

# FISICA NUCLEARE

## Decadimenti nucleari

- Generalità
- Radioattività  $\alpha$ 
  - Energetica dei decadimenti  $\alpha$
  - Soglia di instabilità
  - Teoria del decadimento  $\alpha$

## Generalità

Un nucleo è stabile rispetto al decadimento  ${}^A_Z\text{X} \longrightarrow {}^{A-A'}_{Z-Z'}\text{X} + \sum_{i=1}^n {}^{A^i}_{Z^i}\text{b}$  se

$$\Delta M_b(A, Z) = M_X(A, Z) - M_X(A - A', Z - Z') - \sum_{i=1}^n M_b(A^i, Z^i) < 0$$

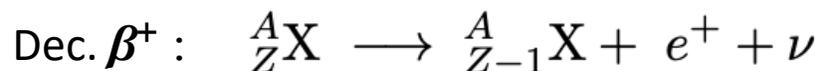
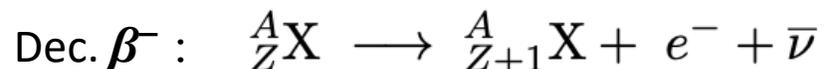
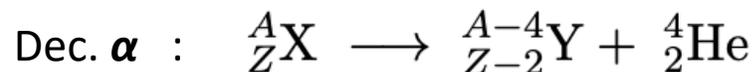
- Se invece  $\Delta M_b > 0 \Rightarrow$  decadimento può avvenire **spontaneamente**.

Energia rilasciata nel decadimento  $\propto Q$ -valore: decadimento spontaneo solo se  $Q > 0$ .

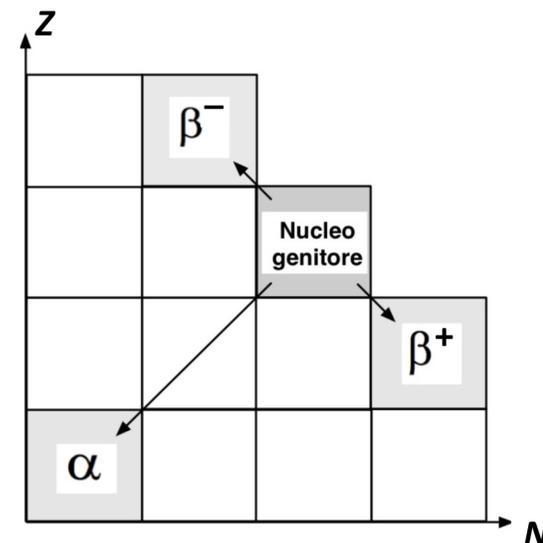
Dai valori sperimentali delle masse  $\Rightarrow Q < 0$  per emissione spontanea di **p**, **n** o **d** da ogni nuclide **naturale**.

Talora **emissione ritardata** di **n** o **p**, sempre però a ridosso di emissione di **e<sup>-</sup>** o **e<sup>+</sup>** conseguenti a decadimento **β**, o dopo una **cattura K**.

- Per alcuni nuclei pesanti  $Q_\alpha(A, Z) > 0 \Rightarrow$  energeticamente possibile emissione spontanea di particelle **α**



Legge dello **spostamento radioattivo** di Soddy-Fajans



## Radioattività $\alpha$ \_ Energetica

Decadimento  $\alpha \sim$  **fissione spontanea** del nucleo genitore **G**.

- Importanza cresce con **A**  $\Rightarrow$  rep. coulomb. cresce più rapidamente del legame nucleare che satura al crescere di **A**.
- $E_k$  delle  $\alpha < 10$  MeV, quindi essendo  $M_\alpha c^2 \simeq 3.73$  GeV, trattazione **non relativistica**. **G** a riposo in **SL**.

**Conservazione energia:**

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + E_{k,Y} + M_\alpha c^2 + E_{k,\alpha}$$

da cui:

$$E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = (M_X - M_Y - M_\alpha) c^2 = \Delta M c^2 \equiv Q_\alpha \quad E_{k,Y} = \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 \quad , \quad E_{k,\alpha} = \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2$$

