

FISICA NUCLEARE

Proprietà del nucleo atomico

- Isospin
- La misura di Rutherford

Struttura dei nuclei e modelli nucleari

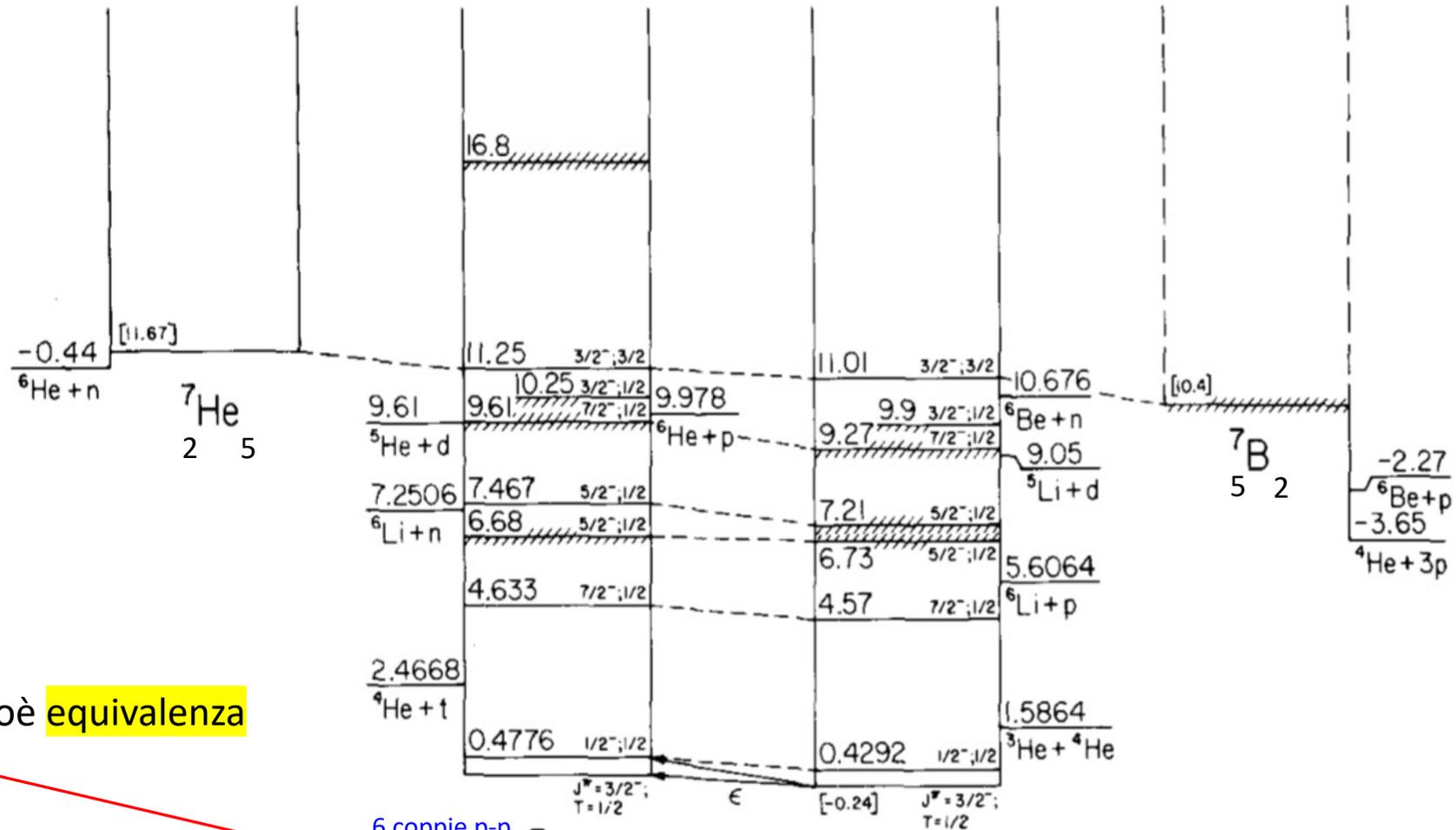
- Modello a gas di Fermi

Isospin

Scattering a bassa energia e studio **nuclei speculari** ($^3\text{H}, ^3\text{He}; ^7\text{Li}, ^7\text{Be}; \dots$) hanno evidenziato stretta somiglianza tra forze **$n-p$** e **$p-p$** .

- **Livelli** di nuclei speculari con **A dispari** ($N = Z \pm 1$), molto simili.
- **Masse** molto simili, a meno del contributo coulombiano (da Weizsäcker)

$$\frac{\Delta M}{c^2} = \frac{3}{5} \frac{(2Z + 1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_0 A^{1/3}}$$

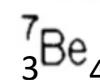


Ciò suggerisce **simmetria di carica**, cioè **equivalenza** tra forze **$n-n$** e **$p-p$** .

