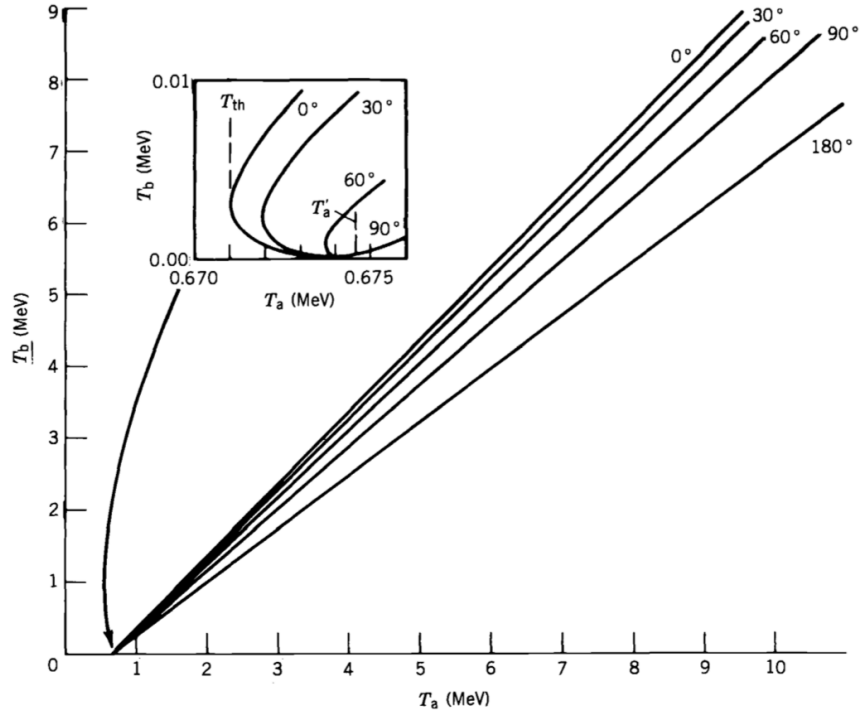


Figura 7.3:  $E_{k,b}$  verso  $E_{k,a}$  per la reazione  $^{14}\text{C}(p,n)^{14}\text{N}$ . Nel riquadro la zona di non biunivocità.

vi sono né un valore di soglia energetica né intervalli angolari per i quali si abbiano doppi valori dell'energia. Considerando ad esempio le reazioni inverse delle due viste sopra, ovvero  $^3\text{He}(n,p)^3\text{H}$  e  $^{14}\text{N}(n,p)^{14}\text{C}$ , si ha  $-Q \rightarrow +Q$ , e la nuova situazione è illustrata in figura [7.4](#)

Dalla misura di  $E_{k,b}$ , noti  $\vartheta$  ed  $E_{k,a}$ , si deducono il  $Q$  della reazione e la relazione fra le masse. Note  $m_a$ ,  $m_b$  ed  $m_X$  si deduce  $m_Y$ .

Risolviendo la [7.7](#) rispetto al  $Q$ -valore si ha

$$Q = E_{k,b} \left(1 + \frac{m_b}{m_Y}\right) - E_{k,a} \left(1 - \frac{m_a}{m_Y}\right) - 2\sqrt{\frac{m_a}{m_Y} \frac{m_b}{m_Y}} E_{k,a} E_{k,b} \cos\vartheta \quad (7.12)$$

A rigori questa procedura non è corretta in quanto nel termine a destra dell'uguaglianza compare anche  $m_Y$ , spesso si possono però ottenere risultati sufficientemente accurati sostituendo ad  $m_Y$  il valore intero che ne rappresenta il numero di massa, e ciò in particolare se si hanno risultati di misure effettuate a  $\vartheta = 90^\circ$ , per cui si annulla l'ultimo termine della [7.12](#)

Se la reazione conduce a stati eccitati del nucleo risultante  $Y$ , allora il  $Q$ -valore deve tenerne conto

$$Q_{ecc} = (m_X + m_a - m_Y^* - m_b) c^2 = Q_0 - E_{ecc} \quad (7.13)$$

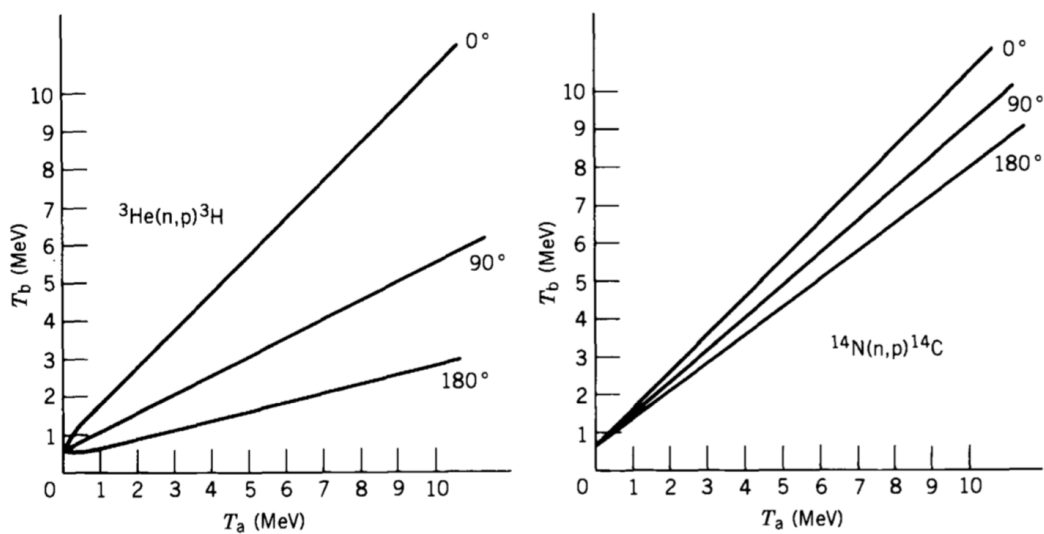


Figura 7.4:  $E_{k,b}$  verso  $E_{k,a}$  per le reazioni  ${}^3\text{He}(n,p){}^3\text{H}$  e  ${}^{14}\text{N}(n,p){}^{14}\text{C}$ .

con  $Q_0$  il  $Q$ -valore corrispondente allo stato fondamentale di  $Y$ ,  $E_{ecc}$  l'energia d'eccitazione rispetto allo stato fondamentale di  $Y$ , da cui la massa  $m_Y^*$  dello stato eccitato

$$m_Y^* = \frac{m_Y c^2 + E_{ecc}}{c^2} \quad (7.14)$$

Solitamente il valore massimo osservato sperimentalmente per  $E_{k,b}$  corrisponde al caso della reazione con nucleo finale  $Y$  nello stato fondamentale, per cui dalla [7.12](#) si può ottenere  $Q_0$ . I valori via via inferiori di  $E_{k,b}$  corrispondono agli stati eccitati per i quali si possono dedurre  $E_{ecc}$  e  $Q_{ecc}$  dalle misure di  $E_{k,b}$ .

### 7.3 Diffusione da potenziale Coulombiano

Si calcola ora la sezione d'urto differenziale per l'interazione coulombiana fra una particella incidente puntiforme di carica  $Z_1e$  e un bersaglio anche puntiforme di carica  $Z_2e$ , non tenendo conto degli spin delle particelle interagenti. Si suppone che l'equivalente energetico della massa del bersaglio sia grande se confrontato con l'energia cinetica del proiettile, così da poter trascurare il rinculo. In tal caso si può utilizzare il tri-impulso e se  $Z_2e$  è piccolo, dunque se  $Z_2\alpha \simeq Z_2/137 \ll 1$ , il che equivale a dire che il potenziale agente non è troppo intenso, ci si trova nelle condizioni di poter applicare l'approssimazione perturbativa di Born. L'effetto del potenziale a distanza  $\infty$  è allora trascurabile e le particelle del fascio incidente, nei loro stati iniziale e finale, sono considerate come libere; le funzioni d'onda che le descrivono sono autofunzioni dell'impulso, cioè onde piane

$$\psi_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (7.15)$$

Le difficoltà eventualmente connesse alla normalizzazione delle funzioni d'onda possono essere superate considerando un opportuno volume finito  $V$ , che sia sufficientemente grande rispetto alla zona direttamente coinvolta nel processo d'urto tanto da poter confondere gli stati di energia discreta presenti in esso con un quasi continuo di stati. Le dimensioni di  $V$  devono essere inoltre tali da comprendere anche materia e strutture circostanti il volume strettamente legato al processo d'interazione, così da poter considerare uno schermaggio conseguente efficace della carica  $Z_2e$  del bersaglio verso ogni particella incidente/deflessa oltre una certa distanza. Il risultato finale non deve inoltre dipendere da tale volume  $V$ .

Preso un fascio di particelle incidenti con densità  $n_a$  particelle per unità di volume e scelto come detto sufficientemente grande il volume d'integrazione, si ha per la condizione di normalizzazione

$$\int_V |\psi_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{r})|^2 dV = n_a V \quad \text{con} \quad V = \frac{N_a}{n_a} \quad (7.16)$$

dove  $N_a$  rappresenta la totalità delle particelle  $a$  del fascio che hanno inciso sul bersaglio.  $V$  è quindi un ben preciso volume di normalizzazione che va opportunamente scelto per ogni singolo fascio incidente; si indichino con  $R \propto V^{1/3}$  le dimensioni lineari caratterizzanti tale volume.

Il tasso  $W$  di interazioni è allora dato dal prodotto della sezione d'urto  $\sigma$  con il modulo  $v_a$  della velocità di ogni particella incidente, diviso per il volume  $V$ . Applicando quindi la regola d'oro di Fermi

$$\frac{\sigma v_a}{V} = W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{dn}{dE_f} \quad (7.17)$$

dove  $E_f$  rappresenta l'energia totale, cinetica più equivalente in massa, dello stato finale. Poichè si considera un problema d'urto elastico, non avendo



supposto alcun assorbimento d'energia da parte del bersaglio (ad esempio rinculo) o trasformazioni massa/energia, ne consegue  $dE_f = dE' = dE$ .

Dato inoltre che si trascura l'effetto del potenziale per gli stati iniziale e finale a grande distanza dal centro diffusivo, ne consegue che si conservano i moduli degli impulsi, ovvero  $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$ . Il solo effetto della diffusione da parte del potenziale coulombiano si risolve quindi in una deflessione di un angolo  $\vartheta$  fra i due impulsi iniziale e finale della particella incidente. La

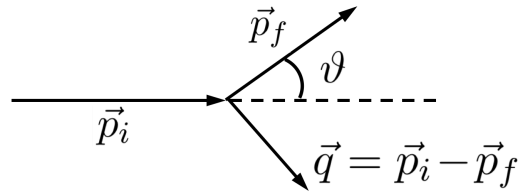


Figura 7.5: Relazione fra  $\mathbf{p}_i$  e  $\mathbf{p}_f$  conseguente al processo di diffusione.

densità nello spazio delle fasi degli stati finali possibili è data da

$$dn(|\mathbf{p}_f|) = \frac{4\pi |\mathbf{p}_f|^2 V}{(2\pi\hbar)^3} d|\mathbf{p}_f| \quad (7.18)$$

e conseguentemente la sezione d'urto per la diffusione di una particella incidente entro l'elemento  $d\Omega$  di angolo solido è data da

$$d\sigma \frac{v_a}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{|\mathbf{p}_f|^2 V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d|\mathbf{p}_f|}{dE_f} d\Omega \quad (7.19)$$

Per energie molto alte delle particelle incidenti si può porre  $v_a \simeq c$  e anche  $|\mathbf{p}_f| \simeq E_f/c$ , da cui

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{4\pi^2 c^4 \hbar^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \quad (7.20)$$

L'Hamiltoniano d'interazione per una particella incidente di carica  $Z_1 e$  ha in questo caso la forma  $\mathcal{H}_{int} = Z_1 e \cdot \Phi(r)$ , con

$$\Phi(r) = \frac{Z_2 e}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7.21)$$

L'elemento della matrice di transizione è quindi

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle &= \mathcal{M}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{-i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar} e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{r} d_3x = \\ &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{r} d_3x = \mathcal{M}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (7.22)$$

dove  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f$  è l'impulso trasferito. Si ha:  $|\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}|$ , e  $(1 - \cos\vartheta) = 2 \operatorname{sen}^2\vartheta/2$ , quindi

$$|\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}_i|^2 + |\mathbf{p}_f|^2 - 2|\mathbf{p}_i||\mathbf{p}_f|\cos\vartheta = 2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos\vartheta) = 4|\mathbf{p}|^2 \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2} \quad (7.23)$$

Si calcola l'integrale nella [7.22](#) passando a coordinate polari<sup>1</sup> e si ottiene

$$\int \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{r} d_3x = 4\pi \left(\frac{\hbar}{q}\right)^2 \int_0^\infty \operatorname{sen}x dx \quad (7.25)$$

L'integrando mostra infinite oscillazioni della medesima ampiezza, quindi l'integrale non converge. Per ottenere qualcosa di sensato bisogna definirlo in modo da tener conto del significato fisico del problema. L'origine della divergenza risiede nel fatto che per il potenziale si è usato l'andamento proporzionale ad  $r^{-1}$  fino a distanza  $\infty$ , ma come si è già osservato ciò non ha significato fisico in quanto, indipendentemente dalle dimensioni dell'apparato sperimentale, vi sarà sempre una distanza a partire dalla quale le strutture fisiche presenti schermano il potenziale. Quindi bisogna tenerne conto facendo in qualche modo tendere a zero il potenziale molto più rapidamente di  $r^{-1}$ , oltre una opportuna distanza  $R \propto V^{1/3}$  che al termine del calcolo verrà fatta tendere ad  $\infty$ .

Si realizza ciò considerando un potenziale di tipo Yukawa, ovvero della forma  $\Phi(r) = e^{-\lambda r}/r$ , dove  $\lambda \sim 1/R$  rappresenta una quantità piccola che si farà alla fine tendere a 0. Si ha così

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \operatorname{sen}x dx &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty [e^{(i-\lambda)x} - e^{-(i+\lambda)x}] dx = \\ &= -\frac{1}{2i} \left( \frac{1}{i-\lambda} + \frac{1}{i+\lambda} \right) = \frac{1}{1+\lambda^2} \quad \text{con,} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{1+\lambda^2} = 1 \end{aligned} \quad (7.26)$$

Si ottiene dunque, per l'elemento della matrice di transizione

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} 4\pi \left(\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|}\right)^2 = \frac{Z_1 Z_2 e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 V |\mathbf{q}|^2} \quad (7.27)$$

<sup>1</sup>Si prende come angolo polare  $\alpha$  quello fra  $\mathbf{q}$  ed  $\mathbf{r}$  e:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{r} d_3x &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \operatorname{sen}\alpha d\alpha \int_0^\infty r^2 e^{\frac{iqr \cos\alpha}{\hbar}} dr = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\alpha) \int_0^\infty r^2 e^{\frac{iqr \cos\alpha}{\hbar}} dr = 2\pi \int_0^\infty r \frac{\hbar}{iqr} (e^{iqr/\hbar} - e^{-iqr/\hbar}) dr = \\ &= 4\pi \left(\frac{\hbar}{q}\right)^2 \int_0^\infty \operatorname{sen}x dx \quad \text{posto,} \quad x = qr/\hbar. \end{aligned} \quad (7.24)$$

da cui infine la sezione d'urto

$$\begin{aligned}\sigma(\vartheta) &= \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\mathcal{M}(\mathbf{q})|^2 = \frac{E_f^2}{(2\pi)^2 c^4} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{\epsilon_0^2 |\mathbf{q}|^4} \\ &= \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4E_f^2}{p^4 c^4} \frac{1}{\text{sen}^4\vartheta/2}\end{aligned}\quad (7.28)$$

Se si considera ora il limite relativistico di questo risultato, ovvero si assume  $E_f \simeq pc$ , si ha

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_f} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4\vartheta/2} \quad (7.29)$$

Se invece ci si pone nel limite non relativistico, per cui  $E_k = p^2/(2m)$  ed  $E_f \approx mc^2$ , allora il termine  $4E_f^2/(pc)^4$  si approssima con  $1/E_k^2$ , per cui la sezione d'urto diventa

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4\vartheta/2} \quad (7.30)$$

con lo stesso risultato ottenuto nell'approccio classico, e ciò non dipende dall'aver utilizzato l'approssimazione di Born, in quanto si può dimostrare che il risultato vale per tutti gli ordini perturbativi.

### Fattore di forma

Se più realisticamente si considera la carica diffondente  $Z_2 e$  non puntiforme ma distribuita con simmetria sferica, il potenziale, conglobando in esso anche la carica  $Z_1 e$  della particella incidente, è esprimibile come

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (7.31)$$

con  $\int \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 1$ , ricordando che  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  è invariante per traslazione, con l'integrale che si estende a tutto il volume  $V'$  contenente le cariche bersaglio.