**Conservazione impulso:**

$$M_Y v_Y = -M_\alpha v_\alpha$$

da cui,

$$v_Y = \frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha$$

$$\begin{aligned} E_{k,Y} + E_{k,\alpha} &= \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} M_Y \left( \frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha \right)^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \\ &= \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 \left( \frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) = E_{k,\alpha} \left( \frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) = Q_\alpha \end{aligned}$$

e ancora

$$E_{k,\alpha} = \frac{M_Y}{M_\alpha + M_Y} Q_\alpha$$

ed

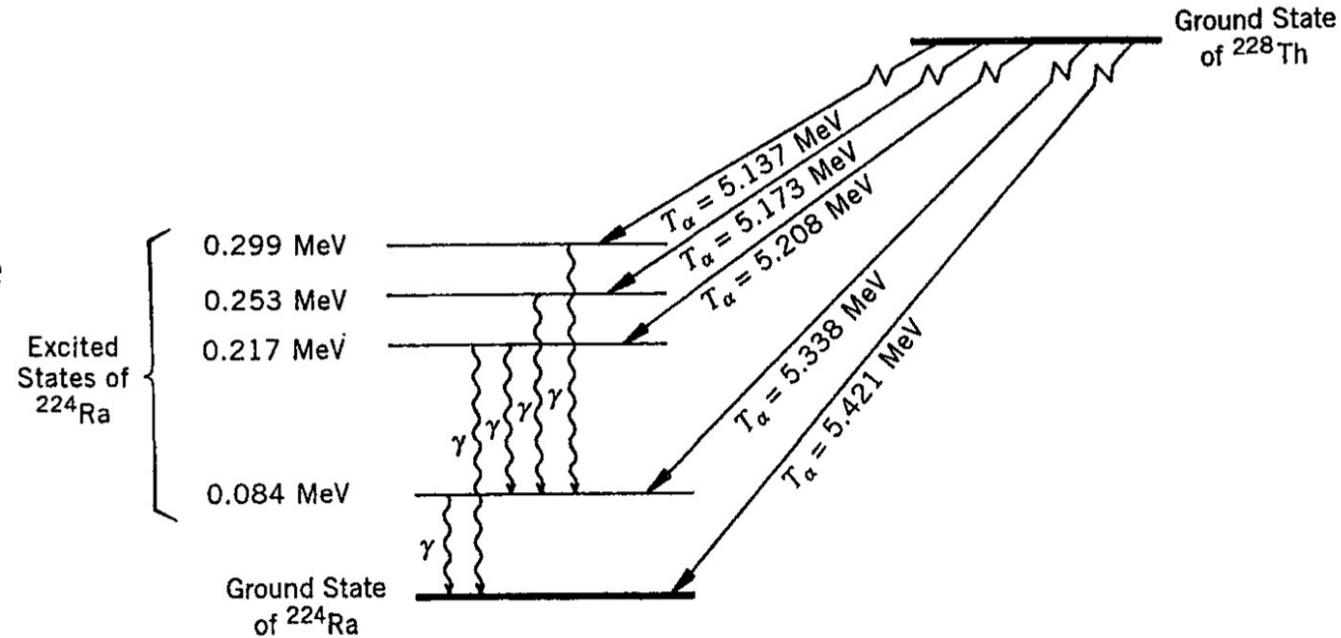
$$E_{k,Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{k,\alpha}$$

$E_k$  delle  $\alpha$  non può essere  $< 0$ , quindi **decadimento esotermico** ( $Q_\alpha \geq 0$ )

- Pur essendo decadimento in **due corpi** lo spettro  $\alpha$  ha una **struttura fine**.
- Le  $\alpha$  del picco più intenso dello spettro sono prodotte **da sole**, le altre sempre **accompagnate da  $\gamma$** .

**Ciò suggerisce presenza livelli energetici nel nucleo con struttura a stati discreti.**

$\alpha$  più energetiche da **G** eccitato,  $\alpha$  meno energetiche da **F** eccitato.



## Soglia di instabilità

Nel decadimento  **$\alpha$  nucleoni non cambiano natura**  $\Rightarrow$  esso può avvenire solo se accompagnato da aumento energia di legame per nucleone nei prodotti finali.

- Energia media di legame per nucleone  $\langle B(A) \rangle \Rightarrow$  decadimento  $\alpha$  possibile solo dove  $\partial \langle B \rangle / \partial A < 0$  e contemporaneamente  $A > 60$ .  $[56(\text{Fe}) + 4(\text{He}) = 60]$

$Q_\alpha$  può essere scritto in termini delle energie medie di legame per nucleone  $\langle B \rangle_{X,Y,\alpha}$  dei nuclei coinvolti.

$$Q \equiv [M(A, Z) - M(A-4, Z-2) - M_\alpha] c^2 = A(\langle B_Y \rangle - \langle B_X \rangle) - 4(\langle B_Y \rangle - \langle B_\alpha \rangle) > 0$$

