

- **Tempo di dimezzamento** $T_{1/2}$ → $N(T_{1/2}) = N(0)e^{-T_{1/2}/\tau} = \frac{N(0)}{2}$ da cui: $T_{1/2} = \tau \ln 2$

Rateo di decadimenti nell'unità di tempo è detto **attività** $A(t)$:

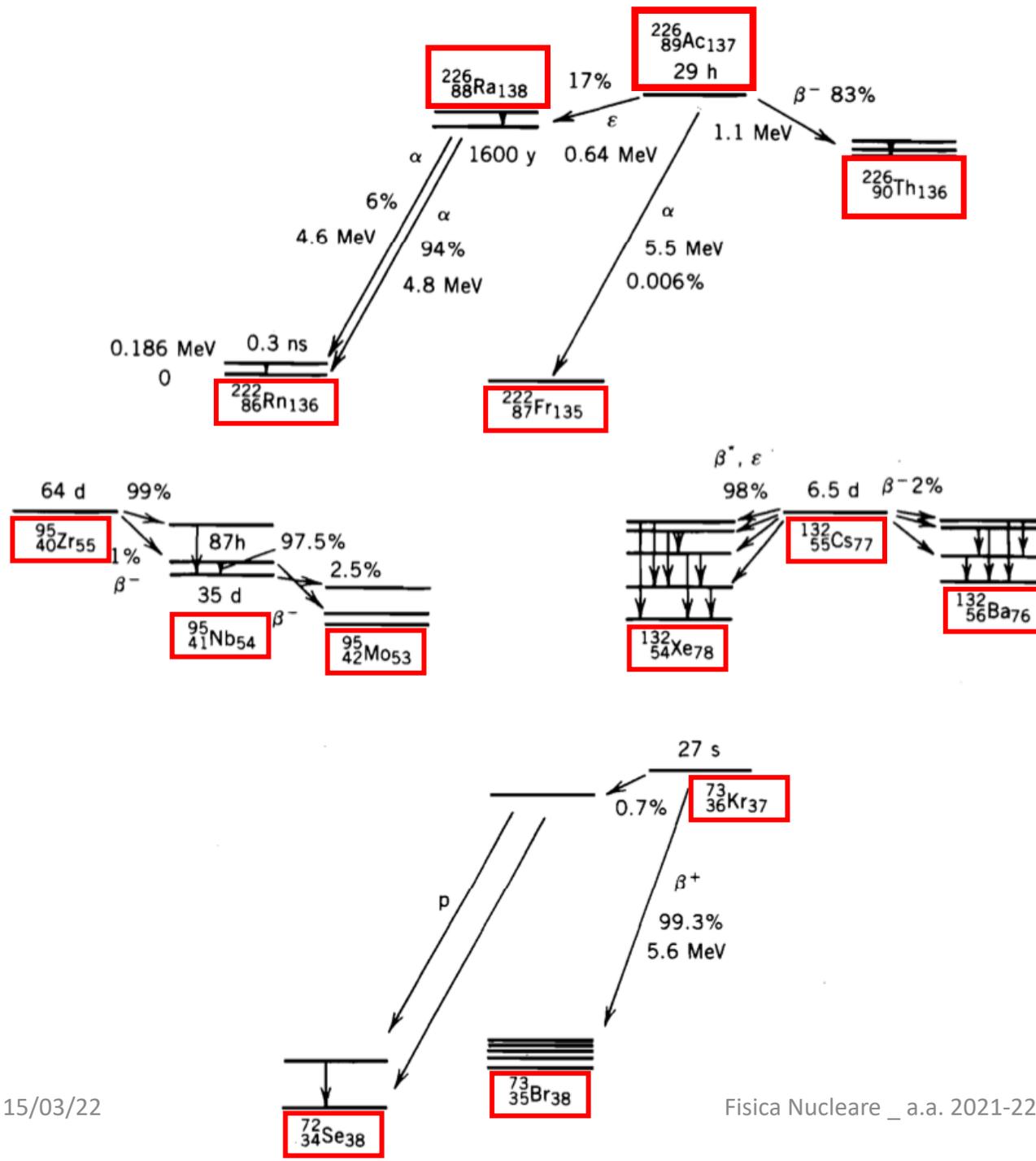
$$\mathcal{A}(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| = \lambda N(t) = \lambda N(0)e^{-\lambda t} = \mathcal{A}(0)e^{-\lambda t}$$