La matrice di transizione diventa in questo caso, ponendo  $\mathbf{D} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mathbf{q}) &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d\mathbf{r} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \\ &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{D}/\hbar}}{D} d\mathbf{D} \int \rho(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'/\hbar} d\mathbf{r}'\end{aligned}\quad (7.32)$$

Essa è il prodotto di tre fattori: il secondo corrisponde al primo dei due integrali e come visto, vale  $4\pi(\hbar/|\mathbf{q}|)^2$ ; il terzo, indicato con  $F(\mathbf{q})$ , coincide con la *trasformata di Fourier* della distribuzione della densità di carica

elettrica

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{r}') e^{\frac{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'}{\hbar}} d\mathbf{r}' \quad (7.33)$$

$F(\mathbf{q})$  è detto *fattore di forma* della distribuzione di carica elettrica. La normalizzazione della distribuzione di carica dá

$$F(0) = \int \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 1 \quad (7.34)$$

La sezione d'urto di diffusione coulombiana per una carica estesa si scrive dunque come

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4E_f^2}{(pc)^4} \frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\vartheta}{2}} |F(\mathbf{q})|^2 \quad (7.35)$$

Il risultato trovato vale però ora solo in approssimazione di Born e non si mantiene se si includono gli ordini perturbativi più elevati.

Differentemente dal caso classico, in cui le sezioni d'urto da carica puntiforme e da carica estesa coincidevano per ogni angolo  $\vartheta < \vartheta_0$ , nel caso quantistico esse coincidono soltanto per  $\vartheta = 0$ , ovvero  $|\mathbf{q}| = 0$  2.

### 7.3.1 Sezione d'urto di Mott

Si può verificare che tener conto anche dello spin porta, per la sezione d'urto da diffusione coulombiana di leptoni relativistici su nuclei massivi e puntiformi, a un risultato, detto sezione d'urto di Mott che trascurando il rinculo del nucleo bersaglio si scrive

$$\frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Ruth}(\vartheta)}{d\Omega} \left( 1 - \beta^2 \text{sen}^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (7.36)$$

Al crescere della velocità del proiettile la sezione d'urto di Mott cala dunque più rapidamente di quella di Rutherford, con l'angolo  $\vartheta$  di diffusione. Nei casi fortemente relativistici, in cui  $\beta = v/c \rightarrow 1$ , si ha

$$\frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \frac{d\sigma_{Ruth}(\vartheta)}{d\Omega} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (7.37)$$

---

<sup>2</sup>Il motivo è nella natura quantistica del fenomeno. Classicamente si possono definire contemporaneamente l'impulso  $\mathbf{p}$  e il parametro d'urto  $b$ . Quantisticamente fissare  $v = v_z$  equivale all'aver fissato  $v_x = v_y = 0$ . Non si possono quindi più definire le componenti delle coordinate nel piano  $(x, y)$ , ovvero il parametro d'urto  $b$  che altro non è se non un vettore su tale piano. Fissata quindi la velocità  $\mathbf{v}$ , sono ammessi tutti i valori del parametro d'urto, quindi anche quelli per cui è  $b < l_0$ , corrispondenti a  $\vartheta > \vartheta_0$ .

La sezione d'urto  $d\sigma_{Coul}(\vartheta)/d\Omega$  di diffusione coulombiana per una carica estesa va quindi scritta come

$$\frac{d\sigma_{Coul}(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} |F(\mathbf{q})|^2 \quad (7.38)$$

La necessità del fattore aggiuntivo che la sezione d'urto di Mott introduce rispetto a quella di Rutherford può essere capita se si considera il caso limite della diffusione a  $\pi$  radianti. Nel caso in cui si abbiano particelle relativistiche, per le quali  $\beta \rightarrow 1$ , dall'equazione di Dirac si deduce che la proiezione del loro spin  $\mathbf{s}$  lungo la direzione del moto, rappresentata dal versore  $\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ , è una quantità che si conserva. In pratica come quantità che si conserva si introduce

$$H = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{s}| |\mathbf{p}|} \quad (7.39)$$

detta *elicità*. L'elicità vale  $+1$  per particelle con spin orientato nel verso del moto e vale  $-1$  per particelle con spin orientato in verso opposto al moto.

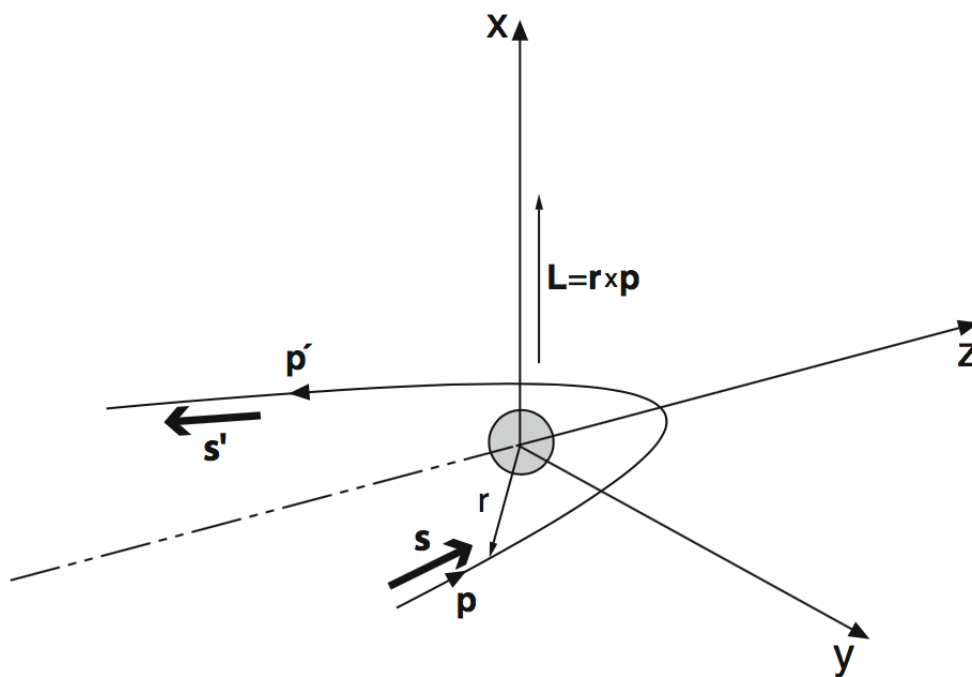


Figura 7.6: Diffusione a  $\pi$  radianti.

In figura [7.6](#) è mostrata una possibile configurazione di diffusione all'indietro, anche se non esattamente a  $\pi$  radianti, dove si è scelto come asse  $z$  di quantizzazione quello parallelo all'impulso  $\mathbf{p}$  dell'elettrone incidente. Per la conservazione dell'elicità, la proiezione dello spin  $\mathbf{s}$  sull'asse  $z$  dovrebbe cambiare segno con l'urto, ma ciò è impossibile con un bersaglio di spin

nullo, a causa della conservazione del momento angolare totale. Il momento angolare orbitale  $\mathbf{L}$  è infatti perpendicolare alla direzione  $z$  del moto e non può quindi determinare alcun cambiamento nella componente lungo  $z$  del momento angolare. Ciò significa che per particelle relativistiche la diffusione a  $\pi$  radianti dovrebbe essere totalmente soppressa.

Se invece il bersaglio possiede un valore non nullo di spin allora la proiezione dello spin dell'elettrone può essere modificata durante la diffusione a  $\pi$  radianti, in quanto la conservazione del momento angolare può trovare compensazione nel concomitante cambiamento della direzione dello spin del bersaglio. In questo caso la diffusione a  $\pi$  radianti è possibile.

Questa previsione trova riscontro nei risultati sperimentali.

Nel seguito, senza con ciò togliere generalità agli argomenti trattati, a meno di specificare diversamente si considereranno soltanto fattori di forma a simmetria sferica, relativi dunque a sistemi che non presentano direzioni preferenziali nello spazio. In tal caso i fattori di forma dipendono esclusivamente dall'impulso trasferito  $\mathbf{q}$  e per sottolinearlo si scriverà il fattore di forma come  $F(\mathbf{q}^2)$ .

## 7.4 Diffusione da potenziale nucleare

L'intensità dell'interazione non permette di utilizzare la teoria delle perturbazioni e non si può dunque applicare l'approssimazione di Born.

Usando proiettili con energie sufficientemente alte però, la loro lunghezza d'onda di De Broglie  $\lambda = h/p$  può risultare inferiore alle dimensioni nucleari tipiche da pensare di utilizzare un approccio di tipo "ottico", confortati in questo dal fatto che le sezioni d'urto sperimentali elastiche mostrano forti analogie con gli andamenti tipici dei fenomeni diffrattivi ottici da parte di un disco opaco.

In ottica la diffrazione da un bordo netto produce una figura di massimi e minimi il cui primo minimo si presenta a un'angolo  $\vartheta$  tale che  $\text{sen}\vartheta \simeq \lambda/R$ , con  $R$  il raggio del disco. I successivi minimi si presentano quasi ugualmente spazati e i massimi intermedi calano d'ampiezza al progredire di  $\vartheta$ .

Un nucleo può assorbire efficacemente nucleoni incidenti, per cui ha senso l'analogia con un disco opaco. Nel caso di proiettili carichi bisogna tener conto della concorrenza fra meccanismi d'interazione coulombiana e nucleare. Per osservare la diffusione elastica di nucleoni nella forma *diffrattiva* bisogna quindi riuscire ad eliminare gli effetti coulombiani e ciò può essere ottenuto in due modi. Il primo consiste nell'utilizzare proiettili privi di carica elettrica come i neutroni, che però sentono la forza nucleare.

Le sezioni d'urto differenziali in questi casi mostrano dei minimi sempre superiori a zero, in quanto la superficie nucleare non è equiparabile a un bordo netto, ma piuttosto a una struttura diffusa. Per ridurre gli effetti coulombiani con proiettili carichi si ricorre a due passi successivi, il primo dei quali consiste nell'utilizzare proiettili di energia sufficiente a contrastare la barriera coulombiana, onde permettere il raggiungimento di piccoli valori di massimo avvicinamento fra proiettile e bersagli; quindi si osservano in particolare gli andamenti ad angoli grandi, dove la sezione d'urto coulombiana decresce molto e rapidamente. Uno dei risultati della diffusione elastica di nucleoni su nuclei è la determinazione dei raggi nucleari; anche se i valori ottenuti dipendono in una certa misura dal modello di potenziale utilizzato per descrivere l'interazione, si ottiene comunque che i risultati sono generalmente consistenti con l'ipotesi che per un nucleo simmetrico si possa considerare una forma sferica con raggio espresso dalla  $R = R_0 A^{1/3}$ , con  $R_0 \simeq 1.25$  fm.

Una diffusione anelastica coulombiana implica che il nucleo, dopo l'interazione, viene lasciato in una condizione eccitata a carico di parte dell'energia cinetica del proiettile e anche quest'ultimo potrebbe essere in una condizione d'eccitazione, dopo l'urto.

Se in questi casi si misura la distribuzione in energia delle particelle diffuse a un angolo solido definito, si osserva la presenza di un singolo picco elastico, alla più alta energia, e di picchi a energie inferiori ognuno dei quali corrisponde a interazioni anelastiche associate a specifici stati eccitati del

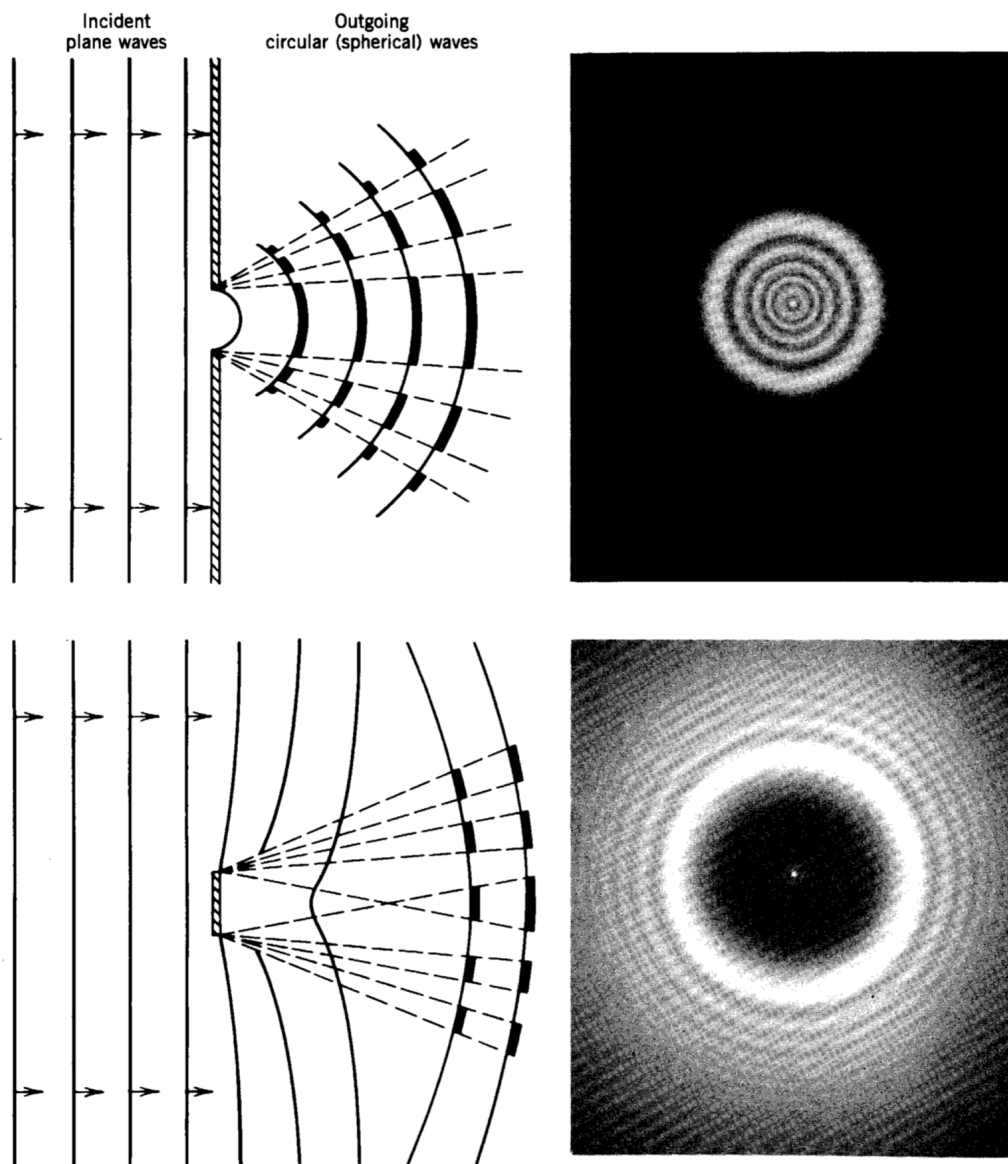


Figura 7.7: In alto la rappresentazione della diffrazione della luce prodotta da una piccola apertura circolare; in basso quella prodotta da un piccolo disco opaco circolare (Atlas of Optical Phenomena - 1962).

nucleo bersaglio. La posizione di ognuno di questi picchi permette di risalire all'energia dello stato eccitato che lo ha generato, e la sua popolazione è proporzionale alla sezione d'urto per la reazione d'eccitazione dello stato ad esso associato.

Le misure delle distribuzioni angolari delle particelle diffuse dai vari stati eccitati permettono di risalire ai valori di spin-parità degli stessi.



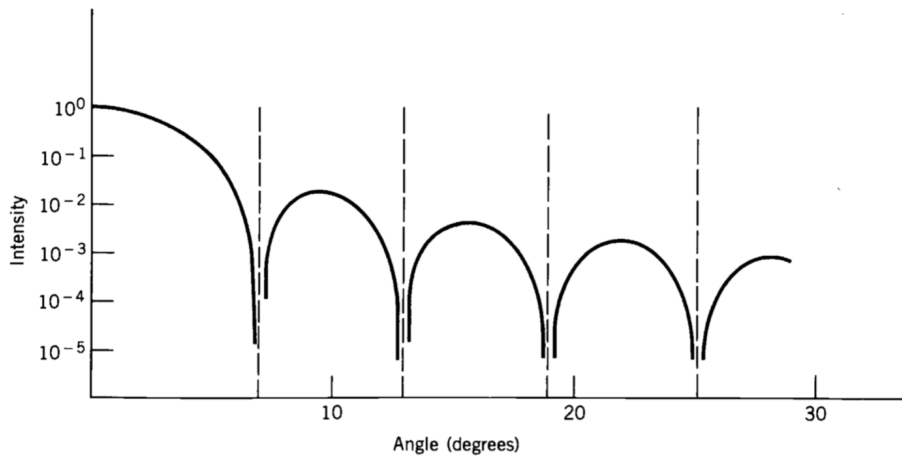


Figura 7.8: Figura di diffrazione prodotta da luce incidente su un foro circolare. L'andamento è calcolato per una lunghezza d'onda dieci volte superiore al diametro dell'apertura circolare. I minimi hanno intensità zero.