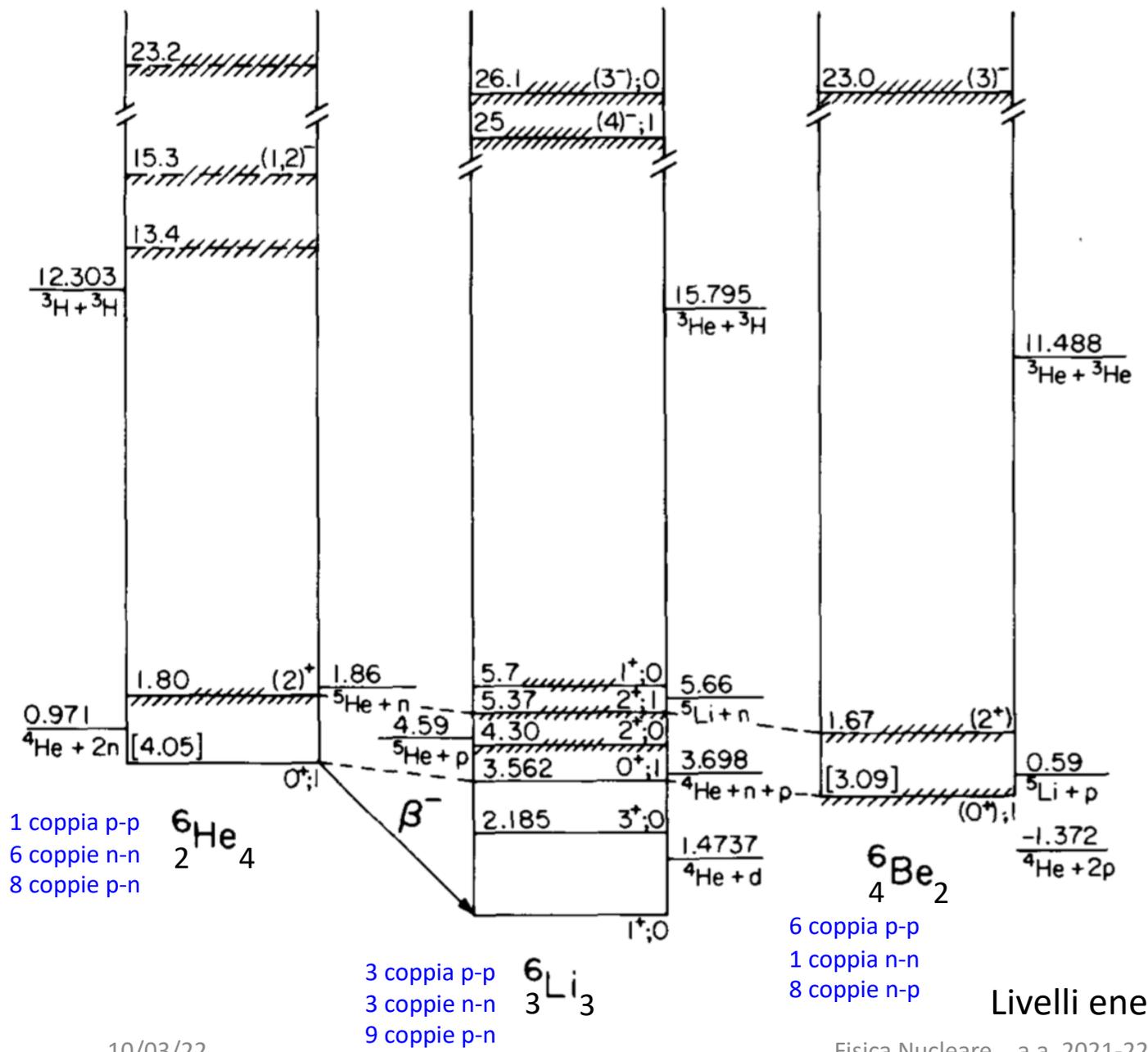
6 coppie p-p
3 coppie n-n
12 coppie p-n



Con solo 7 nucleoni
tutti interagiscono
con tutti



3 coppie p-p
6 coppie n-n
12 coppie p-n



Equivalenza più completa da similitudine fra livelli di nuclei speculari con **A pari**, (${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^6\text{Be}$; ${}^8\text{Li}$, ${}^8\text{Be}$, ${}^8\text{B}$, ...)