- Attività si misura in **Bequerel** (1Bq = disintegrazione/secondo), o in **Curie** (Ci) 1 Ci = 3.7×10^{10} Bq)
- Sostanza radioattiva **genitore** può avere **meccanismi indipendenti** di decadimento, detti **canali di decadimento**, ognuno caratterizzato da una costante λ_i , originando diverse sostanze **figlie**.
Probabilità di eventi indipendenti **additive** ⇒ prob. tot. di decadimento d'una sostanza con più canali è

$$\lambda_{tot} = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_{tot}}$$

Ogni diverso canale → **diramazione**, e rapporto fra quantità dei prodotti **i** e **j** di decadimento di due diversi canali, in un certo intervallo di tempo, è detto **rapporto di diramazione (branching ratio) relativo** e coincide col rapporto fra rispettive costanti di decadimento, λ_i/λ_j

$$\frac{dN_i(t)}{dN_j(t)} = \frac{\lambda_i N_0(t) dt}{\lambda_j N_0(t) dt} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$$



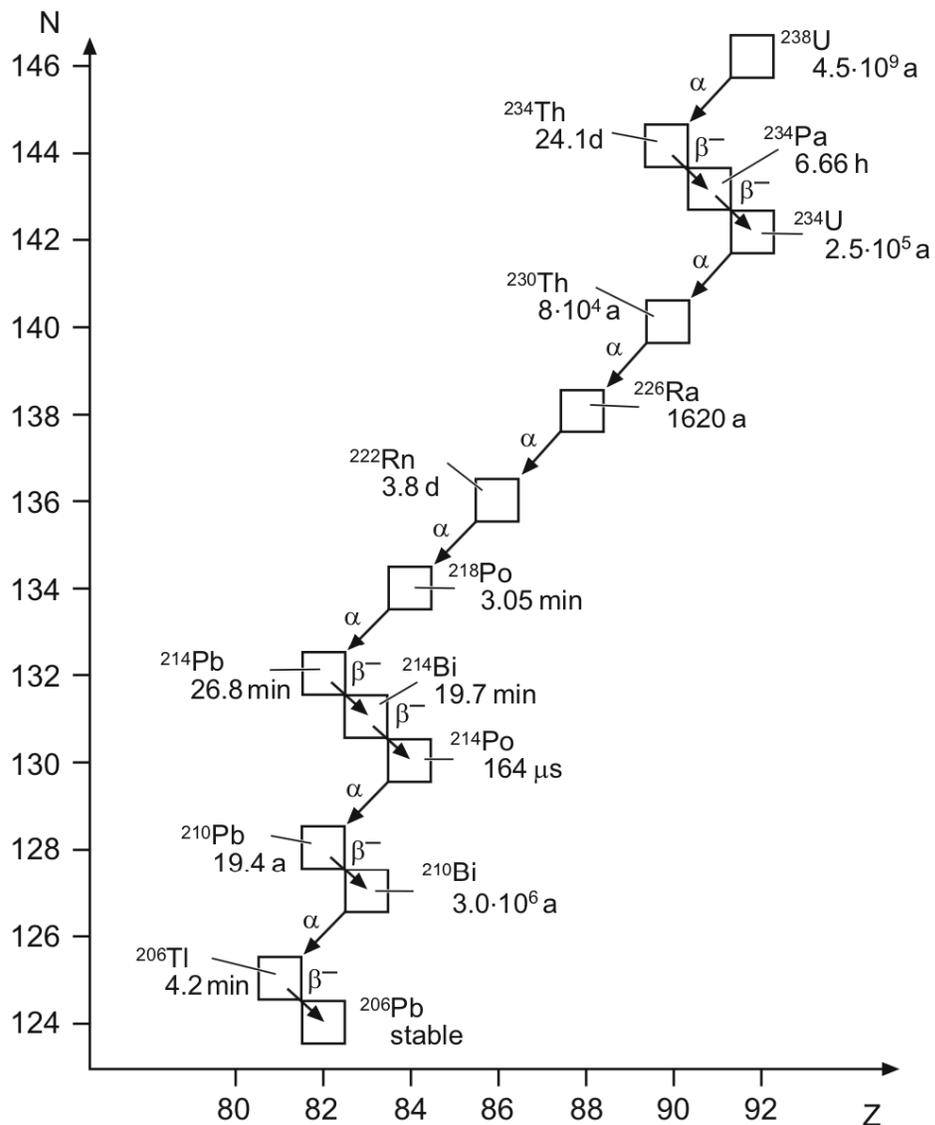
$$\frac{dN_i(t)}{dN_j(t)} = \frac{\lambda_i N_0(t) dt}{\lambda_j N_0(t) dt} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$$