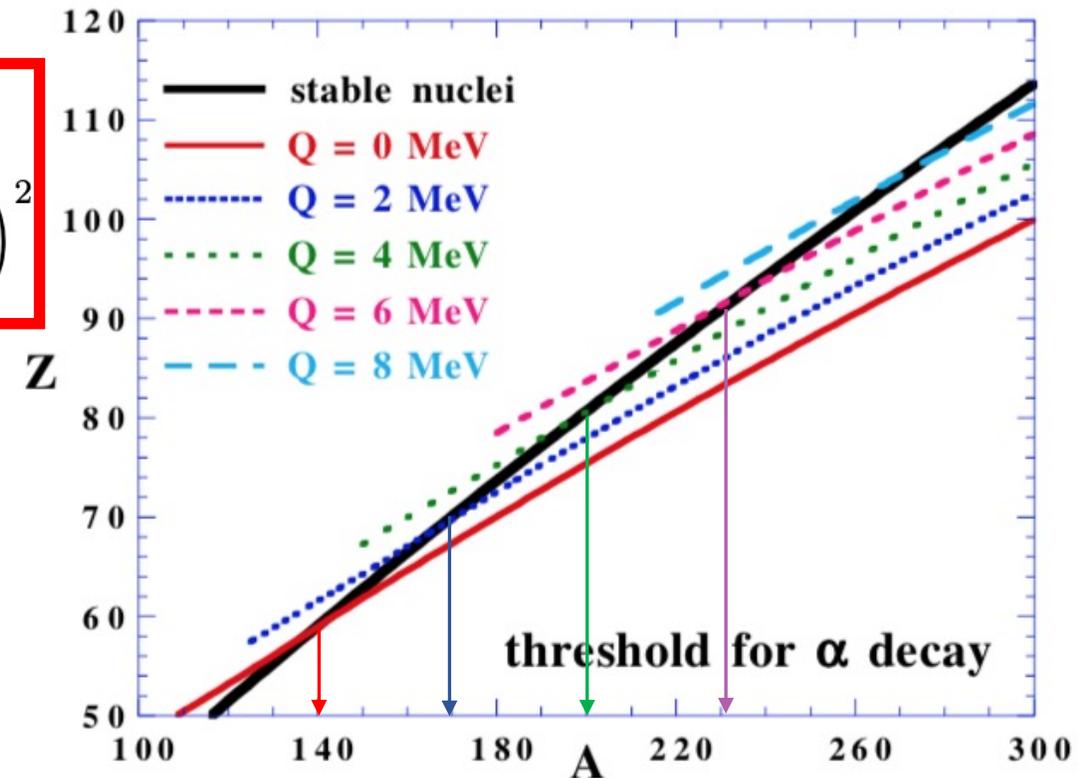
$\langle B_\alpha \rangle \simeq 7.1$  MeV, quindi  $<$  che per i nuclei pesanti coinvolti  $\Rightarrow$  il secondo termine è  $> 0$ , e la soglia di instabilità è decisamente  $> A = 60$ .

Da Weizäcker trascurando accoppiamento, con  $Z(Z-1) \simeq Z^2$ , e sviluppando in serie troncata al 1° term.

$$Q = 4\langle B \rangle_\alpha - [A\langle B \rangle_X - (A-4)\langle B \rangle_Y] = B_\alpha - (B_X - B_Y) \simeq B_\alpha + 4b_V + 4\left[\frac{2}{3}b_S + b_C Z\left(1 - \frac{Z}{3A}\right)\right] A^{-1/3} - 4b_{sim}\left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2$$

Sostituendo valori per parametri  $b_k$  si hanno sul piano  $(Z, A)$  le **linee per  $Q = \text{cost.}$**  che individuano le **soglie di instabilità** del decadimento per emissione di  $\alpha$  con energia  $E_{k,\alpha} \simeq Q$ .

Decadimento  $\alpha$  per  $140 < A < 200$  è possibile, ma date lunghissime vite medie, quasi inosservabile.



## Geiger Nuttal

- Dai dati  $\Rightarrow$  prob. decadimento  $\alpha$  del  $G$  è funz. rapidamente crescente di  $E_{k,\alpha}$  quindi del  $Q_\alpha$ .

Per organizzare dati, Geiger e Nuttal suggerirono (1911) una relazione empirica fra prob. di decadimento  $\lambda_\alpha$  ed energia totale, ovvero il  $Q_\alpha$ , per ogni *catena isotopica*