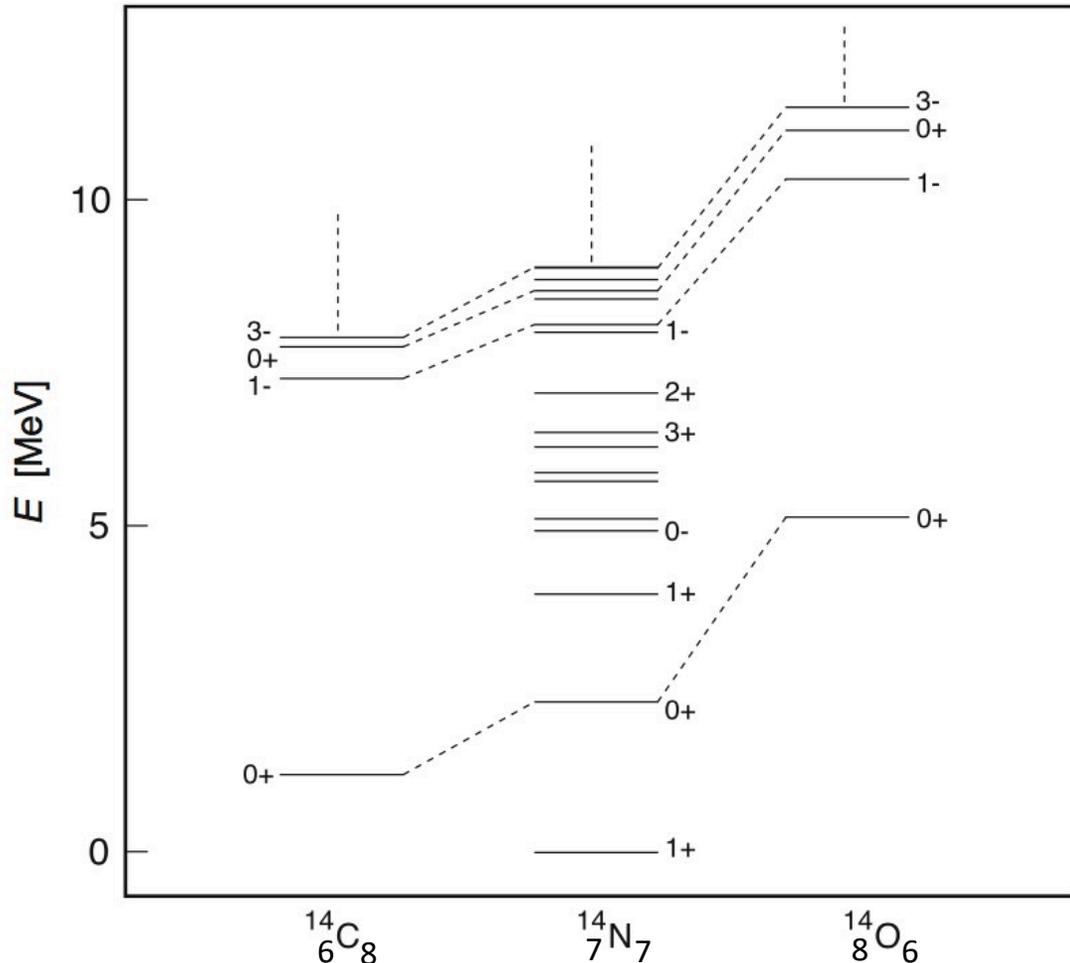
Differenze residue tra livelli più bassi spiegate ~ da effetti coulombiani.

Ciò suggerì forze nucleari indipendenti da carica elettrica e che interazioni

n-p, p-p, n-n ⇒ uguali

ipotesi più forte della simmetria di carica ma non dice nulla sulle forze ***n-p***.

S'introduce formalismo **spin isotopico**: ogni nucleone ha grado di libertà **isospin I** che può assumere solo due valori \Rightarrow c'è modello variabili dicotomiche (*spin ordinario*) \Rightarrow se ne mutua struttura algebrica.



Analogia formale con multipletti degli accoppiamenti di spin.

In fig. somiglianze fra livelli di $^{14}_6\text{C}_8$ e $^{14}_8\text{O}_6$, sia J^P che spaziature fra livelli. Piccole differenze e traslazione quasi rigida dei livelli di $^{14}_8\text{O}_6$ spiegabili con i diversi contributi coulombiani.

Livelli equivalenti anche nell'isobaro $^{14}_7\text{N}_7$, **che ha però livelli in più**. Si distingue fra stati di **tripletto** e **singoletto**.

Nucleone $\Rightarrow p$ e n formano doppietto di isospin ($I = 1/2$), con terze componenti I_3

{	protone:	$I_3 = +1/2$
	neutrone:	$I_3 = -1/2$

p ed n sono quindi autostati di I^2 e I_3

Indipendenza dalla carica si traduce in una legge di conservazione (proprietà di simmetria):