FISICA NUCLEARE

Instabilità dei nuclei

- Decadimento radioattivo di più sostanze
- Tecniche radioattive di datazione

Decadimento radioattivo di più sostanze



Sostanza radioattiva che decade in un'altra radioattiva: le due sono in relazione genetica, **genitore (G)** la prima, **figlia (F)** la seconda. Si può estendere a **molte generazioni**.

- A $t = 0$, $N_1(0)$ e $N_2(0)$ atomi delle sostanze (1) e (2), in **relazione genetica**. Si vogliono trovare $N_1(t)$ ed $N_2(t)$.

(1) decade come $dN_1 = -N_1\lambda_1 dt$

e \forall atomo (1) decaduto se ne forma uno di (2). N_2 quindi varia per due ragioni: diminuisce per decadimenti spontanei di (2), cresce per la formazione di atomi (2), prodotti del decadimento di (1).

La variazione totale è

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

Per una terza sostanza analogamente

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3$$

e così via ...

Con k generazioni in cascata \Rightarrow sistema k eq. diff. risolvibile ponendo:

$$\begin{cases} N_1 = a_{11}e^{-\lambda_1 t} \\ N_2 = a_{21}e^{-\lambda_1 t} + a_{22}e^{-\lambda_2 t} \\ \dots \\ N_k = a_{k1}e^{-\lambda_1 t} + a_{k2}e^{-\lambda_2 t} + \dots + a_{kk}e^{-\lambda_k t} \end{cases}$$

a_{ij} da determinare per soddisfare eq. diff. e condizioni iniziali $N_i(0)$.

Sostituendo \Rightarrow formula ricorrenza valida per $i \neq j$

$$a_{ij} = a_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{(\lambda_1 - \lambda_j)(\lambda_2 - \lambda_j) \dots (\lambda_{i-1} - \lambda_j)} a_{11}$$

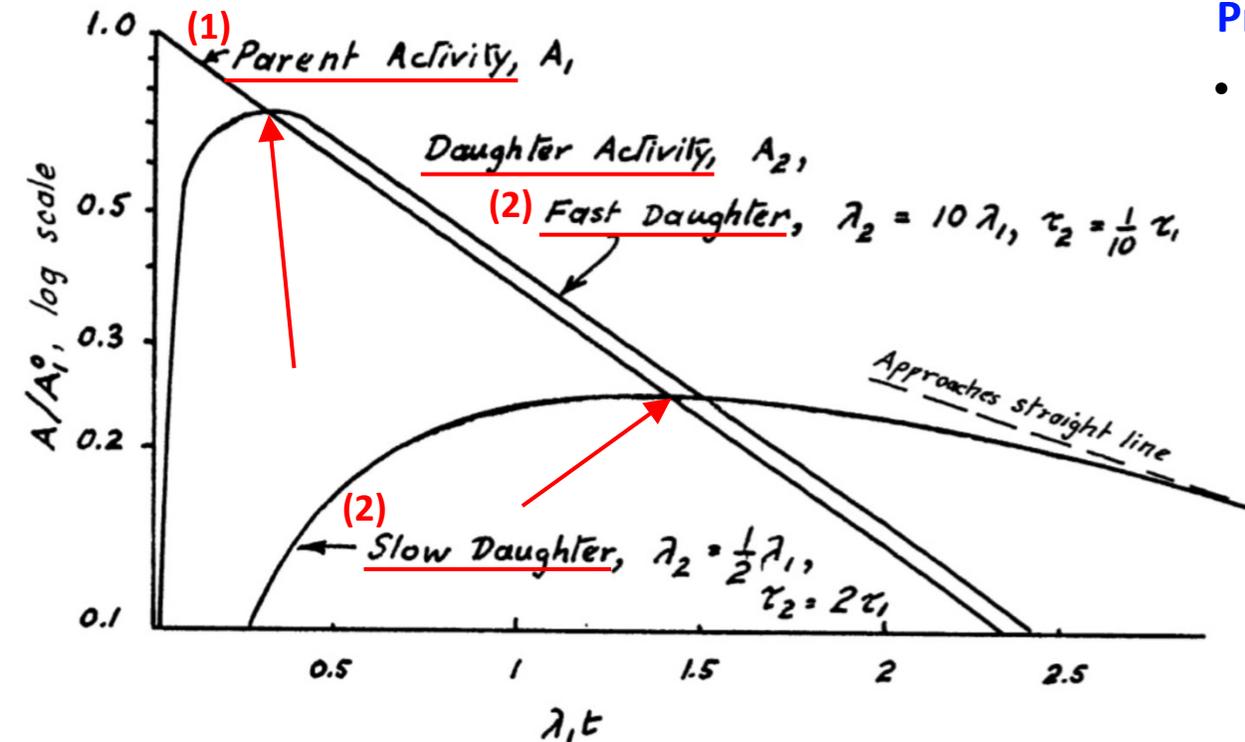
Per coefficienti con indici uguali:

$$N_i(0) = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ik}$$

Alcune cond. iniziali hanno importanza pratica (*produzione di radioisotopi, ...*).

All'inizio c'è la sola sostanza (1) con $N_1(0)$ atomi. Procedendo fino alla terza generazione \Rightarrow (*Bateman equations for nuclear transmutations*)

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\ N_3(t) = N_1(0) \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right] \end{cases}$$



Problema:

- Si cerca istante $t_{1,2}^*$ in cui le attività di **G (1)** e **F (2)** di una stessa catena radioattiva $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t)$ combaciano.

Ciò implica: $\lambda_1 N_1(t) = \lambda_2 N_2(t)$ e sostituendo

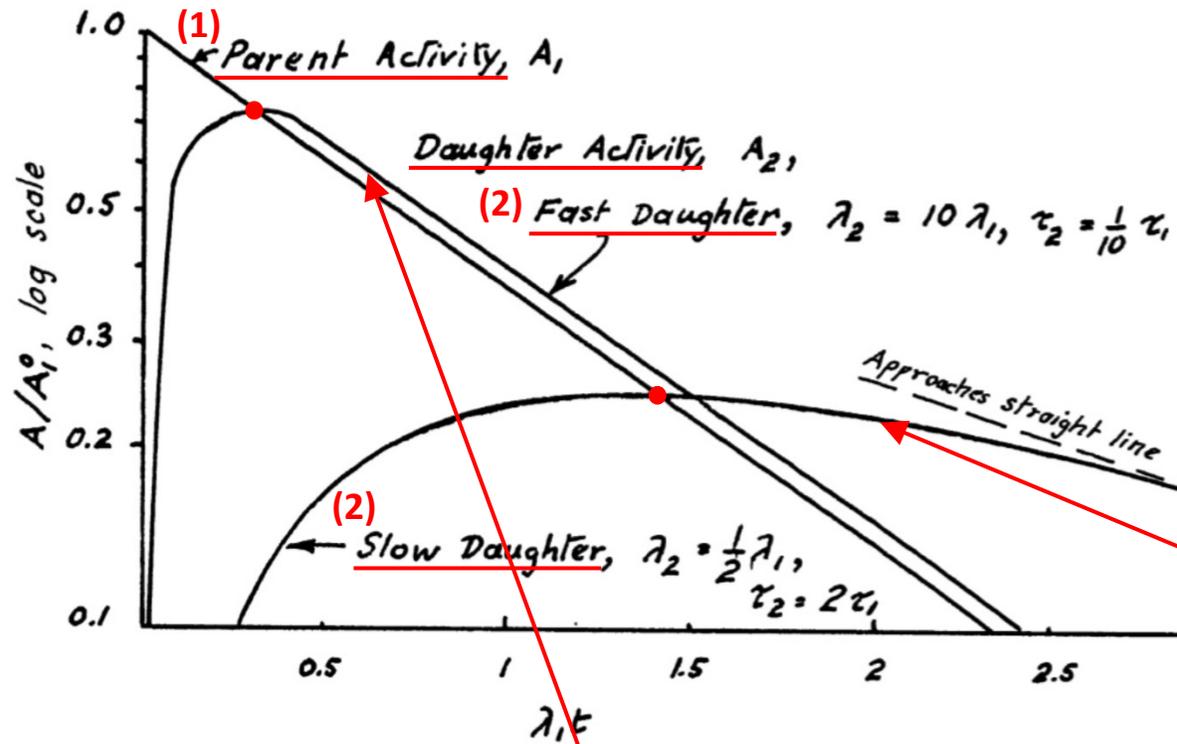
$$\lambda_1 N_1(0) e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