$$\log \lambda_\alpha = A(Z) Q_\alpha^{-1/2} + B(Z)$$

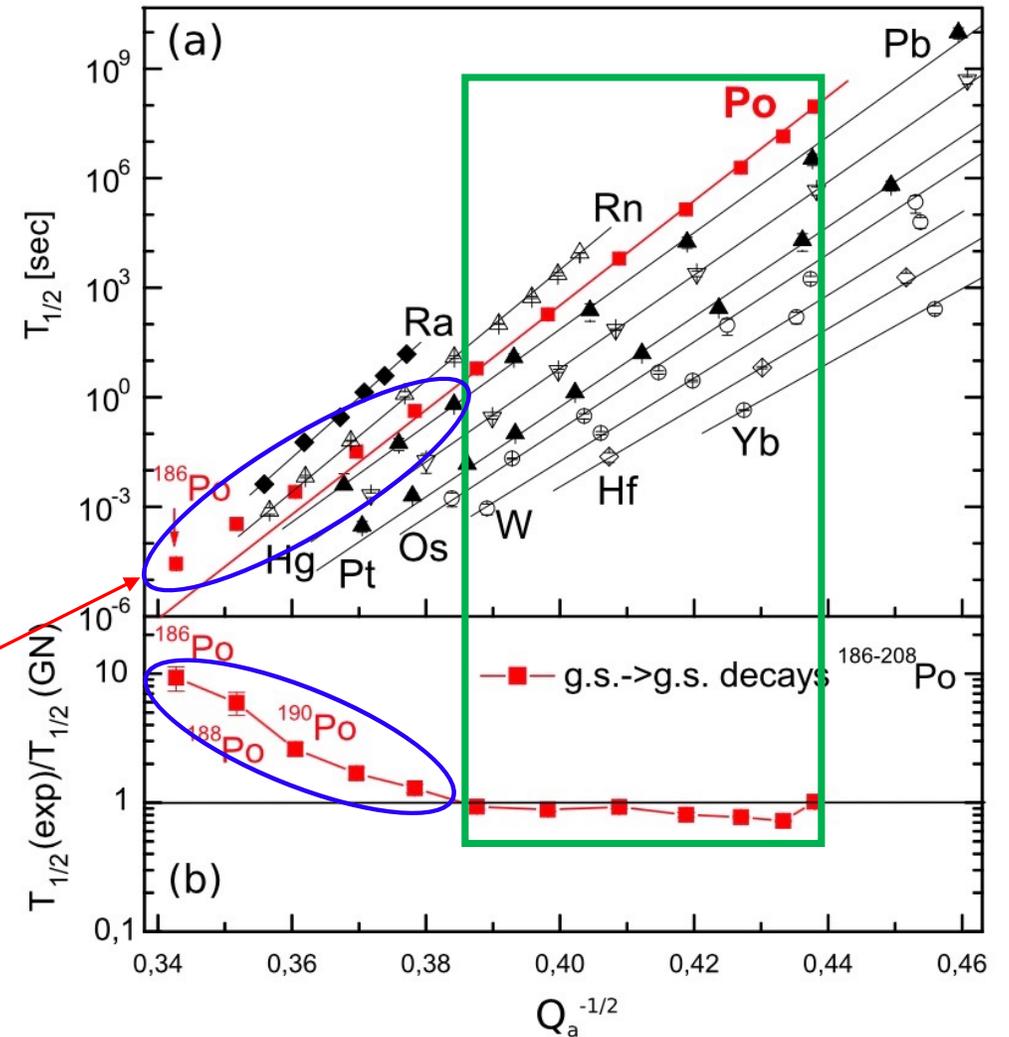
con  $A(Z)$  e  $B(Z)$  da determinare con *fit sui dati*.

Prendendo l'esponente si ha

$$\lambda_\alpha(Q_\alpha) \propto e^{D(Z) Q_\alpha^{-1/2}}$$

che descrive  $\sim$  bene i dati finché la dipendenza di  $\log \lambda_\alpha$  dal numero di neutroni si mantiene *lineare*, e per  $A$  e  $Z$  pari.

Risultato che teoria del decadimento  $\alpha$  deve riprodurre.



## Teoria del decadimento $\alpha$

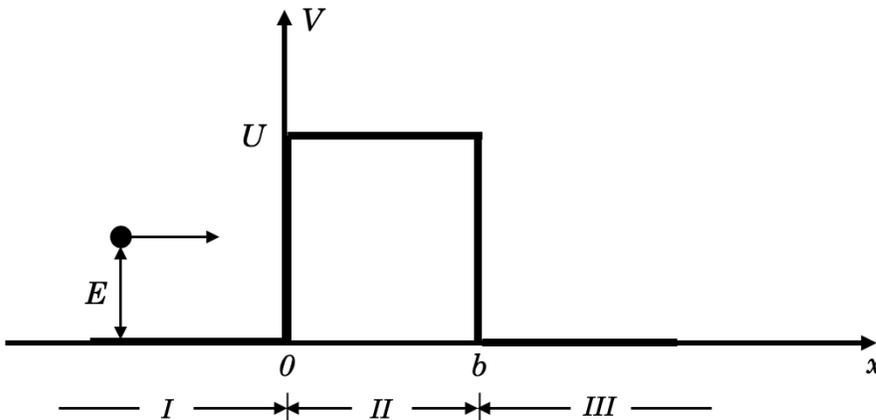
**Gamow \_ 1928**  $\alpha$  non esistono come tali nei nuclei prima del decadimento, ma si formano a inizio processo.