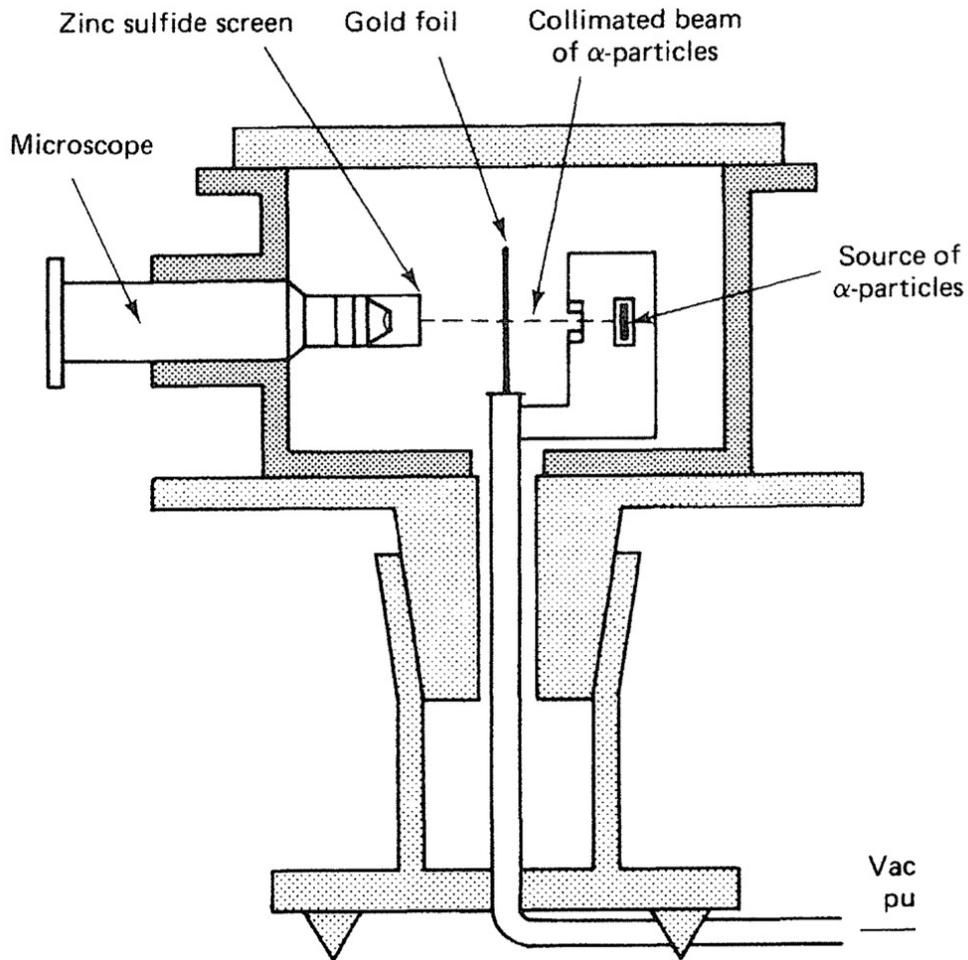
- **isospin si conserva nelle interazioni nucleari (forti)**, buon numero quantico per descriverne processi dinamici
- **hamiltoniana commuta con operatore d'isospin ed è invariante per trasf. generate da I** (rotazioni nello spazio d'isospin)

Carica elettrica q_N di un nucleone: $q_N = 1/2 + I_3$ \Rightarrow conservazione carica \Rightarrow conservazione I_3

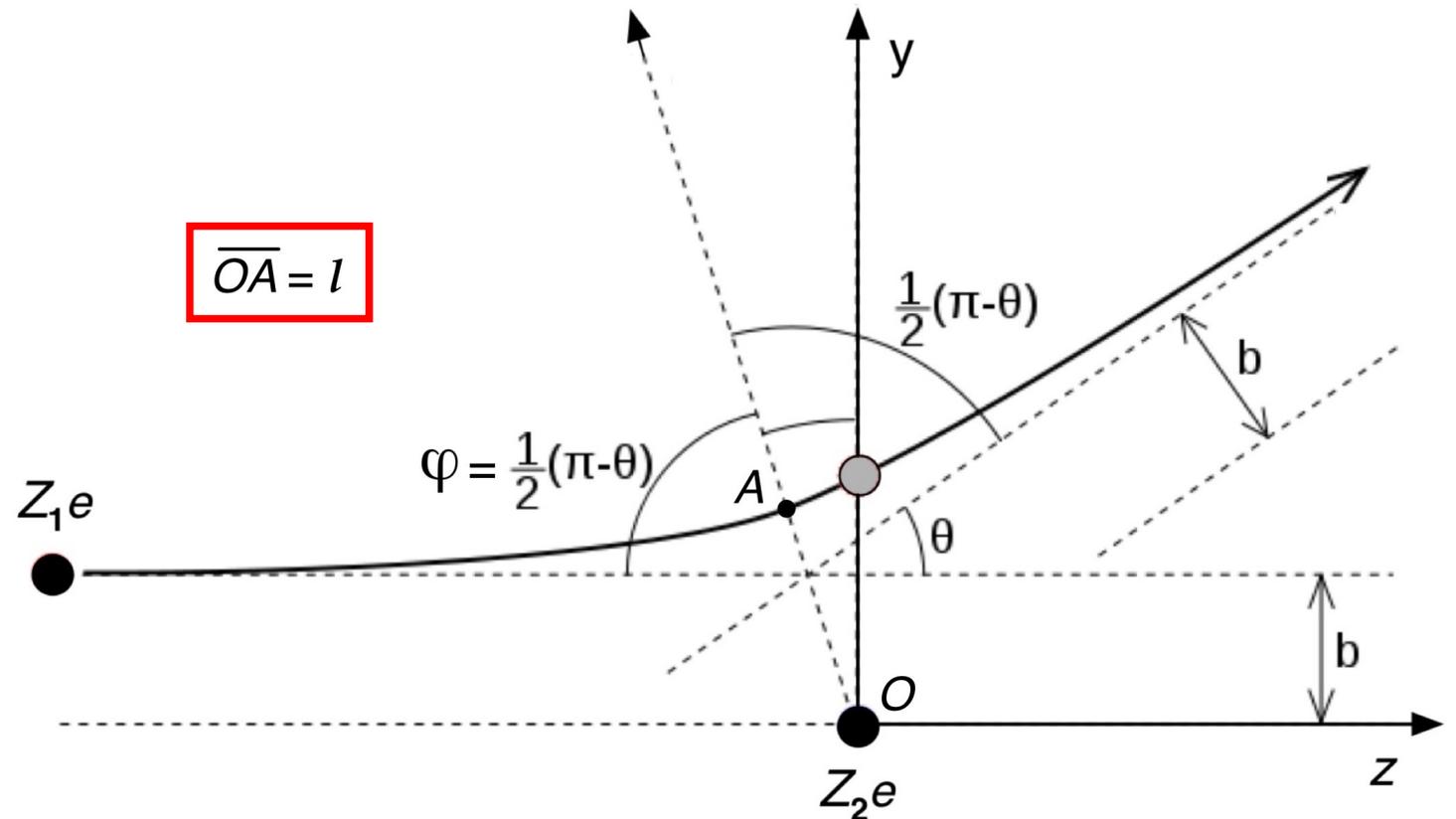
- Influenza di energia coulombiana cresce con Z , perturbando sempre più le caratteristiche di simmetria di isospin, che quindi *sfumano* al crescere di A .