$$t_{1,2}^* = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)$$

che corrisponde a istante in cui attività di **F** è massima

$$dN_2(t)/dt = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)$$

Se all'inizio c'è una sola sostanza **G**, la sostanza **F** raggiunge la massima attività nello stesso istante in cui essa coincide con quella del **G**, $t_{max} = t_{1,2}^*$



Catena radioattiva $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t) \xrightarrow{\lambda_2} N_3(t)$ supponendo **stabile** sostanza di terza generazione ($\lambda_3 = 0$).

$$N_3(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right)$$

Quattro casi notevoli:

1) $\lambda_1 > \lambda_2$, per $t \sim$ lungo ($t \gg 1/\lambda_1$) si trascura primo esponenziale in parentesi per $N_2(t)$, ottenendo

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}$$

In tal caso, per $t > t_{max}$, sostanza **F** (2) procede decadendo \sim secondo propria costante λ_2 .

2) $\lambda_1 < \lambda_2$, dopo $t \sim$ lungo ($t \gg 1/\lambda_2$) quindi $t > t_{max}$, si trascura secondo esponenziale in parentesi per $N_2(t)$ ottenendo

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \Rightarrow \mathcal{A}_2(t) = \lambda_2 N_2(t) \cong \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathcal{A}_1(t)$$

In tal caso la sostanza **F** (2) procede decadendo \sim secondo costante λ_1 di **G**.

3) $\lambda_1 \ll \lambda_2$, per $t > t_{max}$ si ha $A_2(t) \simeq A_1(t)$, con un **equilibrio transiente** fra le attività di (1) e (2), con rapporto \sim costante fra esse: $A_2/A_1 \simeq \lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) \simeq 1$

4) Se oltre a $\lambda_1 \ll \lambda_2$ si ha anche $\lambda_1 \simeq 0$, e si considerano tempi $1/\lambda_1 \gg t \gg 1/\lambda_2$, allora

$$\begin{cases} N_1(t) \cong N_1(0) \\ N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}_1(t) \cong \mathcal{A}_1(0) \\ \mathcal{A}_2(t) \cong \mathcal{A}_1(0) (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases}$$

Quindi $A_1(t)$ piccola \sim cost. e $A_2(t)$ tende all'equilibrio per $t \gg 1/\lambda_2$, quando $e^{-\lambda_2 t} \rightarrow 0$ e $A_2(t) \rightarrow A_1(0)$, ovvero in regime di **quasi saturazione** (equilibrio).

Effettivo equilibrio richiederebbe $dN_1(t)/dt = 0$, che per una catena con k decadimenti successivi implica

$$\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_2(t) = \mathcal{A}_3(t) = \dots = \mathcal{A}_k(t) \quad \text{Equilibrio Secolare}$$

condizione asintotica approssimabile tanto meglio quanto più lentamente decade G rispetto a ogni F .

- **Equilibrio secolare applicabile solo a materiale contenente tutti i prodotti di decadimento del G , rimasto indisturbato abbastanza a lungo da conseguire condizione d'equilibrio.**

- Equilibrio si ottiene anche **producendo G** nel tempo con rateo **R** uguale al loro rateo di decadimento **$\lambda N(t)$** .
Si irraggia campione di nuclei stabili inducendo **R** trasmutazioni/s verso l'elemento radioattivo che poi decade con costante **λ** .