A sufficiente distanza dal **CM** del sistema, poco prima del decadimento, **G** descrivibile come un sistema  **$\alpha + F$** , con  $\alpha$  che si muove in buca di potenziale.

– Barriera coulombiana per  **$A \simeq 200$**  è  **$\sim 20 \div 25$  MeV**, e  $\alpha$  con energie di pochi MeV, come quelle del decadimento alfa, non dovrebbero superarla.

Emissione  $\alpha$  da un nucleo è fenomeno **squisitamente quantistico**, legato all'**effetto tunnel**.

### Trasmissione attraverso una barriera rettangolare



Attraversamento barriera **2-dim**, **rettangolare** estesa da **0 a b**.

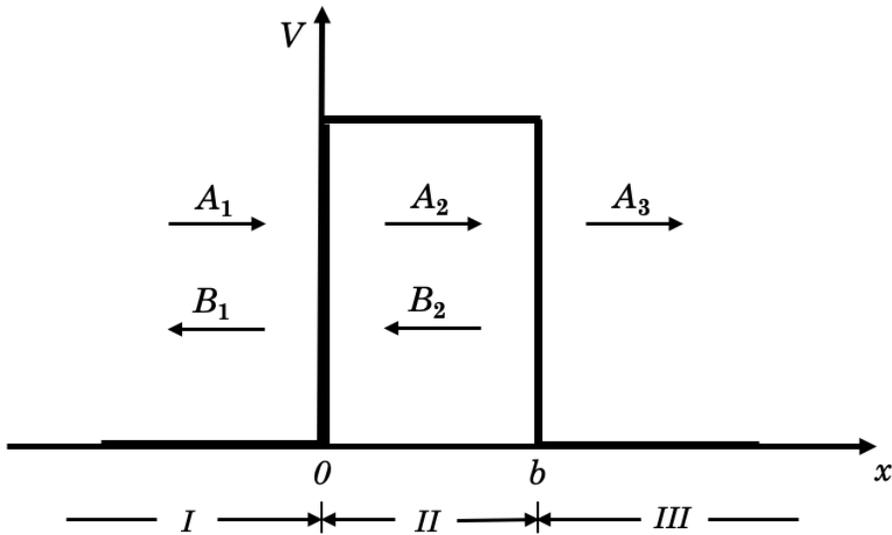
Particella descritta con funz. d'onda d'ampiezza  **$A_1$**  e lunghezza ridotta

$$\chi = \hbar / mv = \hbar / \sqrt{2mE}$$

**$m$**  è massa ridotta.

In  **$x = 0$**  parte della funz. d'onda con ampiezza  **$B_1 < A_1$**  è riflessa nella zona **I** e parte con ampiezza  **$A_2 < A_1$**  è trasmessa nella zona **II**.

Similmente in  **$x = b$** .



- **Fattore di penetrazione** e **trasparenza** della barriera:

$$P = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$

$$T = \frac{|A_3|^2 k_{III}}{|A_1|^2 k_I}$$

con  $k_i = 1/\lambda_i$

I numeri d'onda derivano dalla soluzione dell'eq. di Schrödinger:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0$$

Funz. d'onda nella regione I:

$$\psi_I = A_1 e^{ik_I x} + B_1 e^{-ik_I x}$$

Similmente nella regione III:  $\psi_{III} = A_3 e^{ik_{III} x}$ , con  $k_{III} = k_I \Rightarrow$  (diminuisce intensità ma non caratteristiche)