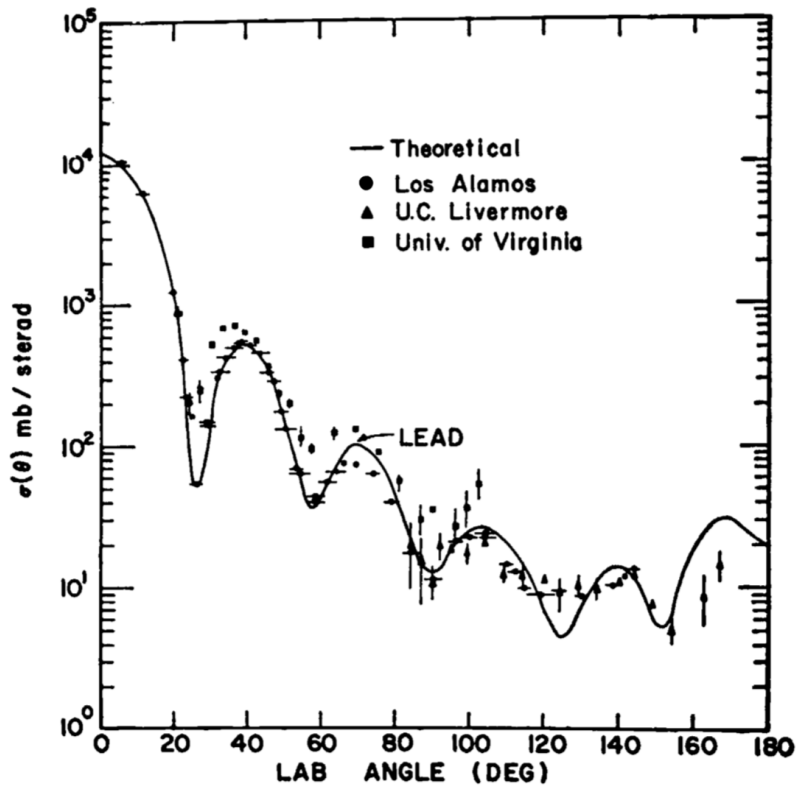


Figura 7.9: Diffusione elastica di neutroni da 14 MeV su piombo (S.Fernbach - Rev. Mod. Phys. 30 (1958) 415).

## 7.5 Diffusione in onde parziali

Si veda un approccio con cui dedurre espressioni per le sezioni d'urto confrontabili con quelle sperimentali.

Si consideri un fascio di particelle incidenti lungo l'asse  $z$  di un sistema di riferimento  $(x, y, z)$  e si supponga di avere un centro diffusore di massa  $\approx \infty$  posizionato nell'origine del sistema di riferimento. Si assuma di poter rappresentare ogni particella del fascio incidente come un'onda piana  $e^{ikz}$  con impulso di modulo  $p = \hbar k$ , e le particelle in uscita siano rappresentate da onde sferiche.

L'analisi del problema diventa quindi più agevole se si esprime l'onda piana incidente anch'essa come sovrapposizione di onde sferiche

$$\psi_{inc} = A e^{ikz} = A \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos\vartheta) \quad (7.40)$$

con  $A$  costante di normalizzazione.

Le funzioni radiali  $j_{\ell}(kr)$  sono le *funzioni sferiche di Bessel*, soluzioni della parte radiale dell'equazione di Schrödinger in una regione lontanata dal bersaglio, dove il potenziale nucleare è ormai trascurabile. Le funzioni angolari  $P_{\ell}(\cos\vartheta)$  sono i *polinomi di Legendre*

$$\begin{aligned} P_0(\cos\vartheta) &= 1 \\ P_1(\cos\vartheta) &= \cos\vartheta \\ P_2(\cos\vartheta) &= \frac{1}{2} (3 \cos^2\vartheta - 1) \end{aligned} \quad (7.41)$$

ecc. ....

Si dice in questo caso di aver sviluppato l'onda incidente e quella diffusa in *onde parziali*, ognuna delle quali corrispondente a uno specifico valore  $\ell$  del momento angolare. La procedura è possibile se il potenziale d'interazione nucleare è di tipo "centrale". Questo approccio si rivela utile finché risulta sufficiente considerare l'effetto del potenziale nucleare soltanto sulle onde parziali di ordine  $\ell$  più basso.

Semiclassicamente, se una particella di impulso  $p = 2\pi\hbar/\lambda$  interagisce con parametro d'urto  $b$ , allora il momento angolare relativo è dato da

$$\ell \hbar = p b \quad \text{da cui:} \quad b = \ell \frac{\hbar}{p} = \ell \frac{\lambda}{2\pi} = \ell \lambda \quad (7.42)$$

Siccome  $\ell$  può assumere soltanto valori interi, semiclassicalmente si può dire che particelle con momento angolare compreso tra  $0\hbar$  e  $1\hbar$  interagiscono con parametri d'urto compresi fra  $b = 0$  e  $b = \lambda$ , e quindi attraversano un'area circolare efficace (sezione d'urto) pari a  $\pi\lambda^2$ .

Per  $\hbar \leq \ell \leq 2\hbar$  la sezione d'urto risulta un anello circolare di raggio interno

$\lambda$ , raggio esterno  $2\lambda$ , e area  $3\pi\lambda^2$ .

Si può dunque immaginare di suddividere l'area d'interazione in zone, ognuna corrispondente a un definito valore di momento angolare  $\ell$  e di area

$$\pi [(\ell + 1) \lambda]^2 - \pi (\ell \lambda)^2 = (2\ell + 1) \pi \lambda^2$$

Si può, in modo semiclassico, ragionevolmente stimare il massimo valore di  $b$  come  $b_{max} = R_1 + R_2$ , ovvero la somma del raggio del nucleo incidente con quello del nucleo bersaglio, deducendo quindi che il massimo valore di  $\ell$  può essere in tal caso  $\ell_{max} = b_{max}/\lambda$ , e la sezione d'urto corrispondente

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^{R/\lambda} (2\ell + 1) \pi \lambda^2 = \pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (7.43)$$

che seppur semiclassica è una stima ragionevole, tenendo conto, tramite il termine  $\lambda$ , dell'indeterminazione spaziale quantisticamente associata al proiettile.

Asintoticamente, ovvero lontano dal bersaglio, le funzioni di Bessel si approssimano a

$$\begin{aligned} j_\ell(kr) &\simeq \frac{\text{sen}(kr - \ell\pi/2)}{kr} \quad \text{per } (kr \gg \ell) \\ &= \frac{e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)}}{2ikr} \end{aligned} \quad (7.44)$$

per cui

$$\psi_{inc} = \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell + 1) \left[ e^{-i(kr - \ell\pi/2)} - e^{i(kr - \ell\pi/2)} \right] P_\ell(\cos\vartheta) \quad (7.45)$$

dove il primo termine in parentesi quadra rappresenta un'onda sferica entrante convergente verso il bersaglio e il secondo termine un'onda sferica uscente dal bersaglio. La sovrapposizione delle due costituisce l'onda piana.

Come effetto della causalità la diffusione può naturalmente agire solo sull'onda uscente e lo può fare in due modi: tramite una modificazione della fase e/o tramite una modificazione dell'ampiezza.

La modificazione dell'ampiezza, se non si considera la possibilità della trasformazione di parte dell'energia incidente in ulteriori particelle uscenti, implica sostanzialmente una riduzione del numero di particelle nel canale d'uscita rispetto a quelle coinvolte nel canale d'ingresso. Ma si ricordi che la funzione d'onda rappresenta soltanto le particelle con impulso pari ad  $\hbar k$ . In presenza di diffusione anelastica, energia e identità delle particelle uscenti possono cambiare, rispetto al canale d'ingresso. Non sorprende quindi che ci possano essere meno particelle nel termine  $e^{ikr}$  dopo lo scattering anelastico. Le diffusioni determinate da una specifica causa d'interazione costituiscono

quello che vien detto un *canale di reazione*. Alcuni canali di reazione possono essere chiusi per le particelle interagenti, se ad esempio non ci sono abbastanza energia e/o momento angolare a disposizione.

Per tener conto delle conseguenti variazioni nelle onde parziali uscenti di ordine  $\ell$ -mo si introduce un coefficiente complesso  $\eta_\ell$  nel termine d'onda uscente  $e^{ikr}$  nell'equazione [7.45](#) che diventa

$$\psi = \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell+1) \left[ e^{-i(kr-\ell\pi/2)} - \eta_\ell e^{i(kr-\ell\pi/2)} \right] P_\ell(\cos\vartheta) \quad (7.46)$$

La [7.46](#) rappresenta quindi la sovrapposizione di onde incidenti e diffuse:  $\psi = \psi_{inc} + \psi_{dif}$ . Sottraendo la [7.45](#) alla [7.46](#) si ottiene l'onda diffusa

$$\begin{aligned} \psi_{dif} &= \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell+1) (1 - \eta_\ell) e^{i(kr-\ell\pi/2)} P_\ell(\cos\vartheta) \\ &= \frac{A}{2k} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i (1 - \eta_\ell) P_\ell(\cos\vartheta) \end{aligned} \quad (7.47)$$

Se si considerano i contributi a  $\psi_{dif}$  relativi esclusivamente ai valori del numero d'onda  $k$  corrispondenti a quelli dell'onda incidente, allora si ottiene la rappresentazione della diffusione elastica.

Si può quindi introdurre la densità di corrente diffusa come

$$\begin{aligned} j_{dif} &= \frac{\hbar}{2mi} \left( \psi_{dif}^* \frac{\partial \psi_{dif}}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{dif}^*}{\partial r} \psi_{dif} \right) \\ &= |A|^2 \frac{\hbar}{4mkr^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i (1 - \eta_\ell) P_\ell(\cos\vartheta) \right|^2 \end{aligned} \quad (7.48)$$

Essendo la corrente incidente data da

$$j_{inc} = \frac{\hbar k}{m} |A|^2 \quad (7.49)$$

si ottiene, per la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i (1 - \eta_\ell) P_\ell(\cos\vartheta) \right|^2 \quad (7.50)$$

Integrando i polinomi di Legendre su tutto l'angolo solido si ottiene la sezione d'urto di diffusione

$$\sigma_{dif} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi \lambda^2 (2\ell+1) |1 - \eta_\ell|^2 \quad (7.51)$$

Nel caso di interazione esclusivamente elastica  $|\eta_\ell| = 1$  e convenzionalmente si pone  $\eta_\ell = e^{2i\delta_\ell}$ , dove  $\delta_\ell$  rappresenta lo sfasamento dell'onda parziale di ordine  $\ell$ . In questo caso  $|1 - \eta_\ell|^2 = 4 \sin^2 \delta_\ell$ , e

$$\sigma_{dif} = \sum_{\ell=0}^{\infty} 4\pi\lambda^2 (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell \quad (7.52)$$

Definendo la *sezione d'urto di reazione*  $\sigma_r$  come quella che tien conto di tutti i possibili canali di reazione tranne di quello elastico, per esprimerla bisogna considerare il rateo con cui le particelle diffuse scompaiono dal canale con un particolare numero d'onda  $k$  partendo dalla [7.46](#). Si considera praticamente la differenza fra corrente entrante e corrente uscente ottenendo

$$|j_{inc}| - |j_{out}| = \frac{|A|^2 \hbar}{4mkr^2} \left[ \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell+1} e^{i\ell\pi/2} P_\ell(\cos\vartheta) \right|^2 - \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell+1} \eta_\ell e^{i\ell\pi/2} P_\ell(\cos\vartheta) \right|^2 \right] \quad (7.53)$$

e la sezione d'urto di reazione diventa

$$\sigma_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi\lambda^2 (2\ell + 1) (1 - |\eta_\ell|^2) \quad (7.54)$$

La sezione d'urto totale che tien conto di tutti i processi è quindi

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{dif} + \sigma_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} 2\pi\lambda^2 (2\ell + 1) (1 - \text{Re } \eta_\ell) \quad (7.55)$$

Da quanto ottenuto si possono trarre alcune importanti osservazioni:

- La diffusione elastica può manifestarsi anche in assenza di ogni altro tipo d'interazione, come si vede dalla [7.54](#) se  $|\eta_\ell| = 1$ , mentre non si può avere interazione anelastica senza la contemporanea presenza anche di una componente elastica non nulla. Pensando a un processo di tipo diffrattivo ciò equivale a dire che se delle particelle sono rimosse da un fascio incidente dando luogo a una sorta di "ombra" dietro il bersaglio, allora vi saranno delle particelle che per effetto dell'interazione col bersaglio verranno diffratte nella zona d'ombra.
- Considerando il bersaglio alla stregua di un disco opaco che assorba tutte le onde parziali fino a quelle di ordine  $\ell = b_{max}/\lambda$  ( $\eta_\ell = 0$  implica assorbimento completo) e non perturbi quelle per  $\ell > b_{max}/\lambda$  ( $\eta_\ell = 1$ ), si ha

$$\sigma_{dif} = \pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (7.56)$$

e

$$\sigma_r = \pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (7.57)$$

da cui

$$\sigma_{Tot} = 2\pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (7.58)$$

per cui la sezione d'urto totale vale il doppio della sezione d'urto geometrica. È un effetto "non classico" e può essere capito sempre tenendo in considerazione la zona d'"ombra" prodotta dal nucleo bersaglio che però non può limitarsi ad assorbire ma deve appunto anche diffrangere entro la zona d'ombra.

Questi risultati possono essere utilizzati per indagare la struttura dei nuclei: si ipotizza una ragionevole forma di potenziale d'interazione e si risolve la corrispondente equazione di Schrödinger nella regione d'interazione  $0 \leq r \leq R$ , imponendo condizioni di continuità agli estremi. Si può così trovare  $\eta_\ell$  e provare a valutare la plausibilità della forma scelta per il potenziale dal confronto con i dati sperimentali per  $\sigma_{dif}$  e  $\sigma_r$ .

In pratica la procedura risulta molto difficoltosa e complicata e si riescono ad ottenere risultati soddisfacenti per i canali di reazione elastici. Una particolare tecnica adottata in questo caso è il modello ottico per lo *scattering* elastico.

## 7.6 Modello ottico

Un modello semplice ma efficace che descrive in forma generale lo scattering elastico in presenza di effetti di assorbimento è il *modello ottico*, il cui nome deriva dalla similitudine con l'approccio per descrivere la fenomenologia della diffusione di luce da una sfera di vetro con superficie parzialmente opaca (satinata).

Il modello descrive l'interazione tramite un potenziale complesso

$$U(r) = V(r) + iW(r) \quad (7.59)$$

in cui le funzioni reali  $V(r)$  e  $W(r)$  sono scelte in modo da assegnare al potenziale una realistica dipendenza radiale.  $V(r)$  è responsabile della parte elastica dello scattering: descrive le interazioni nucleari ordinarie fra proiettili e bersagli e può assomigliare al potenziale del modello a shell. Il coefficiente  $W(r)$  della parte immaginaria è responsabile dell'assorbimento. Si consideri il semplice caso d'un potenziale  $U(r)$  a buca quadrata

$$\begin{aligned} U(r) &= -V_0 - iW_0 & r < R \\ U(r) &= 0 & r > R \end{aligned} \quad (7.60)$$

Si sceglie la funzione d'onda diffusa uscente della forma  $e^{ikr}/r$ , con numero d'onda  $k = \sqrt{2m(E + V_0 + iW_0)}/\hbar$ , come da soluzione dell'equazione di

Schrödinger per questo tipo di potenziale.

Posto quindi  $k = k_r + ik_i$ , la funzione d'onda uscente è proporzionale a

$$\frac{e^{ik_r r} e^{-k_i r}}{r}$$

e la densità di probabilità radiale è di conseguenza proporzionale a  $e^{-2k_i r}$ . La funzione d'onda è quindi attenuata esponenzialmente e si sovrappone al volume del nucleo.

Nell'ipotesi di un assorbimento ridotto, che implica  $W_0$  abbastanza inferiore ad  $E + V_0$ , si può sviluppare  $k$  approssimandolo a

$$k \simeq \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}} + \frac{iW_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2(E + V_0)}} \quad (7.61)$$

La distanza alla quale l'intensità si attenua d'un fattore  $1/e$ , una sorta di cammino libero medio, è

$$d = \frac{1}{2k_i} = \frac{1}{W_0} \sqrt{\frac{\hbar^2(E + V_0)}{2m}} \quad (7.62)$$

Se questa distanza è almeno dell'ordine del raggio nucleare (alcuni fm) allora, assumendo per la profondità  $V_0$  di un tipico potenziale di modello a shell un valore dell'ordine di 40 MeV, e considerando tipici proiettili di bassa energia con  $E = 10$  MeV, si ha  $W_0 \simeq 11$  MeV. Nel caso in cui l'assorbimento è quindi abbastanza meno intenso dello scattering elastico si stimano  $|V| \sim 40$  MeV,  $|W| \sim 10$  MeV.

Un calcolo di modello ottico procede quindi secondo un certo numero di passi:

- Si sceglie una forma di potenziale, ad esempio Saxon-Woods

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}} \quad (7.63)$$

aggiustando le costanti  $V_0$ ,  $R$  ed  $a$  per ottenere il miglior fit sui dati di scattering.

- Il termine di assorbimento  $W(r)$  a basse energie ha una forma molto diversa. Il principio d'esclusione porta a escludere che i nucleoni più interni e legati del nucleo partecipino all'assorbimento di nucleoni incidenti. Sono i nucleoni di *valenza* prossimi alla superficie del nucleo che possono assorbire l'energia relativamente bassa delle particelle incidenti.  $W(r)$  è quindi spesso scelta proporzionale a  $dV/dr$ , che ha valori significativi soltanto in prossimità della superficie del nucleo, come mostrato in figura [7.10](#).