La misura di Rutherford

m e Z_1e massa e carica di particelle del fascio monocinetico collimato, incidente su nuclei di massa $M \gg m$ e carica Z_2e , inizialmente a riposo in O , solidale con osservatore (SL)



$m \ll M \Rightarrow$ si trascura il rinculo di M



Pot. elettrico del bersaglio $V = Z_2 e / (4\pi\epsilon_0 r)$. Si consideri generica particella incidente con velocità v lungo retta // all'asse z e distante b da esso (b è **parametro d'urto**).

Classicamente determinare angolo $\vartheta(b)$; si procede determinando $b(\vartheta)$.

V è **pot. centrale-kepleriano**. En. totale: $E_T = E_k + E_P$. Traiettoria: **ellisse** $E_T < 0$, **iperbole** $E_T > 0$.

Poiché $E_T \equiv E_k = mv^2/2 > 0$ è **iperbole**.

Conservazione mom. ang. ed energia \Rightarrow a distanza ∞ questi valgono mvb ed $mv^2/2$, mentre nel punto A di **max. avvicinamento** valgono $mv_A l$ e $[mv_A^2/2 + Z_1 Z_2 e^2 / (4\pi\epsilon_0 l)]$.

$$\text{Quindi: } b = \frac{lv_A}{v}, \quad v^2 = v_A^2 + \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 ml}$$

Si ponga: $l_0 = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_k}$ che fissata $E_k = mv^2/2$, coincide col punto A^* di max.

avvicinamento per un urto centrale ($b = 0$) $\Rightarrow v_{A^*} = 0$.

$$\text{Quindi: } v^2 = v_A^2 + v^2 \frac{l_0}{l}$$

In urto centrale elastico particella di carica $Z_1 e$ si avvicina al nucleo lungo z fino a distanza minima l_0 , corrispondente al punto A^* , poi inverte il moto diffusa a un angolo π . Da quanto ottenuto segue

$$v_A^2 = \frac{b^2}{l^2} v^2 \quad , \quad v_A^2 = v^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \quad , \quad b^2 = l^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$$