Nuclei radioattivi $N(t)$ variano da bilanciamento fra **R e **$-\lambda N(t)$** :**

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mathcal{R} - \lambda N(t)$$

che se **$R = \text{cost.}$** , si può riscrivere:

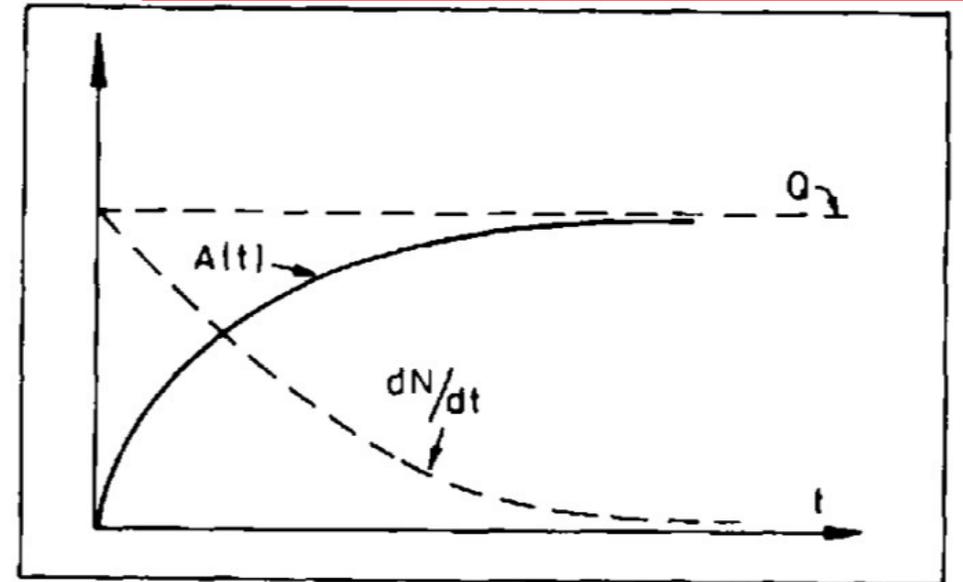
$$\frac{d[\mathcal{R} - \lambda N(t)]}{\mathcal{R} - \lambda N(t)} = -\lambda dt$$

Integrando, con **$N(0) = 0$** :

$$\mathcal{R} - \lambda N(t) = [\mathcal{R} - \lambda N(0)] e^{-\lambda t} \Rightarrow N(t) = \frac{\mathcal{R}}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \Rightarrow \mathcal{A}(t) = \lambda N(t) = \mathcal{R} (1 - e^{-\lambda t})$$

andamento a **saturazione**, tipico per **formazione e decadimento in competizione**.

Se tempo d'irraggiamento piccolo rispetto **τ** , si espande espon. fino al termine lineare in **t** , e **$\mathcal{A}(t) \simeq \mathcal{R} \lambda t$** \Rightarrow cresce a rateo \sim costante. **Per irraggiamenti brevi accumulo praticamente lineare nel tempo e poco intaccato dai decadimenti: **esempio di equilibrio secolare****



Tecniche radioattive di datazione

Datate reperti **inorganici** e **organici**.

- L'età di un minerale si ricava dagli elementi radioattivi in esso contenuti.

Una roccia che alla formazione contenesse ^{238}U , nel tempo trascorso ha accumulato **elio** dal decadimento di ^{238}U , ogni cui atomo, trasformandosi in ^{206}Pb stabile, emette **8 α** che se non sfuggono dalla roccia permettono di datarla, dal rapporto fra ^{238}U attuale ed **He** accumulato.

- Si utilizzano anche i rapporti $^{238}\text{U}/^{206}\text{Pb}$, $^{206}\text{Pb}/^{207}\text{Pb}$, **K/Ar** e $^{87}\text{Rb}/^{87}\text{Sr}$.

Dato il decadimento di **G** in **F**, basta **contare** gli attuali **G** e **F**, $N_G(t_1)$ e $N_F(t_1)$; se dal tempo t_0 ha agito solo il decadimento nel modificare $N_G(t)$ ed $N_F(t)$, allora **se** $N_F(t_0) = 0$ si ha

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_G(t_0) \quad \Rightarrow \quad N_G(t_1) = N_G(t_0) e^{-\lambda(t_1-t_0)}$$

da cui

$$\Delta t \equiv t_1 - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{N_G(t_0)}{N_G(t_1)} \right] = \frac{1}{\lambda} \ln \left[1 + \frac{N_F(t_1)}{N_G(t_1)} \right]$$

La precisione dipende da quella con cui è nota λ e da statistica di conteggio per N_G e N_F .

Raggi cosmici possono modificare rapporto N_F/N_G , rispetto a quello dovuto ai soli decadimenti di **G**.

- Se $N_F(t_0) \neq 0$ si può procedere cercando la presenza nel campione di un diverso isotopo F' della specie F , stabile e non derivante dal decadimento di un G con lunga vita media.