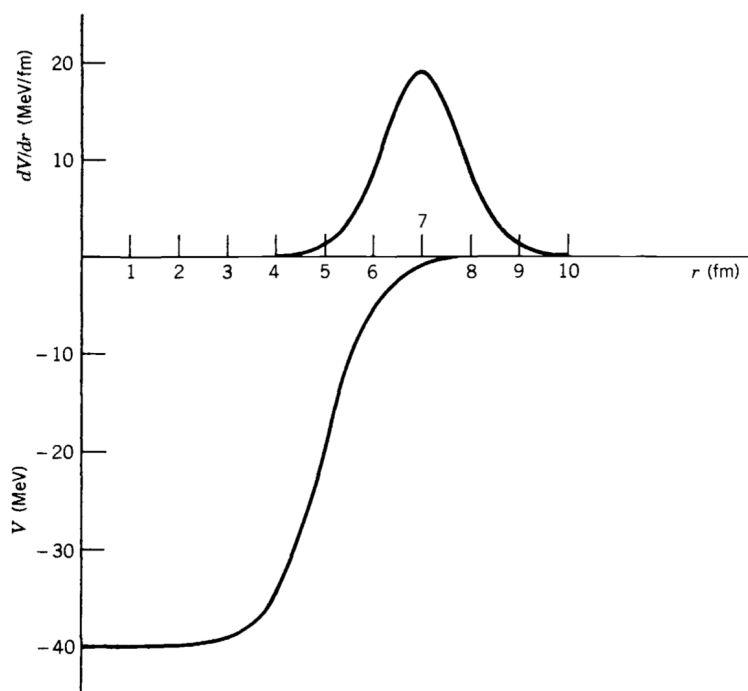


Figura 7.10: Funzioni  $V(r)$  e  $W(r) = dV/dr$ . Valori tipici sono  $V = 40$  MeV,  $R = 1.25 \times A^{1/3}$ ,  $a = 0.523$  fm.

- Si include un termine di spin-orbita con valore maggiore presso la superficie del nucleo, per tener conto che gli spin dei nucleoni più interni tendono a bilanciarsi.
- Se la particella incidente è elettricamente carica si include un termine coulombiano.
- Si risolve l'equazione di Schrödinger raccordando le condizioni al contorno per  $r = R$  e ottenendo le ampiezze complesse di  $\eta_\ell$  scattering che permettono infine di confrontare le sezioni d'urto calcolate e quelle sperimentali

In figura [7.11](#) un esempio del risultato di tale procedura. Il modello ottico è però utile solo nel discutere il comportamento medio nei processi di scattering, senza poter tener conto della gran parte delle interessanti caratteristiche legate alla struttura microscopica dei nuclei coinvolti e dell'interazione. I calcoli di modello ottico non dicono cosa ne sia delle particelle assorbite, ma semplicemente le escludono dal canale elastico. La complicazione delle molteplici interazioni fra tutti i nucleoni coinvolti in una reazione non può essere semplicemente racchiusa da un singolo potenziale.



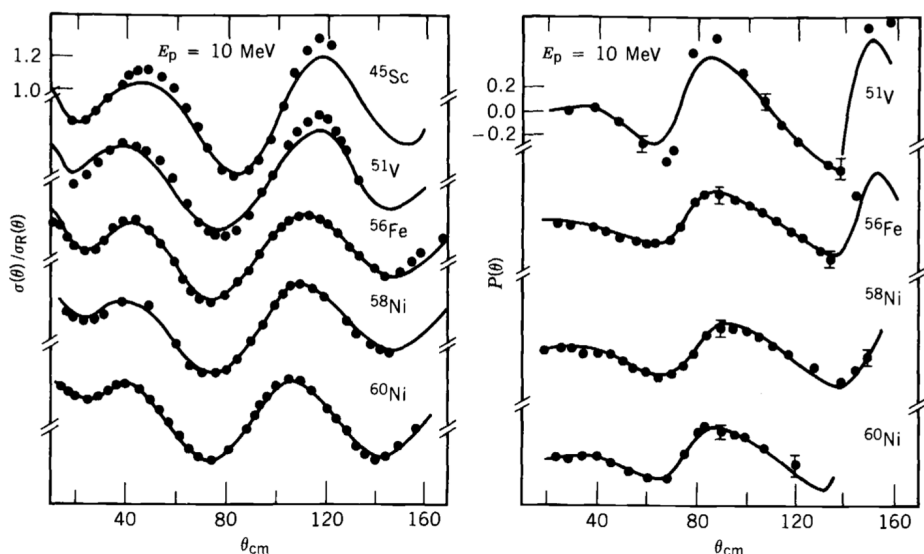
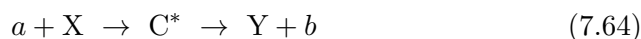


Figura 7.11: Fit di modello ottico per sezioni d'urto differenziali in rapporto alla sez. d'urto Coulombiana, e per polarizzazioni di protoni da 10-MeV diffusi elasticamente da diversi bersagli.

## 7.7 Reazioni con formazione del nucleo composto

Si immagini una particella che incide su un nucleo con parametro d'urto piccolo rispetto al raggio del nucleo stesso, e che quindi avrà una relativamente alta probabilità di interagire con uno dei suoi nucleoni. La particella, ceduta parte della propria energia, potrà comunque ancora interagire con i restanti nucleoni del nucleo in modo tale da ripartire la propria energia cinetica con molti nucleoni del nucleo bersaglio e divenire lei stessa parte del sistema fisico interagente bersaglio+proiettile. Se anche l'incremento medio di energia di ogni nucleone coinvolto è inferiore a quanto servirebbe per scalarlo dal nucleo, può però verificarsi che la redistribuzione statistica dell'energia portata dal proiettile possa talvolta concentrarne su uno dei nucleoni del sistema formatosi una quantità sufficiente a estrometterlo dal sistema in modo simile a quanto avviene nel caso dell'evaporazione d'una molecola da un liquido caldo.

Un simile processo avviene quindi tramite la formazione di uno "stato intermedio" successivo all'assorbimento della particella incidente e che precede l'emissione delle particelle per "evaporazione". Questo stato intermedio viene detto *nucleo composto* e una simile reazione viene indicata come



e  $C^*$  rappresenta il nucleo composto. Una simile reazione è quindi un processo che ha luogo in due fasi, la prima delle quali comporta la formazione

del nucleo composto, seguita dal suo "decadimento".

Il decadimento di un nucleo composto può avvenire in svariati modi e un'assunzione del modello è che le probabilità relative dei diversi possibili canali di decadimento siano indipendenti dal modo in cui il nucleo composto si è formato, e dipendano invece soltanto dalla composizione del nucleo composto e dall'energia totale del sistema, ciò equivale ad assumere l'ipotesi che la redistribuzione dell'energia cinetica del proiettile fra i nucleoni del nucleo composto avvenga in modo sostanzialmente "termico", con conseguente "perdita di memoria" del processo di formazione. Il successivo decadimento sarà quindi governato prevalentemente da processi statistici.

Un esempio interessante è riportato nello schema di figura [7.12](#) dove si vede come uno stesso nucleo composto possa essere ottenuto con diversi canali d'ingresso e possa produrre diversi canali di reazione. Il modello del nucleo

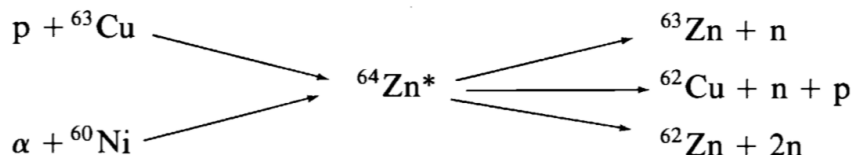


Figura 7.12: Esempio di formazione di un nucleo composto.

composto dá buoni risultati nella descrizione di reazioni a bassa energia, fra i 10 MeV e i 20 MeV, per le quali la probabilità che la particelle incidente sfugga dal sistema prima di essersi sostanzialmente "termalizzata" con esso è bassa. Per lo stesso motivo la sua efficacia cresce al crescere del numero di massa  $A$  dei nuclei bersaglio.

Da quanto detto si deduce anche che data la casualità delle interazioni che determinano la formazione di un nucleo composto, l'emissione dei prodotti di decadimento debba essere sostanzialmente isotropa, con una distribuzione angolare quindi uniforme nel sistema del CM, come confermato dai risultati sperimentali.

Se peraltro il proiettile ha un numero di massa non trascurabile rispetto al bersaglio, il momento angolare trasferito al nucleo composto durante l'urto può essere notevole e conseguentemente la distribuzione angolare delle particelle emesse dal suo decadimento ne risente con una preferenza per direzioni ortogonali a quella dell'asse del momento angolare trasferito.

Data l'analogia evaporativa si può dedurre che il numero delle particelle emesse da un nucleo composto cresca con l'energia e che la sezione d'urto abbia una forma pressochè Gaussiana. I tempi caratteristici d'evoluzione di un processo con formazione di un nucleo composto sono abbastanza lenti, dell'ordine di  $10^{-16} \div 10^{-18}$  s.

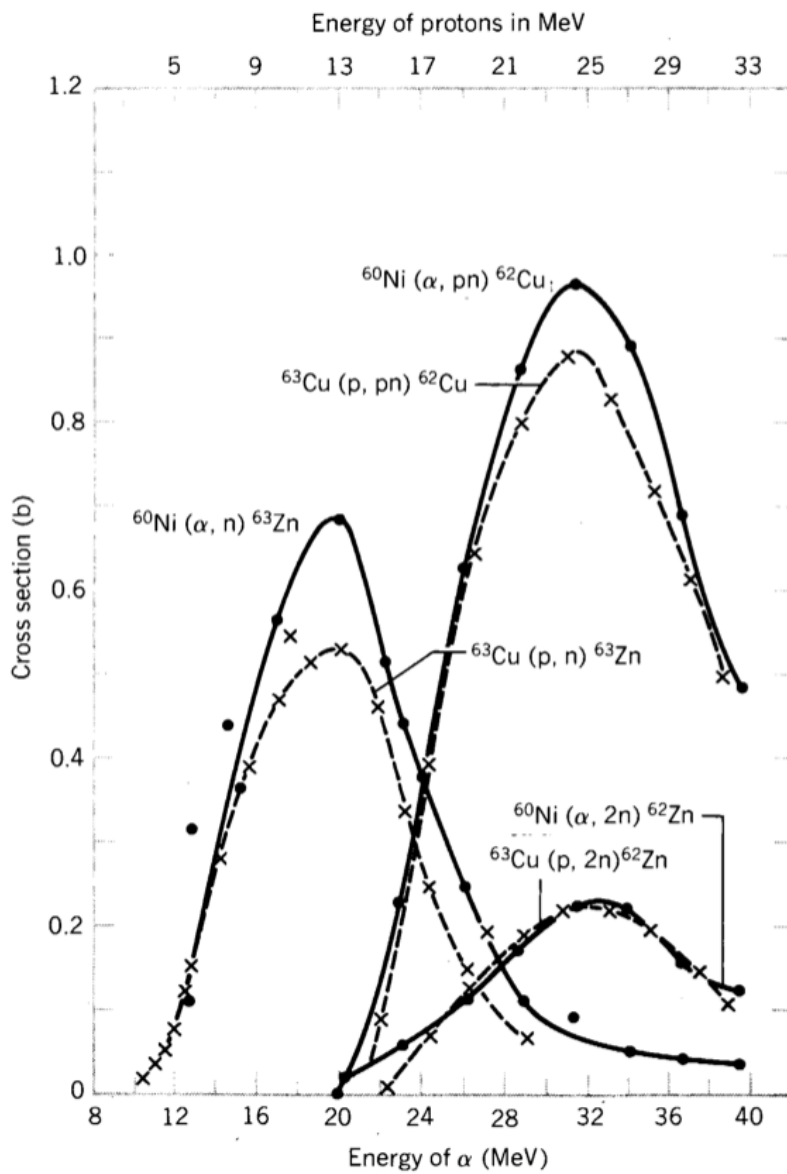


Figura 7.13: Sezioni d'urto per diverse reazioni che conducono al nucleo composto  $^{64}\text{Zn}^*$ .

## 7.8 Reazioni dirette

Al crescere dell'energia della particella incidente la sua lunghezza d'onda associata cala. Un nucleone da 1 MeV ha una lunghezza d'onda di de Broglie di circa 4 fm e quindi, non risolvendo i singoli nucleoni, è più facile che interagisca con un nucleo producendo un "nucleo composto". Salendo a 20 MeV la lunghezza d'onda associata scende a circa 1 fm rendendo possibile

un'interazione "diretta" fra il nucleone incidente e uno o comunque solo pochissimi fra i nucleoni del bersaglio.

Questa condizione, detta appunto *reazione diretta*, è quindi in un certo senso opposta a quella che conduce al nucleo composto, e oltretutto vede probabili urti fra i nucleoni incidenti e i nucleoni più periferici dei nuclei bersaglio.

I meccanismi del nucleo composto e delle reazioni dirette possono ovviamente contribuire entrambi a una certa reazione e diventa in tal caso importante capire come distinguere i due contributi.

Un'altra caratteristica delle reazioni dirette è il loro tempo di attuazione, dell'ordine di  $10^{-22}$  s, quindi da quattro a sei ordini di grandezza inferiore rispetto al caso del nucleo composto. Anche le distribuzioni angolari dei prodotti di reazione sono diverse nei due casi, caratterizzate da picchi definiti nel caso delle reazioni dirette.

Una reazione anelastica può procedere secondo entrambe le vie, con una forte dipendenza dall'energia del proiettile, come avviene ad esempio con la reazione di stripping del deutone  $X(d, n)Y$ , una *reazione di trasferimento* in cui un singolo protone viene trasferito dal proiettile al bersaglio.

L'altra reazione di stripping del deutone  $X(d, p)X'$  è invece più facile che proceda per via "diretta" in quanto l'evaporazione di un protone da un nucleo composto risulta inibita dalla barriera coulombiana.

La reazione  $X(\alpha, n)Y$  difficilmente procede invece per via diretta in quanto richiede il trasferimento di ben tre nucleoni su stati di valenza di un nucleo bersaglio, che è un processo molto poco probabile.

Un'applicazione importante delle reazioni di trasferimento di singola particella, specialmente  $(d, p)$  e  $(d, n)$ , concerne lo studio degli stati eccitati a breve vita media per confrontarne le caratteristiche con le previsioni del "modello a shell".

Lo studio delle reazioni di *pickup* in cui il proiettile cattura un nucleone al nucleo bersaglio, come ad esempio  $(p, d)$ , fornisce informazioni sugli stati di singola particella.

## 7.9 Reazioni di risonanza

Il modello del nucleo composto considera gli stati nucleari non legati come un continuo privo di struttura, anche se in realtà si tratta di stati definiti, ma in numero così grande e con energie così prossime l'una all'altra da formare uno spettro praticamente continuo.

Ognuno di questi stati è poi instabile e presenta quindi una certa "larghezza", il che determina una sostanziale "sovrapposizione" fra gli stati, se la distanza fra questi è dell'ordine o inferiore alla larghezza, da cui lo spettro praticamente "continuo" che giustifica il modello del nucleo composto.

Gli stati legati studiati tramite reazioni dirette rappresentano come detto la condizione simmetrica; risultano stabili rispetto all'emissione di particelle e

le loro vite medie sono molto più lunghe, come ad esempio per i decadimenti  $\gamma$ , per cui sono caratterizzati da "larghezze" molto inferiori. Uno stato con vita media di  $10^{-12}$  s ha ad esempio una larghezza di circa  $10^{-3}$  eV, quindi molto inferiore alla tipica spaziatura fra stati legati contigui. Questo rende plausibile trattare questi stati alla stregua di stati discreti caratterizzati ognuno da una propria funzione d'onda.

Fra questi due estremi si individua quella che vien detta regione di *risonanza*, caratterizzata da livelli discreti con alta probabilità, e quindi sezione d'urto, di formarsi e larghezze piuttosto ridotte in quanto presentano solitamente due soli modi di decadimento disponibili, ovvero la re-emissione della particella incidente o l'emissione di fotoni  $\gamma$ .