e dalle proprietà dell'iperbole $l = b \cotg \frac{\varphi}{2}$

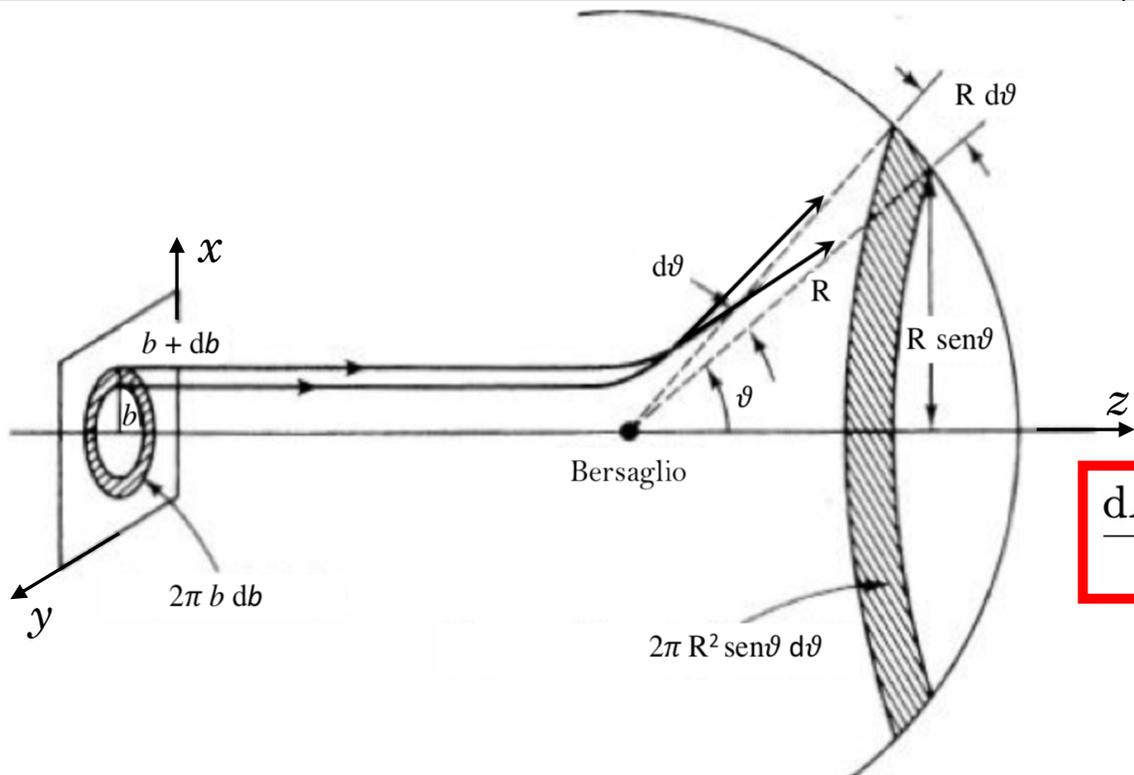
che sostituito nella terza $\cotg^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{l_0}{b} \cotg \frac{\varphi}{2} - 1 = 0$ da cui $l_0 = 2 b \cotg \varphi$

Dalla figura si ha $\vartheta + 2\varphi = \pi$, da cui: $\cotg \varphi = \tg \frac{\vartheta}{2}$ e infine quanto cercato

$$b(\vartheta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg \frac{\vartheta}{2}$$

Scopo di Rutherford era prevedere quante particelle α sarebbero state diffuse ad un certo angolo in funzione di quante ne incidevano sul bersaglio.

n_0 particelle attraversano a distanza ∞ dal bersaglio unità di sup. del piano (x,y) nell'unità di tempo, \Rightarrow
 $\Rightarrow dN = 2\pi n_0 b db$ particelle attraversano anello circolare fra b e $b+db$. Se particelle si conservano, cerchiamo quelle diffuse fra ϑ e $\vartheta+d\vartheta$



$$|b(\vartheta)| = \left| \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} d \left(\cotg \frac{\vartheta}{2} \right) \right| = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \frac{d\vartheta}{2 \operatorname{sen}^2 \vartheta/2}$$

Sostituendo in dN :

$$dN(\vartheta) = 2\pi n_0 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cotg \vartheta/2}{2 \operatorname{sen}^2 \vartheta/2} d\vartheta$$

da cui

$$\frac{dN(\vartheta)/n_0}{d\Omega(\vartheta)} = \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cotg \vartheta/2}{2 \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen}^2 \vartheta/2} =$$

$$= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cos \vartheta/2}{2 \operatorname{sen}^3 \vartheta/2 \cdot 2 \operatorname{sen} \vartheta/2 \cos \vartheta/2} =$$