Se a t_0 sono già presenti $N_F(t_0)$ F , ad esempio formati da decadimenti antecedenti di G o comunque inglobati nel campione al momento t_0 della formazione, si ha

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_F(t_0) + N_G(t_0)$$

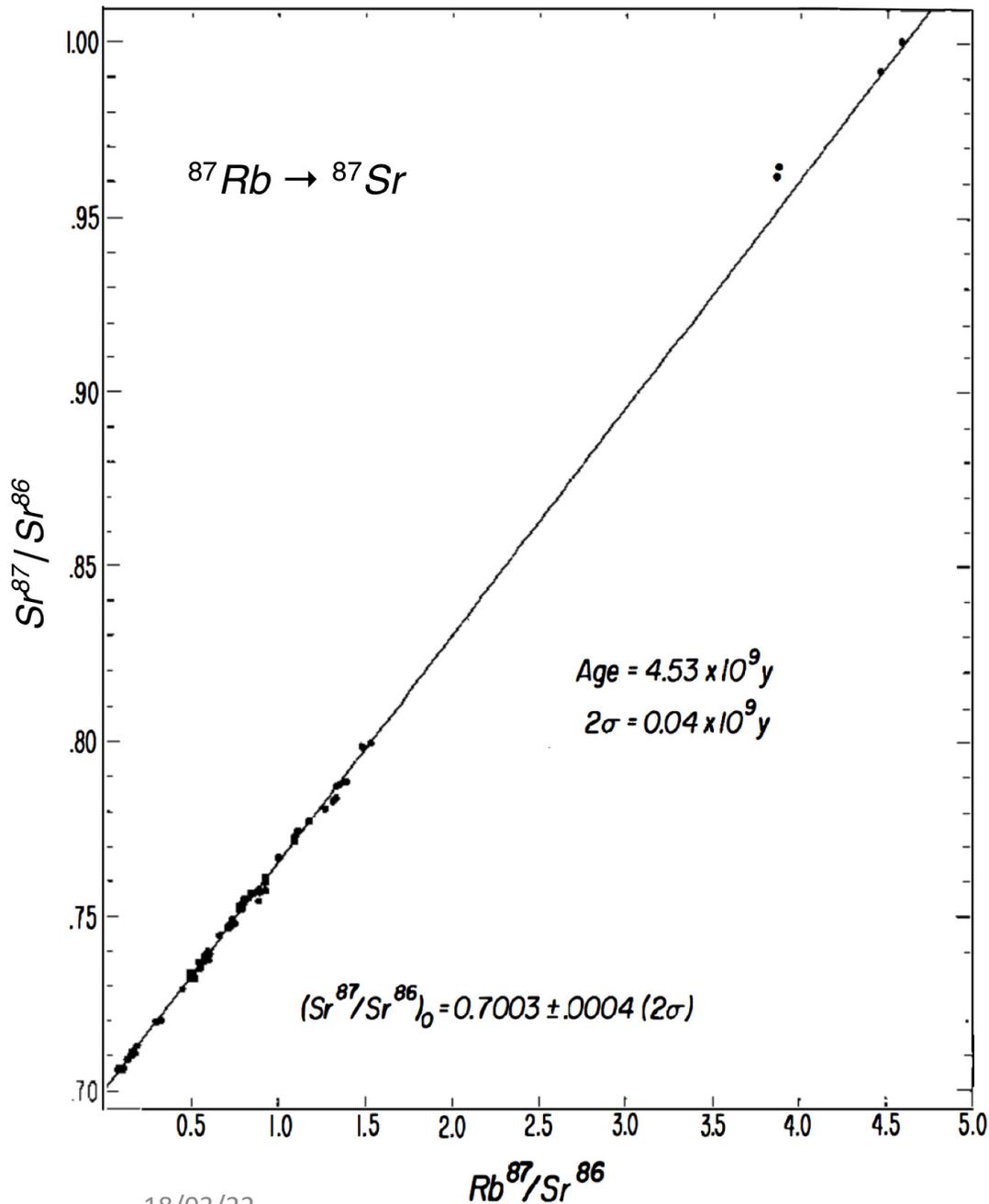
Sia $N_{F'} \neq 0$ la popolazione dell'isotopo F' , la cui stabilità implica $N_{F'}(t_1) = N_{F'}(t_0)$, da cui

$$\frac{N_F(t_1) + N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_F(t_0) + N_G(t_0)}{N_{F'}(t_0)} \quad \text{che diventa}$$

$$\frac{N_F(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} \left[e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1 \right] + \frac{N_F(t_0)}{N_{F'}(t_0)}$$

$N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$ e $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$ misurabili in lab., ma resta incognito $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$.