Il comportamento delle sezioni d'urto in prossimità dei valori d'energia caratteristici di tali livelli viene descritto con andamenti risonanti del tipo Breit-Wigner. Per una comprensione qualitativa di come si formano queste

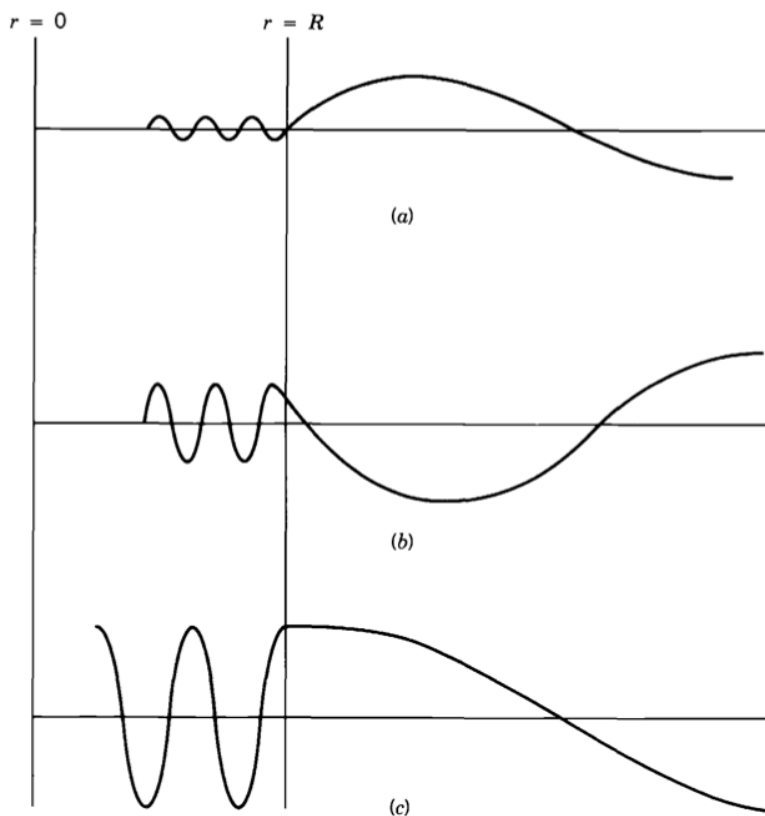


Figura 7.14: .....

reazioni risonanti si immagini il potenziale nucleare visto dalla particella catturata come una buca quadrata. Le funzioni d'onda oscillanti dentro e fuori la barriera devono essere accordate dolcemente (ad esempio imponendo l'uguaglianza delle funzioni che le descrivono e delle loro derivate prime in

concomitanza con la coordinata spaziale della barriera. La fase della funzione d'onda interna al nucleo influisce sull'ampiezza relativa della stessa fra dentro e fuori il nucleo. Nel caso (a) in figura la particella incidente ha probabilità piccola di penetrare nel nucleo e forma uno stato quasi legato con esso; nel caso (c) ha invece un'alta probabilità di penetrare. La fase fra la funzione d'onda fuori e dentro il nucleo dipende dall'energia della particella incidente, e così anche la localizzazione del punto di raccordo e le relative ampiezze. Le energie per le quali si ottiene una condizione come quella descritta in (c) sono quelle che mostrano *risonanza* nella sezione d'urto.

Dalla [7.55](#), supponendo che una sola onda parziale  $\ell$  contribuisca significativamente allo stato risonante, lo si otterrà in corrispondenza ad  $\eta_\ell = -1$ , corrispondente ad uno sfasamento  $\delta_\ell = \pi/2$ .

La forma della risonanza si ottiene espandendo lo sfasamento attorno a questo valore. Si ha una convergenza migliore espandendo la cotangente di  $\delta_\ell$ , da cui, trascurando termini d'ordine superiore, si ha

$$\cot\delta_\ell = -\frac{(E - E_R)}{\Gamma/2} \quad (7.65)$$

Con

$$\Gamma = 2 \left( \frac{\partial\delta_\ell}{\partial E} \right)_{E=E_R}^{-1} \quad (7.66)$$

la larghezza a metà ampiezza della risonanza.

Dalla [7.65](#) si ottiene

$$\text{sen}\delta_\ell = \frac{\Gamma/2}{[(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4]^{1/2}} \quad (7.67)$$

e per la sezione d'urto di scattering

$$\sigma_{sc} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma^2}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \quad (7.68)$$

Una prima generalizzazione consiste nel tener conto dello *spin*. Detti  $s_a$  ed  $s_X$  gli spin di proiettile e bersaglio, ed  $I$  il momento angolare totale della risonanza, si ha

$$\mathbf{I} = \mathbf{s}_a + \mathbf{s}_Z + \boldsymbol{\ell} \quad (7.69)$$

che porta a sostituire nella [7.68](#) il fattore  $(2\ell + 1)$  col più generale fattore statistico

$$g = \frac{2I + 1}{(2s_a + 1)(2s_X + 1)} \quad (7.70)$$

Bisogna poi tener conto della possibilità che la risonanza decada in canali diversi e indipendenti, per cui la sua larghezza totale  $\Gamma$  è somma di larghezze parziali  $\Gamma_i$

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i \quad (7.71)$$

Il fattore  $\Gamma^2$  a denominatore della [7.68](#) è connesso alla larghezza di decadimento dello stato risonante e quindi alla sua vita media  $\tau = \hbar/\Gamma$ .

Il fattore  $\Gamma^2$  a numeratore è invece direttamente connesso alla formazione della risonanza e alla sua probabilità di decadere in un canale particolare. Nel caso dello scattering elastico, nella cui ipotesi si è ottenuta la [7.68](#), canale d'ingresso e d'uscita della reazione coincidono. Quindi per la reazione  $a + X \rightarrow a + X$ , nella sezione d'urto si utilizza la stessa larghezza parziale

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} g \frac{(\Gamma_{aX})^2}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \quad (7.72)$$

Per una reazione del tipo  $a + X \rightarrow b + Y$  si pone invece

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_{aX}\Gamma_{bY}}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \quad (7.73)$$

Le [7.72](#) e [7.73](#) sono due tipici esempi di espressioni di Breit-Wigner che descrivono la forma di risonanze singole e isolate, come in figura [7.15](#). Le

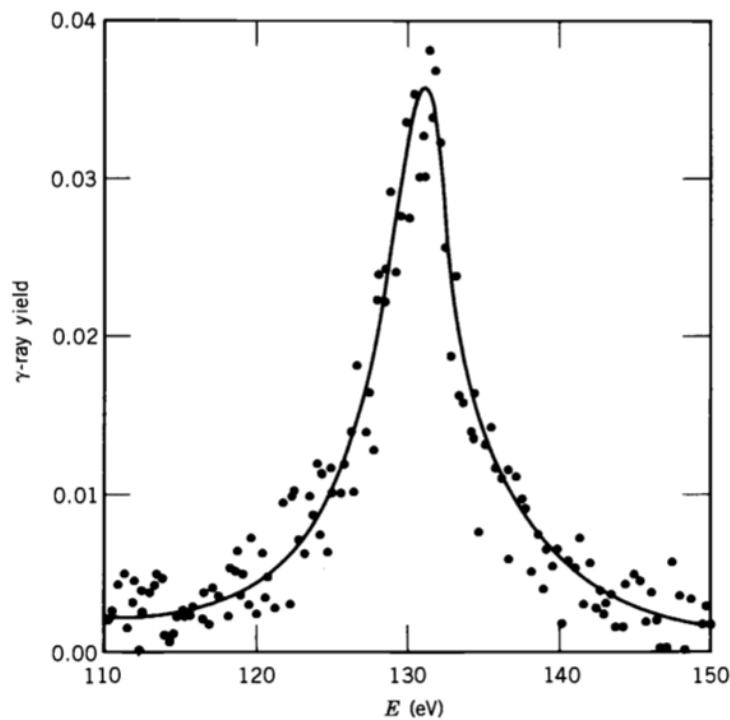


Figura 7.15: Risonanze nello scattering di neutroni da 130 eV su  $^{59}\text{Co}$ . È mostrato lo yield dei  $\gamma$  per la cattura radiativa dei neutroni sul  $^{59}\text{Co}$ .

risonanze da scattering elastico non hanno sempre esattamente la forma descritta dall'espressione di Breit-Wigner e ciò è dovuto ad un contributo all'ampiezza di reazione di un'interazione diretta della particella incidente

con il potenziale nucleare senza formazione di stato risonante. Questo tipo di processo è detto *scattering da potenziale*, o *shape-elastic scattering*. Scat-

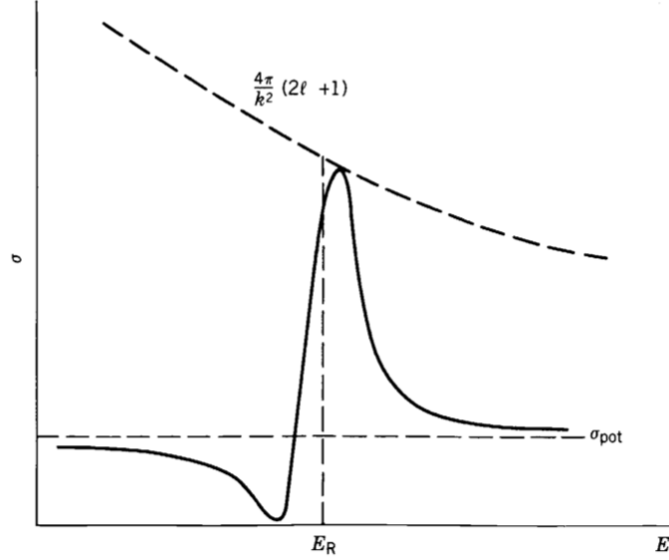


Figura 7.16: Interference between resonance and potential scattering produces resonances with this characteristic shape.

tering da potenziale e risonante contribuiscono entrambi all'ampiezza dello scattering elastico, e la loro mutua interferenza causa modificazioni nella sezione d'urto completa, col risultato che questa può risultare inferiore a quella dovuta ad uno solo dei due processi. Non è quindi sempre corretto sommare semplicemente le sezioni d'urto per trovare quella totale. Si tiene conto dei due processi scrivendo

$$\eta_\ell = e^{2i(\delta_{\ell R} + \delta_{\ell P})} \quad (7.74)$$

con  $\delta_{\ell R}$  lo sfasamento risonante, e  $\delta_{\ell P}$  un contributo addizionale allo sfasamento dovuto allo Scattering da potenziale. Dalla [7.51](#) si trova quindi per la sezione d'urto

$$\sigma_{sc} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \left| e^{-2i\delta_{\ell P}} - 1 + \frac{i\Gamma}{(E - E_R) + i\Gamma/2} \right|^2 \quad (7.75)$$

Lontano dalla risonanza  $(E - E_R) \gg \Gamma/2$ , e domina il potenziale di scattering, per cui

$$\sigma \simeq \sigma_{pot} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_{\ell P} \quad (7.76)$$

Per  $E = E_R$  domina il termine risonante e

$$\sigma \simeq \sigma_{ris} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \quad (7.77)$$



In prossimità della risonanza l'interferenza fra i due termini produce la caratteristica forma mostrata in figura [7.16](#).

Anche le reazioni di cattura radiativa mostrano una tipica struttura di risonanza, come per lo spettro in figura [7.17](#).

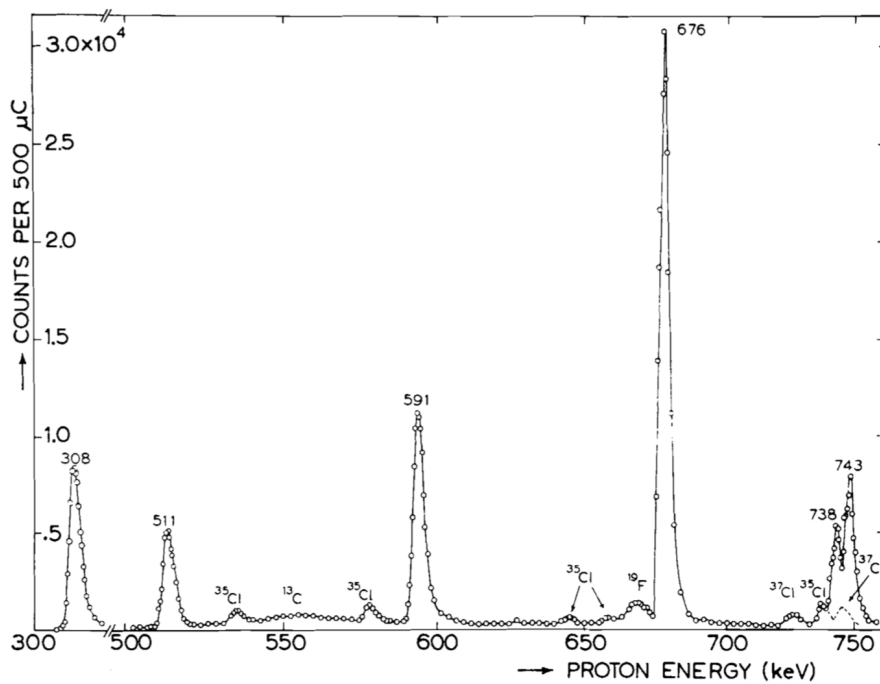


Figura 7.17: Risonanze da cattura radiativa di protoni su <sup>23</sup>Na. Si osservano anche picchi relativi al Cl in quanto il bersaglio consisteva in NaCl.



## Capitolo 8

# Fisica dei neutroni

Il neutrone gioca un ruolo fondamentale nello studio della forza nucleare. Non percependo la barriera coulombiana i neutroni possono penetrare un nucleo e dare avvio ad una reazione anche se dotati di bassissime energie cinetiche (inferiori ad 1 eV). D'altra parte l'insensibilità all'interazione coulombiana determina alcune difficoltà sperimentali nell'utilizzo dei neutroni come sonde, specie riguardo alla possibilità di focalizzarne fasci e selezionarne con precisione l'energia, oltre che per la difficoltà di rivelarli.

Il neutrone libero è instabile per decadimento  $\beta$  con una vita media di circa 879 s. Un neutrone legato in un nucleo può risultare sia più stabile che meno stabile.

Se il neutrone fosse una particella *elementare* il suo momento di *dipolo elettrico* dovrebbe risultare nullo, ma lo sarebbe anche se i suoi eventuali componenti fossero legati da forze simmetriche rispetto alla parità e all'inversione temporale. Gli esperimenti più sensibili effettuati danno, per il valore del momento elettrico del dipolo del neutrone, un limite superiore di circa  $3 \times 10^{-26} e \times \text{cm}$ .

Secondo le teorie di Grande Unificazione il principio di conservazione del numero barionico potrebbe venir meno, per cui il neutrone libero potrebbe *oscillare* e convertirsi talvolta nella propria antiparticella (anti-neutrone), e poi ritornare alla condizione di neutrone, anche se fino ad oggi non vi è evidenza sperimentale di questo effetto.

Un altro fatto molto interessante e tuttora irrisolto concerne l'effettiva vita media del neutrone libero, per la quale non esiste ad oggi un valore univocamente definito, in quanto vi sono due diversi valori, entrambi apparentemente accurati e precisi ma tra loro inconciliabili entro più di quattro deviazioni standard, che vengono da due diverse strategie di misura, una in volo e l'altra a riposo in trappole magnetiche.

## 8.1 Sorgenti di neutroni

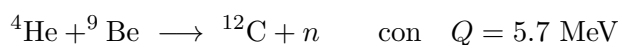
Per ottenere neutroni di energie cinetiche diverse non li si può accelerare come si fa con particelle cariche, ma si può partire con neutroni di alta energia e decelerarli riducendo la loro energia cinetica tramite urti con atomi, processo detto di *moderazione* dei neutroni.

I neutroni risultanti hanno energie cinetiche che vengono tipicamente suddivise in quattro categorie

Termici	$E \simeq 0.025 \text{ eV}$
Epitermici	$E \sim 1 \text{ eV}$
Lenti	$E \sim 1 \text{ keV}$
Veloci	$E = 100 \text{ keV} \div 10 \text{ MeV}$

### Sorgenti $\alpha$ -berillio

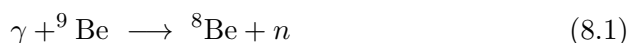
La reazione che ha portato alla scoperta del neutrone è una possibile sorgente di neutroni



Se si mescolano  ${}^9\text{Be}$  con emettitori  $\alpha$  a lunga vita media, come ad esempio il  ${}^{226}\text{Ra}$ , si ottiene la produzione di un rateo pressochè costante di neutroni. Dal  ${}^{226}\text{Ra}$  e dai suoi *figli* si ha emissione di  $\alpha$  con energie fra i 5 MeV e gli 8 MeV, per cui, dato il  $Q$ -valore, si possono avere neutroni distribuiti su uno spettro abbastanza continuo fino a  $\sim 13 \text{ MeV}$ .

### Sorgenti con fotoneutroni

Si possono produrre neutroni anche con reazioni iniziate da raggi  $\gamma$ ,  $(\gamma, n)$ , col vantaggio di ottenere neutroni di energia meglio definita, proporzionalmente all'energia dei  $\gamma$  della sorgente utilizzata. Il  ${}^{24}\text{Na}$  emette ad esempio  $\gamma$  da 2.76 MeV, l'assorbimento di uno dei quali dovrebbe essere sufficiente a fornire al  ${}^9\text{Be}$  un'energia superiore a quella di legame di un suo neutrone



Si ottiene uno yield accettabile di circa  $2 \times 10^6$  neutroni/s per Ci di  ${}^{24}\text{Na}$ , ma con una breve vita media, di circa 15 ore. L'energia dei neutroni prodotti è di circa 0.8 MeV.