$$= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^4 \vartheta/2}$$

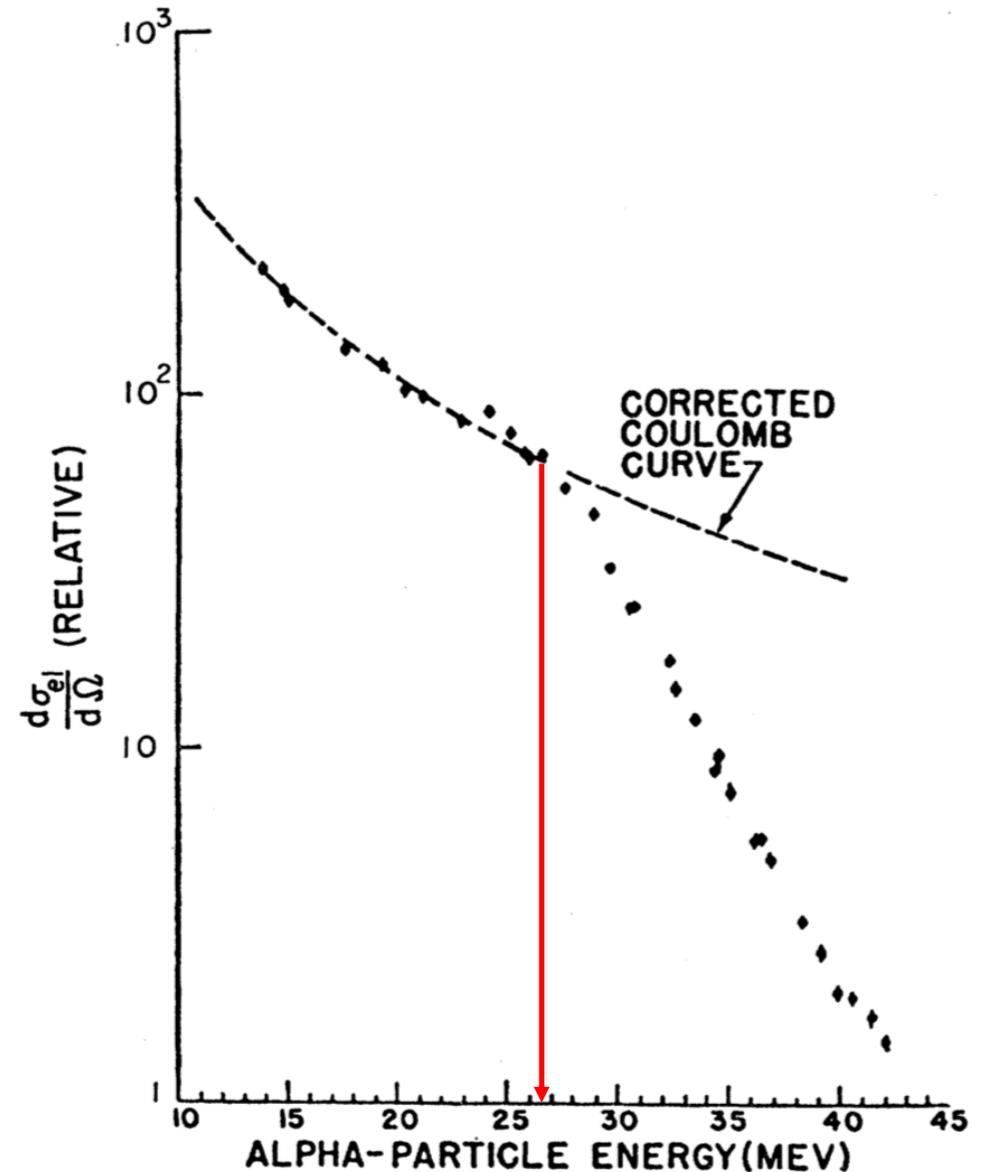
Sezione d'urto di Rutherford \rightarrow

Se carica unif. distribuita in sfera di raggio r_0 , al crescere di E_k tutto dovrebbe andare come previsto da Rutherford, finchè $b > r_0$.

$$r_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg \frac{\vartheta_0}{2}$$

Ma al crescere di E_k dovrebbe manifestarsi effetto dimensioni nucleari, con deviazione della sez. d'urto da quella ottenuta per la sola interazione coulombiana.

Al crescere di E_k le α si spingono così vicine al nucleo da sentire gli effetti dell'interazione nucleare, oltre a quelli puramente coulombiani.



Modelli

Modello Standard anche dovrebbe descrivere struttura e fenomenologia dei nuclei, ma :

- approcci matematico-computazionali per risolvere **QCD su sistemi a bassa energia**, come i nuclei, sono limitati. *Transizione di fase fra materia quark-gluonica ad alta energia e adronica a più bassa energia, rende inutilizzabili approcci perturbativi;*
- forza nucleare è a corto raggio, ma serve enorme potenza di calcolo per cercare di riprodurre con accuratezza le caratteristiche di un nucleo con un approccio *ab initio*.

Modelli storici relativamente grezzi e necessariamente approssimati ***ma rappresentano spesso il solo approccio per ottenere risultati quantitativi.***

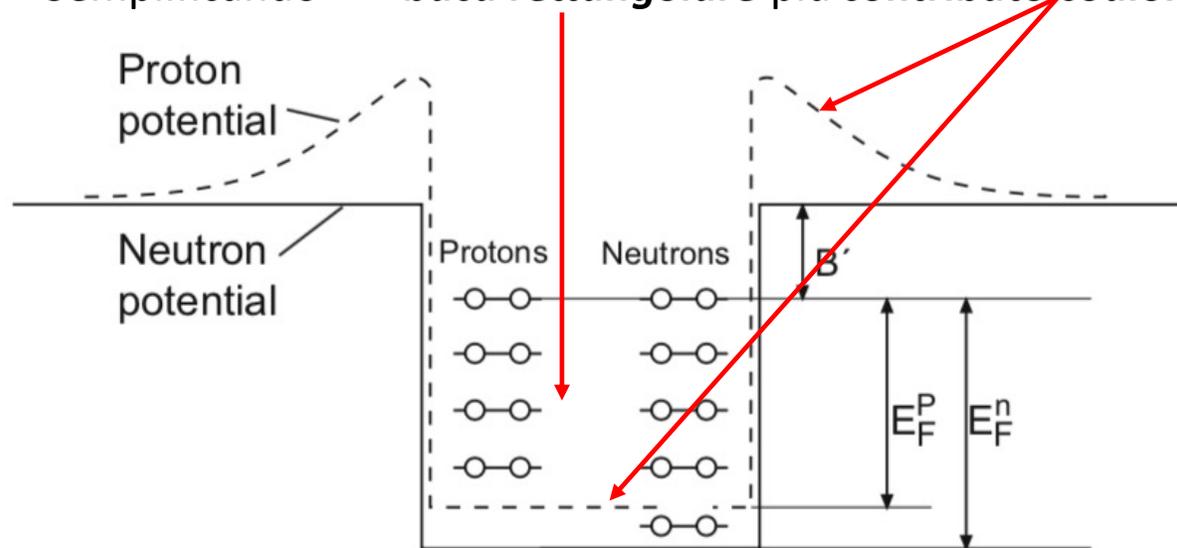
Modello a gas di Fermi

Nucleo in stato fondamentale o leggermente eccitato ⇒ ***un gas di Fermi degenere***