- **Minerali che cristallizzano con origine comune hanno uguali età e rapporti isotopici $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$, anche se in essi $N_G(t_0)$ può essere molto diverso (... diversa composizione chimica).**



Se è così ci sono minerali con diversi rapporti $N_{\text{F}}(t_1)/N_{\text{F}'}(t_1)$ e $N_{\text{G}}(t_1)/N_{\text{F}'}(t_1)$, corrispondenti a stessa coppia $(t_1 - t_0)$ e $N_{\text{F}}(t_0)/N_{\text{F}'}(t_0)$.

Verificabile graficando $N_{\text{F}}(t_1)/N_{\text{F}'}(t_1) \% N_{\text{G}}(t_1)/N_{\text{F}'}(t_1)$.

- Per svariati minerali si trova dipendenza lineare fra i rapporti, con pendenza $[e^{\lambda(t_1 - t_0)} - 1]$

e intercetta $N_{\text{F}}(t_0)/N_{\text{F}'}(t_0)$.

Esempio: $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr}$ ($T_{1/2} = 4.8 \times 10^{10}$ y), confrontato con isotopo stabile ^{86}Sr (in figura).

Buona linearità suffraga ipotesi che **non** vi siano state perdite di nuclei **G** o **F**.

Datazione di reperti organici

Organismo vivente assorbe CO_2 , il cui carbonio è ^{12}C al 98.89%, con ^{13}C al 1.11%.

- ^{14}C radioattivo, che decade β^- in ^{14}N con $\tau = 8267 \text{ y}$, continuamente formato nell'alta atmosfera per cattura su azoto atmosferico dei n termici, come prodotti secondari dei cosmici.
- L'equilibrio dinamico che si instaura fra produz. e decad., supposti stabili struttura chimica, densità media dell'atmosfera, e il flusso di cosmici, mantiene costante conc. di ^{14}C in atmosfera.
- ^{14}C prodotto con rateo $R(^{14}\text{C})$ reagisce con ossigeno dando $^{14}\text{CO}_2$, anche utilizzata dalle piante durante la fotosintesi clorofilliana.

Tramite catena alimentare ^{14}C si trasferisce in ogni struttura vivente: $\sim 1.3 \text{ }^{14}\text{C}$ ogni 10^{12} di ^{12}C .

Tutta la materia vivente è leggermente radioattiva.

Se $R(^{14}\text{C})$ costante \Rightarrow materia organica è in equilibrio per contenuto di ^{14}C con quello atmosferico e lo mantiene fino alla morte (*metabolismo*).

$$\frac{dN(^{14}\text{C})}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(^{14}\text{C}) = \lambda(^{14}\text{C}) N(^{14}\text{C})$$

Dalla morte s'interrompe equilibrio e ^{14}C nell'organismo inizia a decrescere **con legge del decadimento**.

Età campione organico dalla morte dell'organismo: misura attività per grammo di carbonio in esso contenuto, **attività specifica** A_{sp} , e confronto con attività specifica del carbonio atmosferico **0.23 Bq/g [13.8 disint./(g · minuto)]**.

Se organismo muore a t_0 , e t_1 è il tempo della misura, l'età $\Delta t = (t_1 - t_0)$ del campione è

$$A_{sp}({}^{14}\text{C}, t_1) = A_{sp}({}^{14}\text{C}, t_0) e^{-\lambda(t_1 - t_0)}$$

⇒

$$\Delta t \equiv (t_1 - t_0) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_{sp}({}^{14}\text{C}, t_0)}{A_{sp}({}^{14}\text{C}, t_1)}$$

Affidabile per tempi $\approx 7 \cdot \tau$, quindi con ${}^{14}\text{C}$ si ottengono **datazioni attendibili fino a tempi inferiori a $\approx 6 \times 10^4$ y**.

Meglio con la tecnica AMS (conta direttamente numero di atomi di ${}^{14}\text{C}$ e anche di altri isotopi, presenti nel campione).