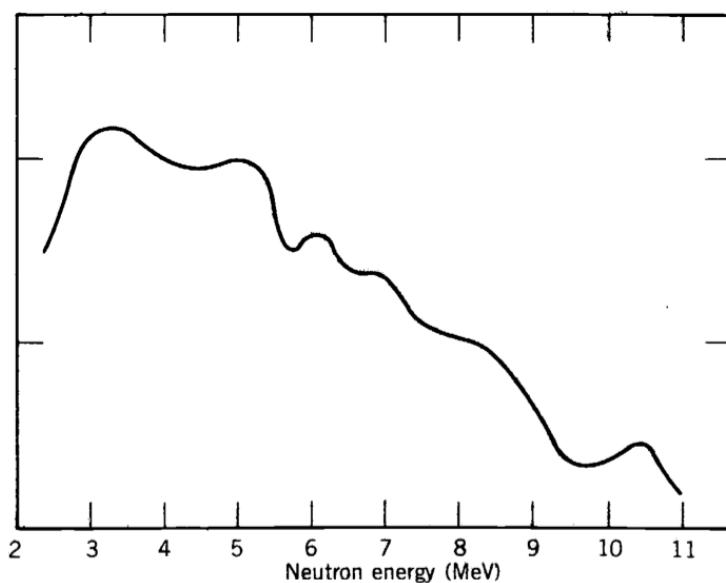


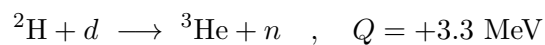
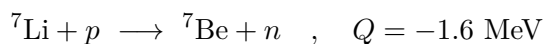
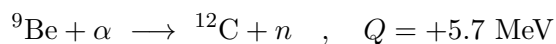
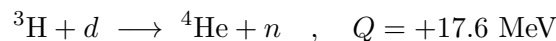
Figura 8.1: Spettro dei neutroni da sorgente Ra-Be. La struttura dello spettro dipende anche dal fatto che il  $^{12}\text{C}$  sia lasciato nello stato fondamentale o in uno dei due stati eccitati a 4.43 MeV o 7.6 MeV.

### Sorgenti a fissione spontanea

La fissione spontanea dell'isotopo  $^{252}\text{Cf}$ , con vita media di 2.65 anni, è una sorgente comunemente usata. Ogni fissione produce circa 4 neutroni, con un rateo di circa  $2.3 \times 10^{12}$  neutroni/s per grammo di  $^{252}\text{Cf}$ . Le energie dei neutroni prodotti hanno una caratteristica distribuzione continua da fissione con valori medi nell'intervallo  $1 \div 3$  MeV.

### Neutroni prodotti da reazioni nucleari

Disponendo di acceleratori si possono produrre neutroni anche tramite reazioni nucleari, e sfruttando la cinematica delle reazioni se ne può anche definire con precisione l'energia cinetica. Alcune tipiche reazioni utilizzate sono



In figura [8.2](#) è riportata la dipendenza dell'energia dei neutroni prodotti per la prima delle reazioni indicate, in funzione dell'energia della particella incidente e dell'angolo d'emissione del neutrone.

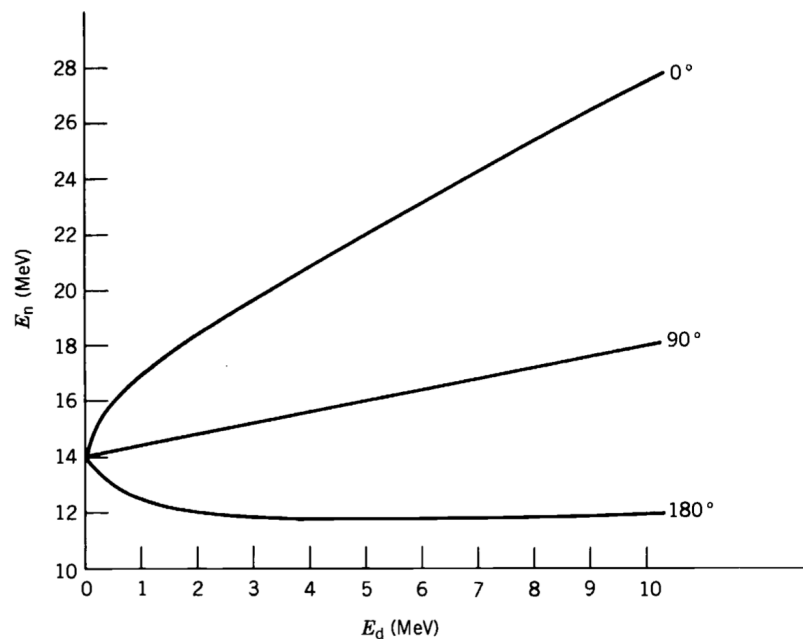


Figura 8.2: Neutroni emessi dalla reazione  $d(t, {}^4\text{He})n$

### Sorgenti da reattori

Il flusso neutronico in prossimità del core di un reattore a fissione può essere tipicamente dell'ordine di  $10^{14}$  neutroni/(s  $\times$  cm<sup>2</sup>). Lo spettro in energia si estende fino a circa 5 ÷ 7 MeV, col massimo attorno a circa 1 ÷ 2 MeV.

Nel reattore la gran parte di questi neutroni viene termalizzata, ma ve ne sono anche di energetici che possono essere estratti tramite un piccolo foro nello schermaggio del reattore e utilizzati per esperimenti. Gli alti flussi di neutroni da reattori sono particolarmente utili per la produzione di radioisotopi da cattura neutronica.

### Sorgenti di spallazione

Vedi articolo di G.S. Bauer - NIM A 463 (2001) 505-543.

## 8.2 Assorbimento e moderazione dei neutroni

L'intensità di un fascio di neutroni che attraversa materia decresce in quanto neutroni sono rimossi dal fascio per effetto di interazioni nucleari<sup>1</sup>. I neutroni veloci possono dar luogo a svariate reazioni quali  $(n, p)$ ,  $(n, \alpha)$  o  $(n, 2n)$ , ma nel caso di neutroni lenti o termici il motivo principale della loro scomparsa dal fascio è la loro cattura tramite reazioni del tipo  $(n, \gamma)$ . Spesso le sezioni d'urto di queste reazioni sono dominate da una o più risonanze al di fuori dalle quali la sezione d'urto decresce, al crescere della velocità  $v$ , come  $1/v$ . Man mano che i neutroni vengono quindi rallentati da processi elastici e inelastici, diventa sempre più probabile il loro assorbimento.

Penetrando uno spessore  $dx$  di materiale i neutroni di un fascio incidente incontrano  $ndx$  atomi per unità d'area, con  $n$  il numero di atomi per unità di volume del materiale. Detta  $\sigma_t$  la sezione d'urto totale, comprendente quindi anche processi che si limitano a deviare i neutroni dalla loro traiettoria originale, si esprime la riduzione  $dI$  dell'intensità del fascio incidente come

$$dI = -I\sigma_t n dx \quad (8.2)$$

per cui l'intensità  $I(x)$  decresce con legge esponenziale in funzione dello spessore dell'assorbitore

$$I(x) = I_0 e^{-\sigma_t n x} \quad (8.3)$$

Questo risultato vale per neutroni monoenergetici, in quanto la sezione d'urto  $\sigma_t(E)$  dipende anche dall'energia, per cui, anche partendo da un fascio monoenergetico, la [8.3](#) da sola non può descrivere l'intero processo di riduzione dell'intensità totale del fascio in quanto non è applicabile, immutata, a neutroni del fascio che abbiano già interagito col materiale.

Si consideri un urto elastico fra un neutrone di energia iniziale  $E$  e velocità  $v$  e un atomo del bersaglio, di massa  $A$ , inizialmente a riposo. Dalla conservazione di energia e impulso si ottiene il rapporto tra le energie finale  $E'$  e iniziale  $E$  del neutrone

$$\frac{E'}{E} = \frac{A^2 + 1 + 2A \cos \vartheta}{(A + 1)^2} \quad (8.4)$$

con  $\vartheta$  l'angolo di diffusione nel sistema del centro di massa (CM), ma  $E$  ed  $E'$  misurati nel sistema del laboratorio (SL). In assenza di scattering la [8.4](#) dà correttamente  $E'/E = 1$ . La massima perdita d'energia si ha per urti centrali ( $\vartheta = 180^\circ$ )

$$\left(\frac{E'}{E}\right)_{min} = \left(\frac{A - 1}{A + 1}\right)^2 \quad (8.5)$$

Quindi se  $A = 1$ , scattering con idrogeno, il neutrone cede tutta la sua energia al protone colpito. Per neutroni di energie dell'ordine dei MeV o inferiori

<sup>1</sup>Vedi anche E.Segrè, Nuclei e particelle, paragrafi 12.2 ÷ 12.7.

lo scattering avviene prevalentemente in *onda s* e pertanto, nel sistema del (CM), è praticamente indipendente da  $\vartheta$ . I valori di  $E'/E$  sono uniformemente distribuiti fra  $E'/E = 1$  ed il valore minimo è dato dalla [8.5](#), come in figura [8.3\(a\)](#).

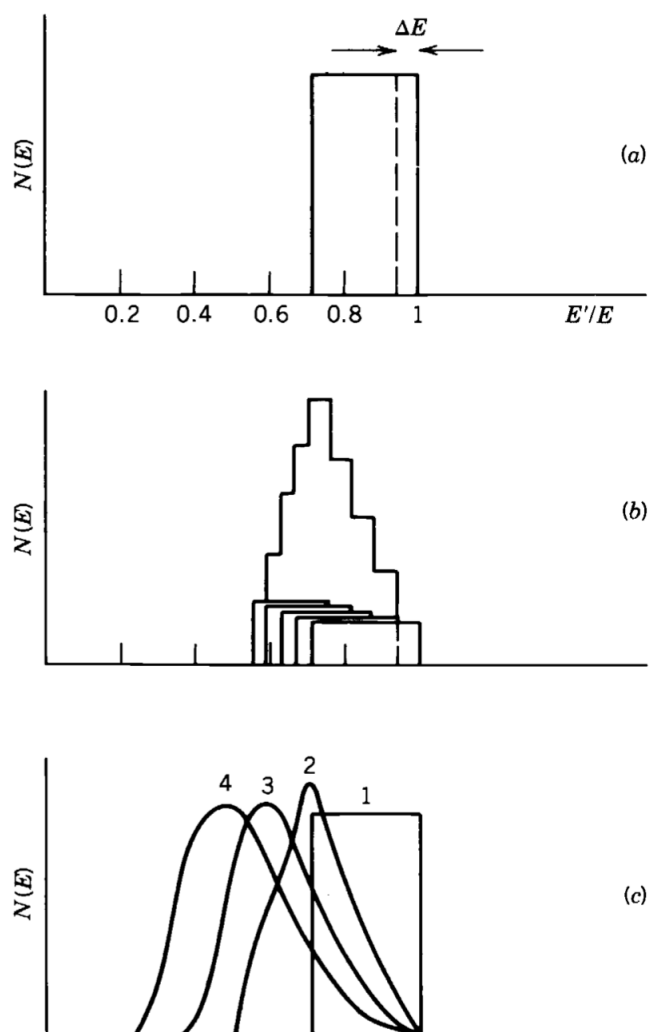


Figura 8.3: (a) A monoenergetic neutron of energy  $E$  gives, after a single  $s$ -wave scattering from  $^{12}\text{C}$ , a flat distribution of laboratory energies  $E'$  from  $0.72 \cdot E$  to  $E$ . (b) Dividing the scattered distribution into five narrow, nearly monoenergetic distributions of width  $\Delta E$ , we get after a second scattering the five flat distributions shown, whose sum is the peaked distribution. (c) An exact calculation of the energy distribution after 1, 2, 3, and 4 scatterings.

Ogni neutrone urta ripetutamente i nuclei bersaglio, e quindi bisogna con-



tinuamente ricalcolare l'energia persa. Nel caso di un secondo scattering i neutroni risultanti non sono dunque più monoenergetici ma distribuiti come in figura 8.3(a). Si può approssimare ciò *affettando* la distribuzione in tanti sotto-intervallini contigui associati a intervalli  $\delta E$  sufficientemente piccoli da poterli approssimare con un ben definito valore d'energia per i neutroni ad essi associati, ottenendo quanto illustrato in figura 8.3(b). Procedendo in tal modo, con scelte di  $\Delta E$  sufficientemente piccole, si ottengono generazioni successive di distribuzioni energetiche, come mostrato in figura 8.3(c). Si può quindi definire il parametro  $\xi$ , detto *letargia*

$$\xi = \left( \log \frac{E}{E'} \right)_{ave} = \frac{\int \log \left[ \frac{(A+1)^2}{A^2 + 1 + 2A \cos \vartheta} \right] d\Omega}{\int d\Omega} \quad (8.6)$$

che rappresenta il valor medio di  $\log(E/E')$  dopo una singola collisione, e dove  $d\Omega$  è l'elemento d'angolo solido nel (CM). Supponendo isotropo lo scattering e integrando si ha

$$\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \log \frac{A-1}{A+1} \quad (8.7)$$

Il valore medio di  $\log E'$  si riduce di una quantità  $\xi$  dopo ogni collisione, e dopo  $n$  collisioni successive diventa

$$\log E'_n = \log E - n\xi \quad (8.8)$$

In tabella sono riportati i valori della letargia  $\xi$  per alcuni materiali utilizzati come moderatori nel caso di neutroni con energie di circa 2 MeV, quelle tipiche nel caso di neutroni provenienti da fissione. Il numero di urti per raggiungere la termalizzazione è indicato con  $n$ .

Tabella - Proprietà moderatrici di alcuni nuclei.

Nucleo	$\xi$	$n$
$^1\text{H}$	1.00	18
$^2\text{H}$	0.725	25
$^4\text{He}$	0.425	43
$^{12}\text{C}$	0.158	110
$^{238}\text{U}$	0.0084	2200

Il calcolo mostrato presuppone che gli atomi su cui i neutroni urtano siano a riposo, che è una buona approssimazione per neutroni di alcuni Mev, ma non lo è per neutroni che stiano raggiungendo le energie termiche, ovvero le stesse dei bersagli che incontrano. Lo scattering in tal caso può essere

meglio descritto con approccio statistico, assumendo che dopo un tempo sufficiente i neutroni abbiano raggiunto l'equilibrio termico con gli atomi del moderatore a una temperatura  $T$ . La distribuzione in velocità dei neutroni, in questo caso, sarà di tipo Maxwelliano

$$f(v)dv = 4\pi n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv \quad (8.9)$$

con  $m$  la massa di un neutrone, ed  $n$  la densità volumetrica di neutroni. Riscrivendo in termini dell'energia cinetica dei neutroni si ha

$$f(E)dE = \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT} dE \quad (8.10)$$

che sostanzialmente descrive quanto mostrato in figura [8.3\(c\)](#) dopo alcune generazioni di collisioni.

### 8.3 Reazioni con neutroni e sezioni d'urto

Partendo da un modello ad assorbimento totale si è ottenuta, per la sezione d'urto di reazione, l'espressione [7.57](#)

$$\sigma_r = \pi(R + \lambda)^2$$

Trattando dello scattering di neutroni su nuclei bisognerebbe includere anche la riflessione sulla superficie nucleare della funzione d'onda del neutrone incidente, per valutare la probabilità che il neutrone incidente penetri nella regione del potenziale nucleare, dove può essere assorbito. Descrivendo in prima approssimazione la superficie nucleare con una barriera rettasngolare, la probabilità di trasmissione attraverso essa è quella calcolata trattando del decadimento  $\alpha$ , e includendola come fattore nell'espressione della sezione d'urto di reazione per neutroni si ha

$$\sigma = \pi(R + \lambda)^2 \frac{4kK}{(k + K)^2} \quad (8.11)$$

con  $K = \sqrt{2m(E + V_0)/\hbar^2}$  per una barriera di profondità  $-V_0$ , e  $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ . Con neutroni di bassa energia,  $E \ll V_0$ ,  $k \ll K$  ed anche  $\lambda = k^{-1} \gg R$ , per cui

$$\sigma \simeq \frac{4\pi}{kK} \quad (8.12)$$

Dato che  $k = p/\hbar = mv/\hbar$ , si ottiene l'osservata dipendenza della sezione d'urto da  $1/v$ .

Questa può essere dedotta alternativamente anche partendo dalla formula [7.73](#) per una singola risonanza

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_{aX}\Gamma_{bY}}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

Il meccanismo principale di decadimento successivo a una cattura neutronica, è l'emissione di un raggio  $\gamma$ , la cui probabilità è virtualmente indipendente da qualsiasi piccola variazione dell'energia incidente o di risonanza. Si può pertanto considerare  $\Gamma$  indipendente dall'energia del neutrone. La larghezza  $\Gamma_n$ , riferita al canale d'ingresso della reazione, dipende dalla densità  $dn/dE$  degli stati finali disponibili per il neutrone catturato, che in base alla [6.22](#) è proporzionale alla velocità  $v$  del neutrone.

Quindi, quando  $\Gamma_n \propto v$  e lontano dalla risonanza, ovvero per  $E \ll E_R$

$$\sigma \simeq \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_n \Gamma}{E_R^2 + \Gamma^2/4} \propto \frac{1}{v} \quad (8.13)$$

Come si vede in figura [8.4](#) la dipendenza da  $1/v$  è seguita piuttosto accuratamente lontano dalle risonanze.