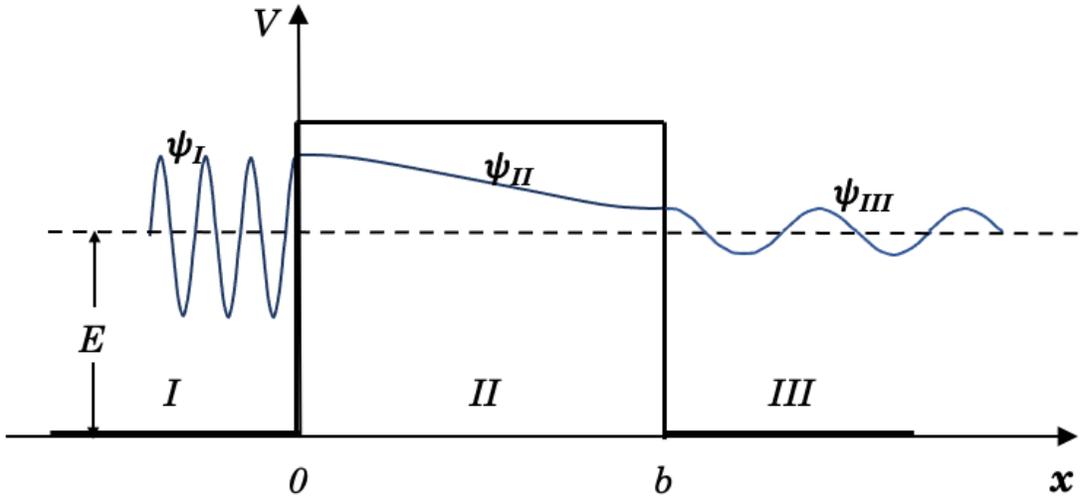
Nella regione II:  $(E - V) = (E - U) = -E_B$ , che gioca ruolo **en. di legame** con  $E_B > 0$ .

Anche in zona II funz. d'onda è sovrapp. di onde progressive e regressive

$$\psi_{II} = A_2 e^{ik_{II} x} + B_2 e^{-ik_{II} x}, \quad \text{con} \quad k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E - U)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{-2mE_B}}{\hbar}$$

Funz. d'onda contengono una ampiezza nota ( $A_1$ ) e quattro da determinare ( $B_1, A_2, B_2, A_3$ ), per ottenere  $T$ .

- Devono soddisfare continuità anche delle loro derivate prime in  $x = 0$  e in  $x = b$ .



Si ha: 
$$T = \left\{ 1 + \frac{U^2}{4E(U-E)} \left[ \frac{1}{4} \left( e^{2k'_{II}b} + e^{-2k'_{II}b} \right) - \frac{1}{2} \right] \right\}^{-1}$$

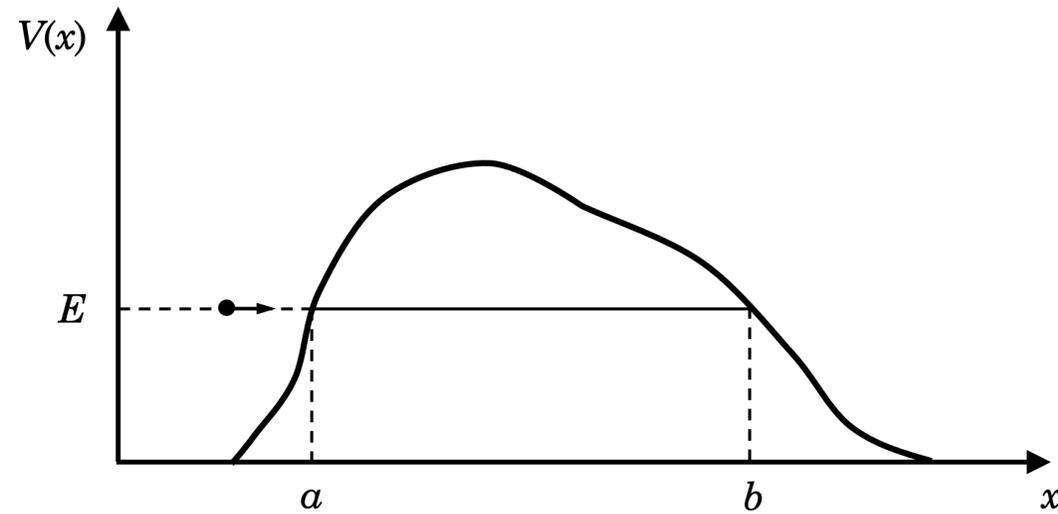
- Per una **barriera spessa**  $k'_{II}b \gg 1$  e si ha

$$T \approx \frac{16E(U-E)}{U^2} e^{-2b\sqrt{2m(U-E)}/\hbar}$$

( Gamow )

Problema per barriera di **forma arbitraria**; la si sostituisce con una rettangolare equivalente d'altezza  $U_{eff}$  e larghezza  $(b-a)$  in modo che

$$T \approx e^{-2 \sqrt{\frac{2m(U_{eff} - E)}{\hbar^2}} (b-a)} = e^{-2 \int_a^b \sqrt{\frac{2m[V(x) - E]}{\hbar^2}} dx}$$



## Trasmissione attraverso la barriera di potenziale nucleare

- **Particelle confinate da barriera a simmetria sferica.**

Si **fattorizza** la funzione d'onda  $\psi(r, \vartheta, \varphi) = f(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi) = f(r) Y(\vartheta, \varphi)$

Eq. Schrödinger si scinde in **parte radiale** e **parte angolare**, come per atomo di idrogeno.