Nucleoni come due sistemi indipendenti di particelle a spin 1/2 che ubbidiscono a *statistica Fermi-Dirac*, e per il *principio d'esclusione* si muovono \sim liberamente nel volume del nucleo con *impulso medio dell'ordine di 250 MeV/c*.

Potenziale sentito da un nucleone è sovrapposizione potenziali dovuti ai restanti nucleoni del nucleo.

Semplificando \Rightarrow **buca rettangolare** più **contributo coulombiano** per i p



Stati per nucleone in volume V e intervallo d'impulso dp

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} V$$

A denom. volume cella spazio delle fasi con 2 nucleoni d'ogni tipo a spin $\uparrow\downarrow$.

In stato fondamentale (**temperat. = 0**), livelli più bassi occupati fino al massimo valore d'impulso p_F .

Integrando: $n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} = A = N+Z$, con

$$N = \frac{V (p_F^n)^3}{3\pi^2 \hbar^3}$$

$$e \quad Z = \frac{V (p_F^p)^3}{3\pi^2 \hbar^3}$$

Per nucleo sferico con $Z = N = A/2$, $R_0 = 1.21$ fm, e ugual estensione radiale per buche di p ed n , si ha

$$p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \simeq 250 \text{ MeV}/c, \text{ confermato da risultati di diff. quasi elastica } e\text{-nuclei}$$

- Energia del livello occupato superiore: $E_F = p_F^2/2M \simeq 33 \text{ MeV}$

B' , diff. fra max. valore buca e livello di Fermi, è \sim cost. per gran parte dei nuclei ed è \simeq energia media di legame per nucleone: $B' \simeq |B/A| = 7 \div 8 \text{ MeV}$.

Profondità buca ed energia di Fermi \approx indipendenti da A \Rightarrow al crescere di A livelli meno spazati e più densi

Esempio ^{208}Pb : $B/A \simeq 7.67 \text{ MeV}$; buca $n \simeq -44 \text{ MeV}$; buca $p \simeq -34 \text{ MeV}$.

- Si può calcolare dipendenza di $|B/A|$ da eccesso N

En. cinetica media per nucleone è

$$\langle E_k \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_k p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2M} \simeq 20 \text{ MeV}$$

- Contrib. cinetico tot. di energia del nucleo $E_k(N, Z) = N\langle E_n \rangle + Z\langle E_p \rangle = \frac{3}{10M} \left[N (p_F^n)^2 + Z (p_F^p)^2 \right]$

- Con nucleo sferico e raggi uguali per n e p $E_k(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{5/3}}$

Ha un minimo per $Z = N$ \Rightarrow energia di legame si riduce per $N \neq Z$

Sviluppando in serie di potenze di $(N - Z)$:

$$E_k(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \left[A + \frac{5}{9} \frac{(N - Z)^2}{A} + \dots \right]$$

il cui **primo termine \sim termine di volume** e il **secondo \sim eccesso n** in formula di Weizsäcker

Modello evidenzia valori elevati delle velocità dei nucleoni nei nuclei, confermato da risultati sperimentali:

- ▶ soglia produzione π per urto di p su nuclei cala al crescere di A , poiché alcuni nucleoni del bersaglio possono avere velocità non trascurabili ($v/c \simeq 1/4$).

Extra:

Potrebbe sembrare un paradosso che da un lato i nucleoni di un nucleo occupino livelli compresi fra -40 MeV e -7 MeV, mentre l'energia media di legame è dell'ordine di 7 MeV. Bisogna però considerare che il potenziale nucleare non è dovuto ad una sorgente esterna al nucleo ma è generato dai suoi stessi nucleoni. Aggiungendo più nucleoni ad un nucleo non si modifica l'energia di Fermi, ma decresce invece la separazione fra livelli energetici contigui.

La costanza dell'energia di Fermi è una conseguenza della costanza della densità nucleare, l'incremento della densità dei livelli è invece dovuto all'accrescimento del volume del nucleo. Corrispondentemente, rimuovere nucleoni da un nucleo equivale ad accrescere la mutua distanza fra i suoi livelli energetici. Fornendo quindi ad un nucleo un'energia pari all'energia media di legame per nucleone si può rimuoverne un nucleone dopo l'altro in quanto ci sarà sempre almeno un nucleone al livello di Fermi.