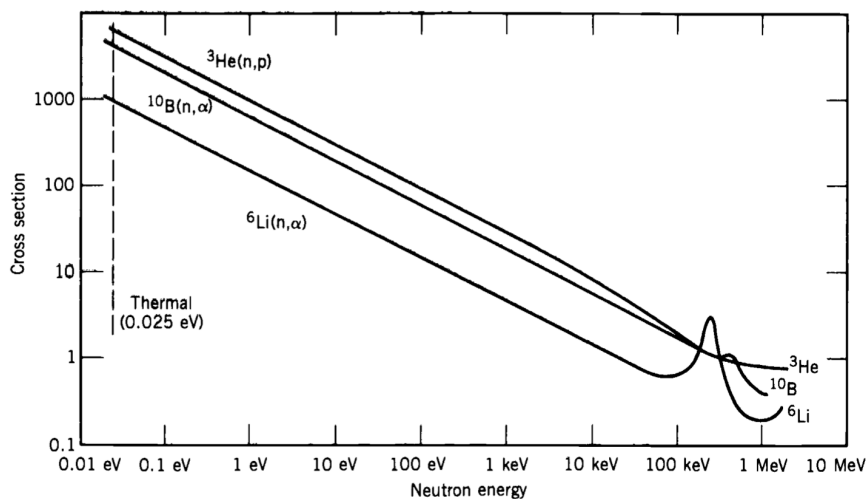


Figura 8.4: Sezioni d'urto per neutroni nelle reazioni  ${}^3\text{He}(n,p)$ ,  ${}^{10}\text{B}(n,\alpha)$ ,  ${}^6\text{Li}(n,\alpha)$ . Si nota l'andamento  $\propto 1/v$  per  $E < 1$  keV, con risonanze sopra i 100 keV.

Per quanto concerne la zona delle risonanze non c'è modo di predire con esattezza la posizione in energia dei picchi di risonanza; la struttura può essere dominata da una singola risonanza isolata, come nel caso del cadmio Cd, in figura [8.5](#), o mostrare una struttura complessa, come per l'uranio  ${}^{238}\text{U}$ , in figura [8.6](#).

Le dipendenze dall'energia e dal numero di massa  $A$  per le sezioni d'urto totali neutrone-nucleo misurate, sono mostrate in figura [8.7](#)(a); in figura [8.7](#)(b) si vede quanto si ottiene in proposito per le stesse calcolandole in base al modello ottico.

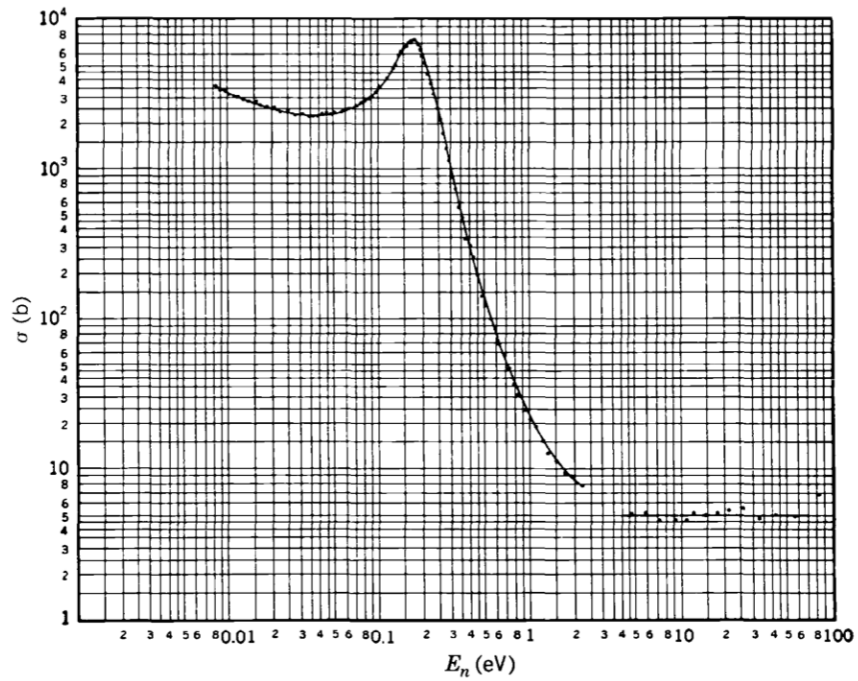


Figura 8.5: Singola risonanza isolata sovrapposta a un'andamento  $\propto 1/v$  nel cadmio Cd.

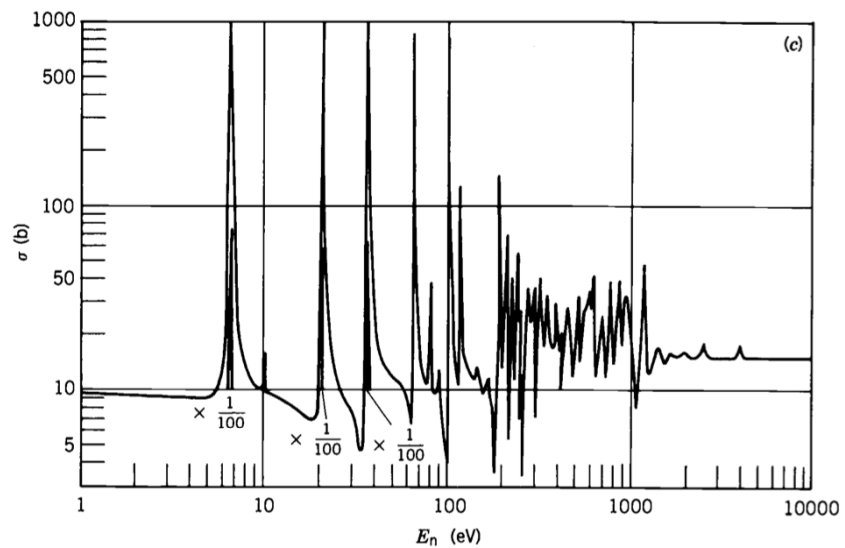
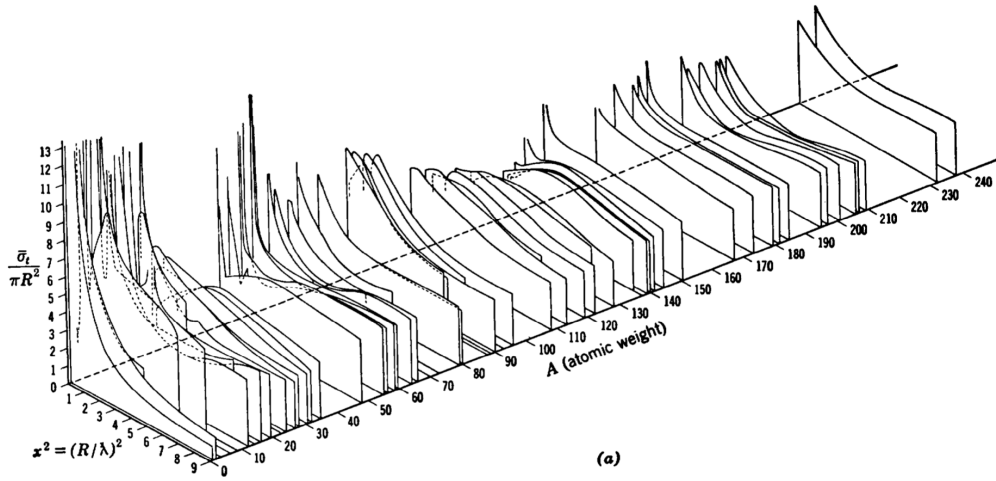


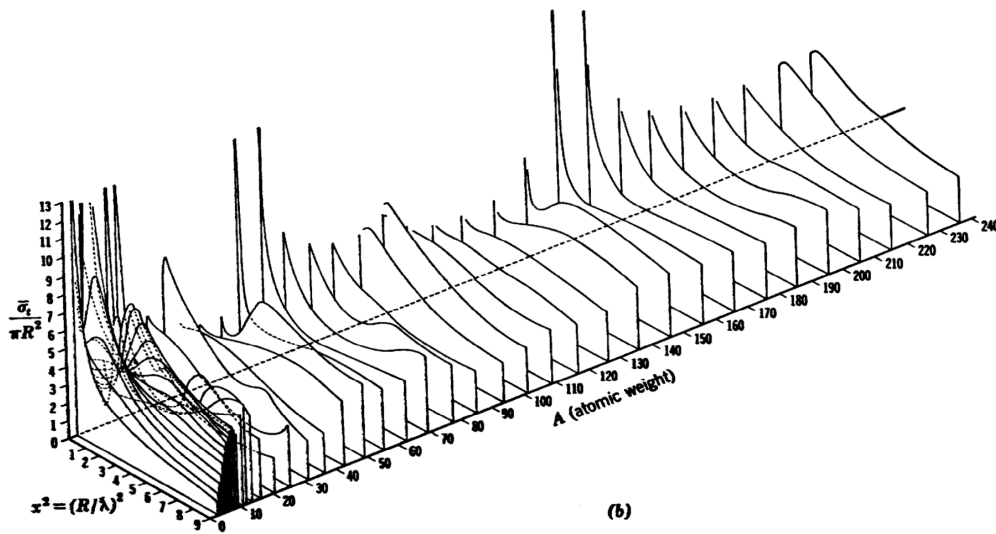
Figura 8.6: Picchi stretti nella regione di risonanze per  $^{238}\text{U}$ .

[Sezioni d'urto misurate]



(a)

[Sezioni d'urto calcolate]



(b)

Figura 8.7:  $\sigma_{tot}$  misurate (a) e calcolate (b), in unità  $\pi R^2$ , per neutroni di diverse energie ( $x^2$  è un parametro energetico in forma adimensionale).



## Capitolo 9

# Radioisotopi e medicina nucleare

Le immagini di diagnostica medica prodotte con i raggi X sono generate dall'attenuazione di fasci di radiazione elettromagnetica da parte del corpo umano e forniscono informazioni di tipo *anatomico*.

Un modo totalmente diverso di produrre immagini dell'interno di un corpo, sempre utilizzando radiazioni elettromagnetiche, consiste nell'introdurre nel corpo sorgenti radioattive, in quantità minime dell'ordine dei nanogrammi ( $10^{-9}$  g), onde non produrre effetti tossici, ma sufficienti a permettere la rivelazione della radiazione  $\gamma$  poi emessa.

L'elemento radioattivo utilizzato, detto *radionuclide*, è legato a molecole di sostanze, dette *tracciatori* (*vettori?*), che possano veicolarlo nel corpo ed essere assorbite dagli organi e tessuti che si vogliono studiare.

In alcuni casi il radionuclide può risultare di per sè selettivo rispetto all'organo da studiare, come ad esempio lo iodio per la tiroide. Radioisotopi non selettivi, come ad esempio il tecnezio  $^{99}_{43}\text{Tc}$ , richiedono invece di essere legati a opportune sostanze veicolanti. La miscela di radioisotopo e sostanza veicolante è il *radiofarmaco*.

Dopo l'introduzione del radiofarmaco nel corpo bisogna attendere che esso raggiunga una condizione di bio-equilibrio con l'organo da studiare, prima di iniziare il rilevamento dei  $\gamma$  per ottenere poi le immagini diagnostiche. Quest'ultima fase viene attuata con una  $\gamma$ -camera [1](#).

Un radiofarmaco può essere trasportato attraverso l'organismo *meccanicamente*, ad esempio dal flusso sanguigno, o attraverso processi metabolici, come per lo iodio. Un'opportuna singola somministrazione di radiofarmaco può permettere lo studio dell'intero corpo, ma solitamente si agisce in modo da localizzare organi specifici.

Spesso l'assorbimento del tracciatore da parte di un organo avviene in modo diverso se l'organo è sano o soffre di patologie. La misura della quantità di

---

<sup>1</sup>Vedi Appendice [E](#)

radiazione emessa permette di risalire alla quantità di tracciatore assorbita e alla sua distribuzione nei tessuti.

Val la pena sottolineare un'altra importante differenza rispetto ai raggi X. Questi sono fortemente assorbiti dal tessuto osseo, e risulta di conseguenza difficoltoso utilizzarli ad esempio per indagare il cervello. Essi, come del resto anche gli ultrasuoni, devono attraversare due volte tessuto osseo prima di riemergere ed essere raccolti a formare un'immagine. Raggi  $\gamma$  di radioisotopi presenti dentro il cranio devono invece attraversare una sola volta tessuto osseo per essere raccolti a formare un'immagine.

Un'ulteriore differenza è relativa al fatto che nella radiografia X l'assorbimento della radiazione è un elemento essenziale per l'ottenimento delle immagini, che si basano proprio sul contrasto determinato dai diversi livelli di assorbimento dei raggi X nei diversi tessuti.

Con l'uso di radioisotopi, provenendo la radiazione direttamente dall'interno del corpo, il suo assorbimento nei tessuti attraversati risulta un fattore negativo, riducendo il numero dei raggi  $\gamma$  utili. È quindi preferibile, in tal caso, utilizzare radiazioni di energie tali da ridurre il più possibile l'assorbimento nei tessuti. Per un'efficace resa nella raccolta delle immagini è poi necessario che il fondo dovuto alla radioattività naturalmente prodotta dai tessuti del corpo studiato sia molto minore della radioattività associata ai radioisotopi introdotti nel corpo.

La necessità di soddisfare a queste condizioni concomitanti si abbina ovviamente a quella fondamentale di danneggiare il meno possibile i tessuti interessati con la radioattività emessa dai radionuclidi utilizzati. A tal proposito bisogna fare in modo che il radionuclide permanga nel corpo soltanto il tempo necessario ad effettuare l'esame, o comunque il meno possibile e sia poi espulso, o comunque abbia una vita media breve, compatibile con i tempi necessari ad effettuare l'esame medico, e anche per evitare inquinamento radioattivo ambientale una volta espulso.

## 9.1 Diagnostica per immagini

La diagnostica per immagini in ambito medico copre un ambito vastissimo, e qui citeremo molto brevemente soltanto due casi, quello della cosiddetta SPECT (Single-Photon Emission Computed Tomography), e quello della PET (Positron Emission Tomography).

### La SPECT

La SPECT è una tecnica tomografica di imaging medico della medicina nucleare che utilizza raggi  $\gamma$  emessi da radiofarmaci introdotti nel corpo, rivelandoli con una  $\gamma$ -camera. È in grado di fornire anche informazioni



biotopologiche tridimensionali sotto forma di molteplici sezioni assiali (bidimensionali) dell'organo esaminato.

Le immagini SPECT vengono praticamente ottenute ruotando la  $\gamma$ -camera attorno al paziente. Il tempo necessario per ottenere ogni proiezione è variabile, ma tipicamente dell'ordine di  $15 \div 20$  secondi. Un tempo totale di scansione per un esame può raggiungere i circa  $15 \div 20$  minuti. Con più  $\gamma$ -camere contemporaneamente operative il tempo totale si riduce proporzionalmente.



Figura 9.1: Schema di apparato SPECT. Sulla sinistra è mostrato un esempio di immagine ottenuta per l'intero corpo umano con radioisotopo tecnezio.

La risoluzione spaziale delle immagini ottenibili con questa tecnica, può essere inferiore a quella delle immagini con raggi X, ma immagini acquisite con l'uso di radioisotopi forniscono informazioni fisiologiche sulla funzionalità di molti organi. Ciò è importante in quanto spesso alcune modificazioni della funzionalità di un organo precedono le alterazioni anatomiche della sua struttura che sarebbero evidenziabili con una radiografia X. L'uso di esami biomedici con radioisotopi permette quindi diagnosi anticipate su patologie quali ad esempio quelle tumorali.

## La PET

La PET è una tecnica diagnostica che come la SPECT fornisce informazioni di tipo fisiologico permettendo di ottenere mappe dei processi funzionali globali o di specifici organi all'interno del corpo.

Con essa ad esempio, si studiano patologie neoplastiche, si effettuano diagno-

si differenziali delle demenze e studi di *neuroimaging* funzionale, si indagano malattie di interesse reumatologico e infettivologico, si studiano il miocardio ibernato e la perfusione cardiaca.

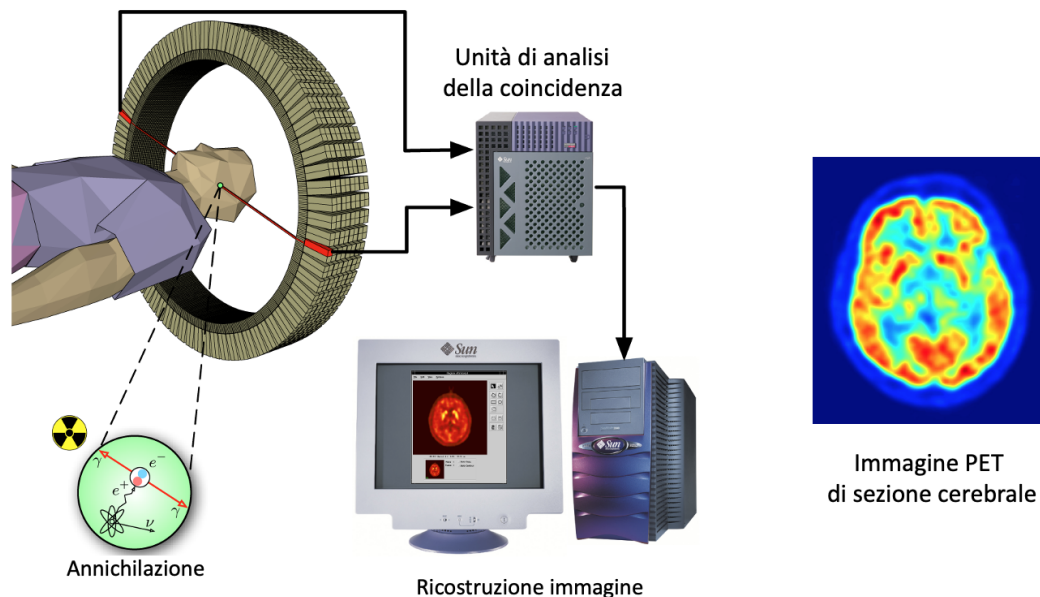


Figura 9.2: Schema di apparato PET. Sulla destra è mostrato un esempio di immagine di sezione del cervello umano.