Soluzioni parte angolare: **armoniche sferiche**

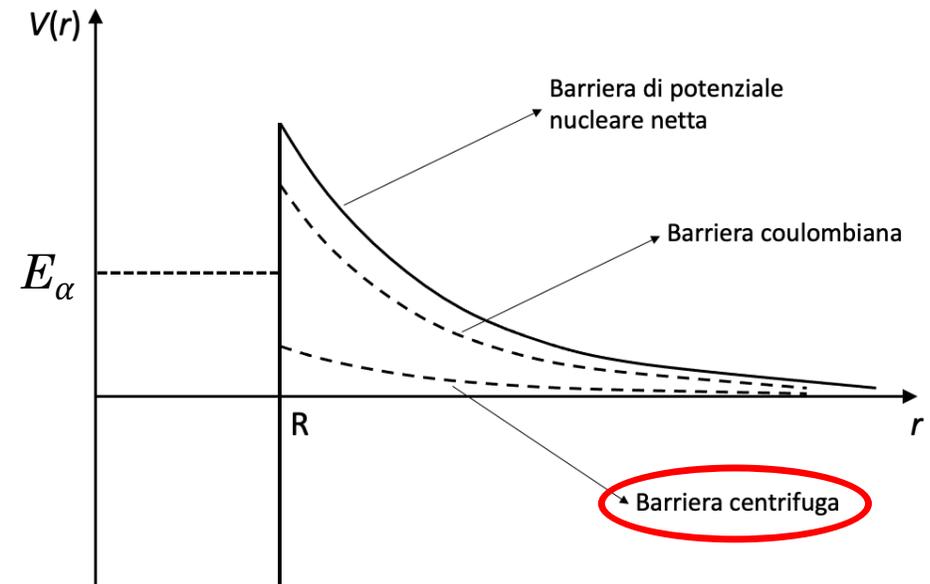
$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!}} P_\ell^m(\cos\vartheta) e^{im\varphi}$$

**Fisica del problema è nell'equazione radiale** che posto  $u(r) = rf(r)$

diventa

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ (E_{tot} - V) - \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0$$

che ha anche un termine di **potenziale centrifugo** che concorre ad accrescere la barriera se  $l \neq 0$  e **vale anche per particelle neutre, essendo svincolato dalla carica.**



## Costante di decadimento $\alpha$

- **Relazione fra  $T$  e  $\lambda_\alpha = 1/\tau_\alpha$ .**

Si considerino molti nuclei pronti a decadere  $\alpha \rightleftharpoons$  moltitudine di  $\alpha$  confinate da barriera descrivibile come onda di intensità  $I_0$ .

Si suppone che a  $t = 0$  ogni  $\alpha$  incida sulla barriera e una frazione  $T$  di esse la attraversi.

Intensità dell'onda riflessa dalla barriera al primo tentativo d'attraversamento è  $(1-T)I_0$ .

Dopo  $n$  tentativi nel tempo  $t$

$$I_n = (1 - T)^n I_0 = I_0 e^{n \ln(1-T)}$$

con

$$\lim_{T \rightarrow 0} I_n = I_0 e^{-nT}$$

Se  $v =$  velocità media di  $\alpha$  in nucleo di raggio  $R$ , il tempo medio fra due successivi tentativi d'attraversamento è  $\Delta t = 2R/v$ , e il numero medio  $n$  di tentativi nel tempo  $t$  è  $n = t/\Delta t = vt/2R$ . Quindi:

$$I_n = I_0 e^{-T \frac{v}{2R} t}$$

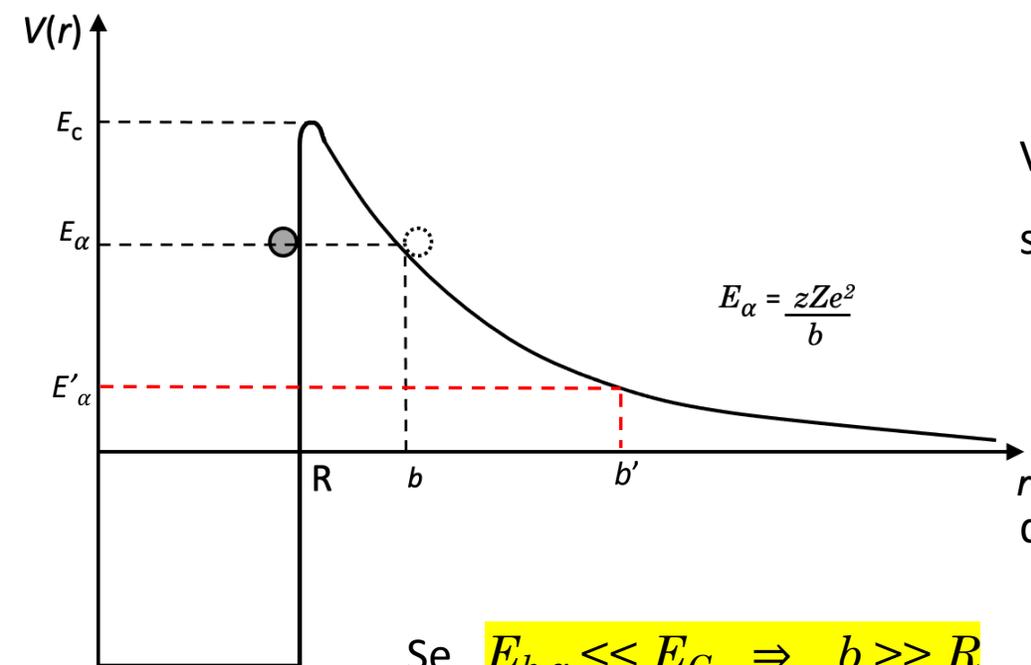
Con un'energia realistica di  $\sim 8$  MeV per le  $\alpha \Rightarrow dn/dt = v/2R \approx 10^{21}$  e si può esprimere  $I_n$  come **funz. continua** di  $t$

$$I_n \longrightarrow I(t) = I_0 e^{-\lambda_\alpha t}$$

con

$$\lambda_\alpha = T \frac{v}{2R} = T \frac{dn}{dt} = T \lambda_0$$

$\lambda_0$  cambia poco da nucleo a nucleo, mentre la trasparenza  $T$  cambia sensibilmente



Valutando  $T$  per un potenziale come in figura, integrando da  $R$  a  $b$  si ottiene  $T = e^{-G}$  con fattore  $G$  di Gamow

$$G = \sqrt{\frac{2mzZe^2b}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \left( \arccos\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} \right)$$

$$\lambda_\alpha = \lambda_0 e^{-G}$$

da cui

Se  $E_{k,\alpha} \ll E_C \Rightarrow b \gg R$  e si può porre:

$$G \simeq \sqrt{\frac{2mzZe^2b}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \sim (E_{k,\alpha})^{-1/2}$$

con  $b = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 E}$  da cui la legge di Geiger-Nuttal.

- Calcolando ad es. vita media d'emissione  $\alpha$  per  $^{232}\text{Th}$ , che emette  $\alpha$  da 4.05 MeV con vita media di  $1.39 \times 10^{10}$  y, si ottiene un valore di  $1.3 \times 10^{10}$  y.

- Probabilità emissione **dipende dall'inverso della massa** della particella emessa, come si vede dal fattore di Gamow (da ricordare per la fissione).

	$Q_\alpha$ (MeV)	$r_s$ (fm)	$r_c$ (fm)	$G$	$\tau_{exp}$ (s)	$\tau_{th}$ (s)
$^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{234}_{90}\text{Th}$	4.27	8.52	60.7	0.53	$2.0 \times 10^{17}$	$3.3 \times 10^{17}$
$^{234}_{92}\text{U} \rightarrow ^{230}_{90}\text{Th}$	4.86	8.49	53.3	0.51	$1.1 \times 10^{13}$	$1.1 \times 10^{13}$
$^{230}_{90}\text{U} \rightarrow ^{226}_{88}\text{Ra}$	4.77	8.45	53.1	0.51	$3.5 \times 10^{12}$	$3.9 \times 10^{12}$
$^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow ^{222}_{86}\text{Rn}$	4.87	8.41	50.9	0.50	$7.4 \times 10^{10}$	$7.4 \times 10^{10}$
$^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow ^{218}_{84}\text{Po}$	5.59	8.37	43.3	0.46	$4.8 \times 10^5$	$4.2 \times 10^5$
$^{218}_{84}\text{Po} \rightarrow ^{214}_{82}\text{Pb}$	6.11	8.33	38.7	0.43	$2.6 \times 10^2$	$1.6 \times 10^2$ (*)
$^{214}_{84}\text{Po} \rightarrow ^{210}_{82}\text{Pb}$	7.84	8.28	30.1	0.36	$2.3 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-4}$ (*)
$^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow ^{206}_{82}\text{Th}$	5.41	8.24	43.7	0.47	$1.7 \times 10^7$	$5.8 \times 10^5$ (*)

(\*) Gli isotopi leggeri del Polonio si scostano notevolmente dalle predizioni della teoria di Gamow, a causa della asimmetria dei loro stati fondamentali ...