La procedura tipica dell'esame inizia con l'iniezione di un radiofarmaco chimicamente legato a una molecola metabolicamente attiva (vettore), come ad esempio il fluorodesossiglucosio ( $^{18}\text{F}$ -FDG). Dopo il tempo necessario al raggiungimento di un'opportuna concentrazione del radiofarmaco nei tessuti da analizzare, il soggetto viene posizionato nell'apparato di scansione. L'isotopo a breve vita media decade emettendo un positrone  $e^+$  che dopo un percorso al massimo di pochi millimetri si annichila con un elettrone  $e^-$  producendo una coppia di fotoni  $\gamma$ , entrambi di energia 511 keV, emessi in direzioni opposte (*back to back*).

I fotoni sono poi rivelati da uno scintillatore accoppiato a fotomoltiplicatori. Punto cruciale della tecnica è la rivelazione di coppie di fotoni  $\gamma$  coincidenti entro un intervallo temporale di pochi nanosecondi. Dalla posizione in cui i fotoni  $\gamma$  colpiscono il rivelatore si può ricostruire la posizione del punto, nell'organo indagato, da cui sono stati emessi.

Si possono migliorare la risoluzione spaziale e il contrasto delle immagini utilizzando, durante la ricostruzione, la correzione per il tempo di volo (TOF) dei due fotoni  $\gamma$ .

## Attività tipiche

L'introduzione nel corpo di una molecola o di un composto chimico cui sia legato un radioisotopo viene detta *radiomarcatura*.

I radioisotopi utilizzati per produrre immagini devono avere una vita media confrontabile con quella dei tempi di misura per ottenere le immagini desiderate. Essendo questi tempi dell'ordine delle decine di minuti o poche ore, e comunque tali da non implicare possibili danni ai tessuti dovuti alla radioattività prodotta, ne consegue che non può trattarsi di radioisotopi disponibili in natura ma che devono essere prodotti artificialmente. Da ciò consegue che i tempi di trasporto dal luogo di produzione a quello di utilizzo del radioisotopo devono essere brevi, e comunque tali da evitare un'eccessiva riduzione della sua attività specifica prima dell'immissione nei tessuti da studiare.

In tabella le energie dei  $\gamma$  prodotti e i tempi di dimezzamento di alcuni fra i radioisotopi di più comune uso in diagnostica medica per immagini.

Tabella - Radioisotopi emettitori  $\gamma$  di uso comune

Nuclide	Isotopo	$t_{1/2}$	Energia dei $\gamma$ (KeV)
Tecnezio	$^{99m}_{43}\text{Tc}$	6 h	140
Gallio	$^{67}_{31}\text{Ga}$	78.3 h	98, 184, 300
Indio	$^{111}_{49}\text{In}$	2.8 d	171, 245
Iodio	$^{123}_{53}\text{I}$	13 h	159
Iodio	$^{131}_{53}\text{I}$	8 d	364
Xeno	$^{133}_{54}\text{Xe}$	5.27 d	81
Tallio	$^{201}_{81}\text{Tl}$	73 h	68, 80.3

È dunque importante calcolare l'attività dei radioisotopi utilizzati. Si ricordi che per un nucleo con numero di massa  $A$  un grammo di materiale di atomi con quel nucleo contiene  $\mathcal{N}/A$  atomi, con  $\mathcal{N} \simeq 6.022 \times 10^{23}$  il numero di Avogadro.

Il numero di disintegrazioni per unità di tempo di un grammo di quel materiale, ovvero la sua attività specifica, è quindi

$$A_{sp} = \frac{\mathcal{N}\lambda}{A} = \frac{\mathcal{N} \ln 2}{A t_{1/2}} \simeq \frac{4.16 \times 10^{23}}{A t_{1/2}} \quad (9.1)$$

Calcolandola ad esempio per il  $^{99m}_{43}\text{Tc}$  si ha

$$A_{sp} \left( ^{99m}_{43}\text{Tc} \right) = \frac{4.16 \times 10^{23}}{99 \times 2.16 \times 10^4} \simeq 1.95 \times 10^{17} \quad \frac{\text{disintegrazioni}}{s \times g}$$

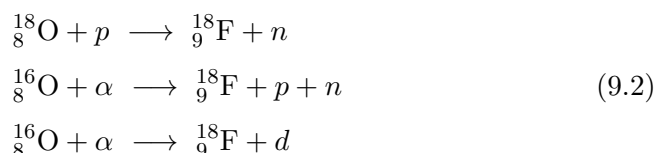
La quantità di un nano grammo ( $10^{-9}$  g) di tecnezio  $^{99m}_{43}\text{Tc}$  produce quindi circa  $2 \times 10^8$  disintegrazioni al secondo, ovvero un'attività di 200 MBq,

equivalente a  $\sim 5.4$  mCurie.

Un tipico esame con l'uso del tecnezio richiede un'attività dell'ordine di 600 MBq, con l'utilizzo quindi nel tessuto da esaminare di circa 3 nano grammi di radioisotopo.

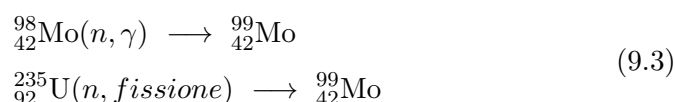
## 9.2 Produzione di radioisotopi

Per la produzione di radioisotopi si irradia bersagli di nuclei stabili con fasci di protoni o altri nuclei leggeri prodotti da un ciclotrone. Così si producono ad esempio i radioisotopi utilizzati nella PET che essendo caratterizzati da vite medie molto brevi devono essere prodotti in vicinanza dei luoghi di utilizzo. Il tracciante  $^{18}\text{F}$ , con vita media per decadimento  $\beta^+$  di circa 2 ore, si ottiene da reazioni quali

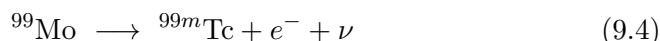


Le reazioni su  $^{16}\text{O}$  hanno energie di soglia rispettivamente di 23.2 MeV e 20.4 MeV. La sezione d'urto della prima è mostrata in figura 9.3 per le altre due, a energie di  $\sim 30$  MeV, la sezione d'urto vale  $\sim 100$  mbarn. Il bersaglio è in realtà costituito da acqua arricchita in  $^{18}\text{O}$  nel primo caso e da semplice acqua negli altri due.

Un altro metodo di produzione consiste nell'utilizzare il flusso di neutroni prodotto in un reattore a fissione per irraggiare nuclei pesanti ottenendo in due modi diversi nuclei di molibdeno  $^{99}\text{Mo}$ ,  $\beta$  instabile con una vita media di circa 67 ore.



La prima reazione è prodotta dai neutroni di fissione sui nuclei di  $^{98}\text{Mo}$  già presenti nel reattore come prodotti di fissione; la seconda è la fissione stessa indotta da neutroni su uranio che può produrre direttamente nuclei di  $^{99}\text{Mo}$ . Il  $^{99}\text{Mo}$  viene poi utilizzato per produrre  $^{99m}\text{Tc}$  tramite il cosiddetto *generatore di tecnezio*. Questo consiste in un contenitore a colonna (figura 9.4) nel quale vi è  $^{99}\text{Mo}$ , che funge da nucleo genitore, adsorbito in ossido di alluminio. Il molibdeno decade  $\beta^-$



producendo il tecnezio metastabile che poi a sua volta decade  $\gamma$  con vita media di 6 ore ( ${}^{99m}\text{Tc} \longrightarrow {}^{99}\text{Tc} + \gamma$ ). Il tecnezio, che non è adsorbito nel-

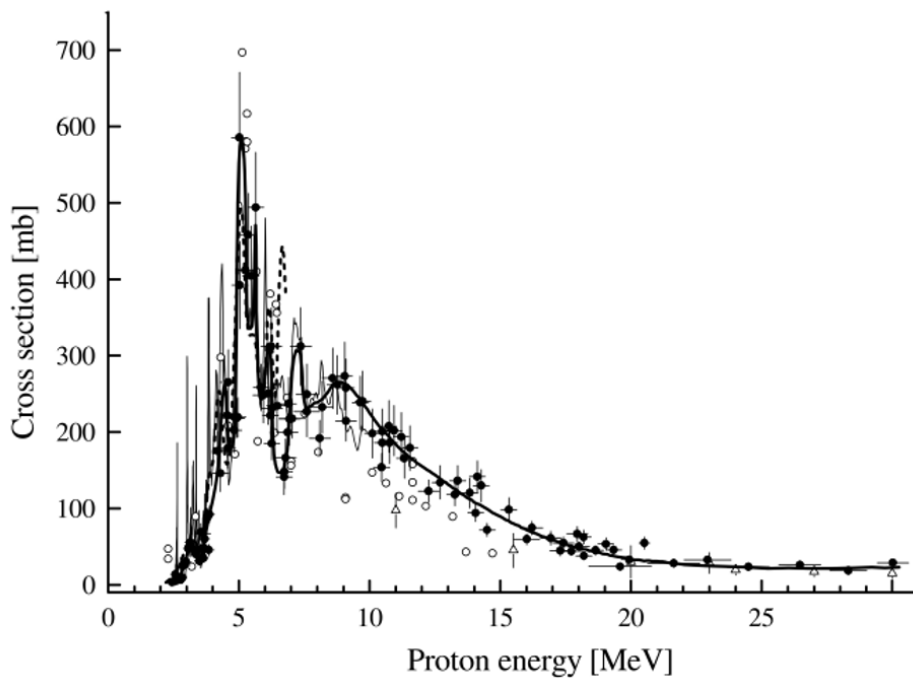


Figura 9.3: Sezione d'urto della reazione  $^{18}\text{O} + p \rightarrow ^{18}\text{F} + n$ .

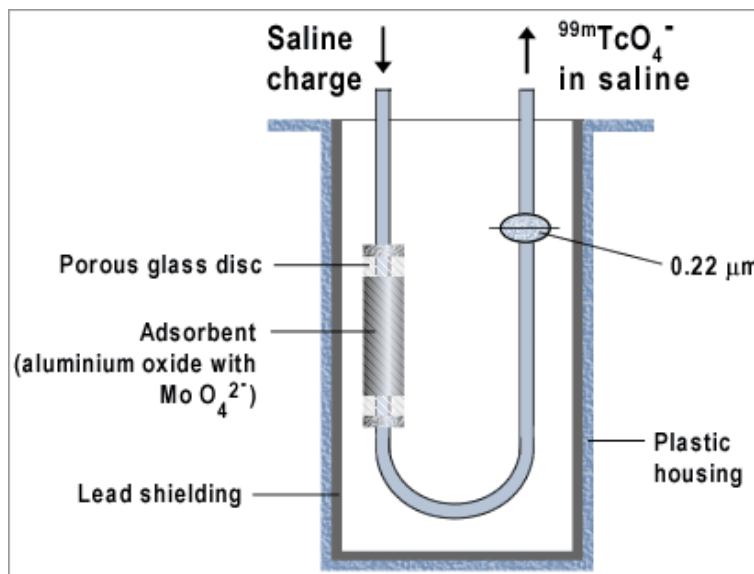


Figura 9.4: Generatore di tecnezio.

l'ossido di alluminio come il molibdeno, viene poi estratto introducendo nel contenitore a colonna una soluzione salina che prelevata, risulta poi ricca di sodio pertecnetato.

Il *generatore* permette dunque il trasporto verso luoghi di utilizzo del  ${}_{43}^{99m}\text{Tc}$  sfruttando l'intermediazione del  ${}_{42}^{99}\text{Mo}$ , che ha una vita media circa 10 volte superiore.

La gestione della fase di produzione di radioisotopi coinvolge il problema di posizionamento rispetto all'equilibrio, nel caso di reazioni di produzione in presenza di concomitante decadimento del prodotto.

Il problema è già stato affrontato nella parte conclusiva del paragrafo [4.2](#) (Decadimento radioattivo di più sostanze), che si riporta per comodità.

Si consideri il caso della produzione di una sostanza genitore che possa decadere. Si vedrà che si può raggiungere l'equilibrio se il rateo temporale della sua produzione  $\mathcal{R}$  è uguale al valore assoluto del rateo del suo decadimento  $\lambda N(t)$ .

Un caso simile si ha ad esempio bombardando un campione di sostanza i cui nuclei siano stabili, con un fascio di particelle, provenienti da un reattore o da un acceleratore, che inducano un numero di trasmutazioni su  $\mathcal{R}$  atomi/s verso un elemento radioattivo che poi decada con una costante  $\lambda$ .

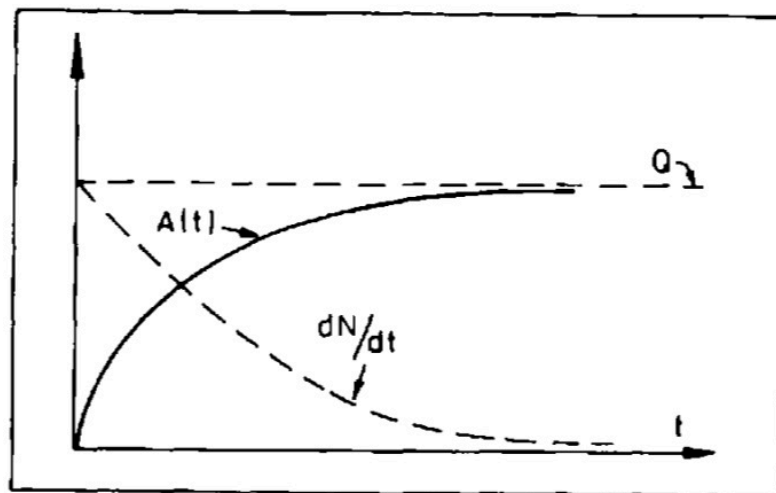


Figura 9.5: Equilibri asintotici fra ratei di produzione e attività.

La variazione del numero  $N(t)$  di nuclei radioattivi presenti si ottiene dal bilanciamento fra il rateo  $\mathcal{R}$  di formazione e il rateo  $-\lambda N(t)$  di decadimento:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mathcal{R} - \lambda N(t) \quad (9.5)$$

che se  $\mathcal{R} = \text{cost.}$ , si può riscrivere ridefinendo e quindi separando le variabili:

$$\frac{d[\mathcal{R} - \lambda N(t)]}{\mathcal{R} - \lambda N(t)} = -\lambda dt \quad (9.6)$$

Integrandola, nell'ipotesi che all'istante iniziale  $t = 0$  si abbiano  $N(0) = 0$  nuclei, si ottiene

$$\mathcal{R} - \lambda N(t) = [\mathcal{R} - \lambda N(0)] e^{-\lambda t} \implies N(t) = \frac{\mathcal{R}}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (9.7)$$

da cui

$$\mathcal{A}(t) = \lambda N(t) = \mathcal{R} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (9.8)$$

che rappresenta un andamento a saturazione, tipico dei casi in cui formazione e decadimento sono in competizione. In figura [9.5](#) sono schematicamente illustrati l'attività  $\mathcal{A}(t) \equiv \lambda N(t)$ , o rateo di decadimento radioattivo, e la variazione temporale del numero di nuclei genitori  $dN(t)/dt$ , per un sistema con un rateo di formazione di  $\mathcal{R}$  atomi/s.

Se il tempo d'irraggiamento del campione è piccolo rispetto alla vita media ( $t \ll \tau$ ) si può espandere l'esponenziale fino al termine lineare in  $t$  per cui  $\mathcal{A}(t) \simeq \mathcal{R}\lambda t$ , con l'attività che cresce ad un rateo praticamente costante. Per brevi tempi d'irraggiamento l'accumulo di nuclei prodotti è quindi praticamente lineare nel tempo e non viene significativamente intaccato dai decadimenti.

Per tempi lunghi rispetto a  $\tau$  l'esponenziale tende a 0 e l'attività si mantiene approssimativamente costante

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{R}, \quad \text{per } t \gg \tau \quad (9.9)$$

È la condizione in cui la nuova "attività" è prodotta circa con lo stesso rateo al quale la vecchia scompare, ed è un esempio di equilibrio secolare.

S'osservi che se si irradia un campione per un certo tempo e poi lo si toglie dalla zona d'irraggiamento, da quel momento esso mostrerà una diminuzione dell'attività con andamento esponenziale decrescente. Per produrre un campione utilizzabile è quindi sufficiente irradiare per un tempo dell'ordine di  $2 \div 3$  vite medie.