

FISICA NUCLEARE

- Reazioni nucleari in regime non relativistico
 - Leggi di conservazione
 - Energetica delle reazioni nucleari
 - Diffusione da potenziale nucleare
 - Diffusione in onde parziali
 - Modello ottico (1)

- **Reazioni nucleari in regime non relativistico**

1919: Rutherford trasmutazione specie nucleari $\alpha + {}^{14}\text{N} \rightarrow {}^{17}\text{O} + p$

1932: Cockroft e Walton $p + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + \alpha$ ($E_{k,p}$ 125÷600 keV ; importante nella nucleosintesi primordiale)

- \sim **decine di MeV** nel canale di reazione : **bassa energia**
- **100 MeV ÷ 1 GeV** : **media energia** (produzione **mesoni** e trasformazione $p \rightleftharpoons n$)
- **Energie superiori** (produzione particelle più massive e ri-arrangiamenti di quark)

Reazione nucleare: $a + X \rightarrow Y + b$ oppure $X(a,b)Y$ (a due corpi)

- $a \equiv \gamma$ reazione **foto-nucleare**, se $b \equiv \gamma$ reazione di **cattura radiativa**
- $a \equiv b$ e $X \equiv Y$: **elastica** se Y e b in stato fondamentale; **anelastica** se Y e/o b eccitati
- $a \equiv b$ più ulteriore nucleone in canale d'uscita \Rightarrow meccanismo di **knockout**
- **Reazioni di trasferimento**: uno o più nucleoni scambiati fra proiettile e bersaglio

– **Reazioni classificate anche in base a meccanismo**

- **Reazioni di trasferimento** sono parte delle **reazioni dirette**, dove solo pochi nucleoni, tipicamente del bersaglio, partecipano al processo, e i restanti sono sostanziali **spettatori passivi**.

- Meccanismo del **nucleo composto**: proiettile e bersaglio si fondono per breve lasso di tempo, ripartendosi completamente energia disponibile prima che il sistema (**nucleo composto**) si disecchi emettendo uno o più nucleoni in modo **\sim evaporazione** di molecole da liquido caldo
- Fra questi due estremi \Rightarrow **reazioni di risonanza**, con **proiettile e bersaglio** che formano stato **quasi-legato** prima di emettere un prodotto leggero di reazione.

Leggi di conservazione

- **Energia totale** e **impulso totale**: correlano energie misurabili di prodotti di reazione a quelle note delle particelle incidenti
- Energia di **b** \Rightarrow dedurre energia eccitazione degli stati di **Y** o differenza di massa tra **X** e **Y**
- Conservazione **numero barionico**
- Conservazione **momento angolare** \Rightarrow correla spin canale d'ingresso a mom. ang. orb. dei prodotti nei canali d'uscita (**misure di distribuzioni angolari**)
- **Parità**: parità incognite degli stati eccitati si deducono da quelle note e dal mom. ang. orb. dei prodotti **$[(-1)^l]$**

Energetica delle reazioni nucleari

- Approssimazione non relativistica

Conservazione energia:

$$m_X c^2 + E_{k,X} + m_a c^2 + E_{k,a} = m_Y c^2 + E_{k,Y} + m_b c^2 + E_{k,b}$$

Q-valore:

$$Q = (m_X + m_a - m_Y - m_b) c^2 \equiv E_{k,Y} + E_{k,b} - E_{k,X} - E_{k,a}$$

$Q > 0$, **eso-energetica** o esotermica (massa, o en. legame $\rightarrow E_k$ dei prodotti)

$Q < 0$, **endo-energetica** o endotermica ($E_k \rightarrow$ massa o en. legame dei prodotti)

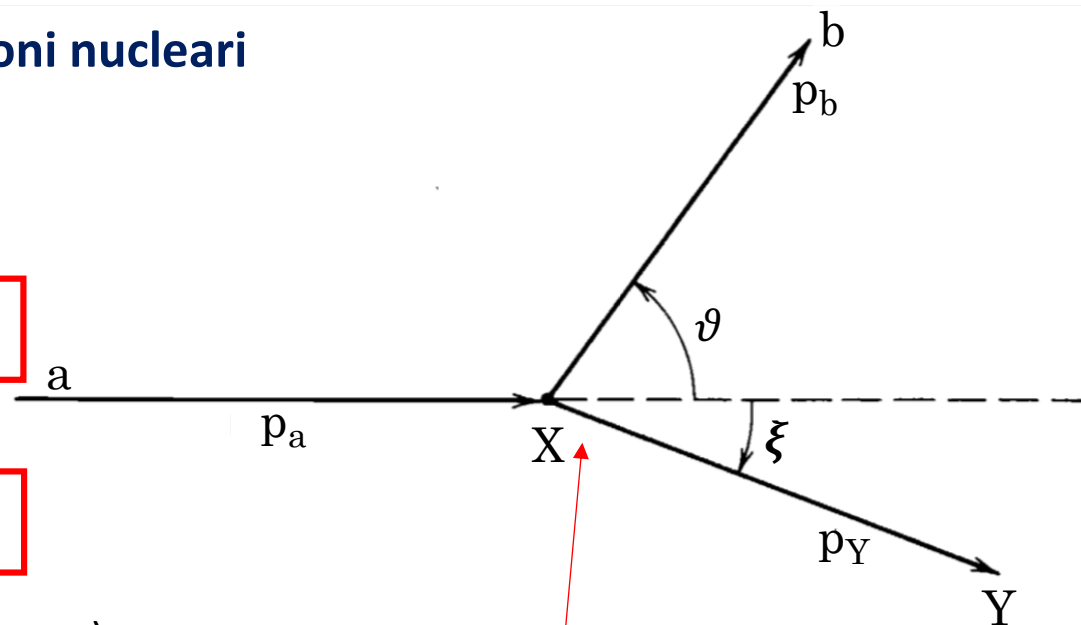
$Q = 0$, **elastica**

- Si lavora in **SL** e si definisce **piano di reazione** quello *contenente asse fascio e velocità di uno dei prodotti*.

Se due corpi nello stato finale \Rightarrow entrambi si muovono sul piano di reazione.

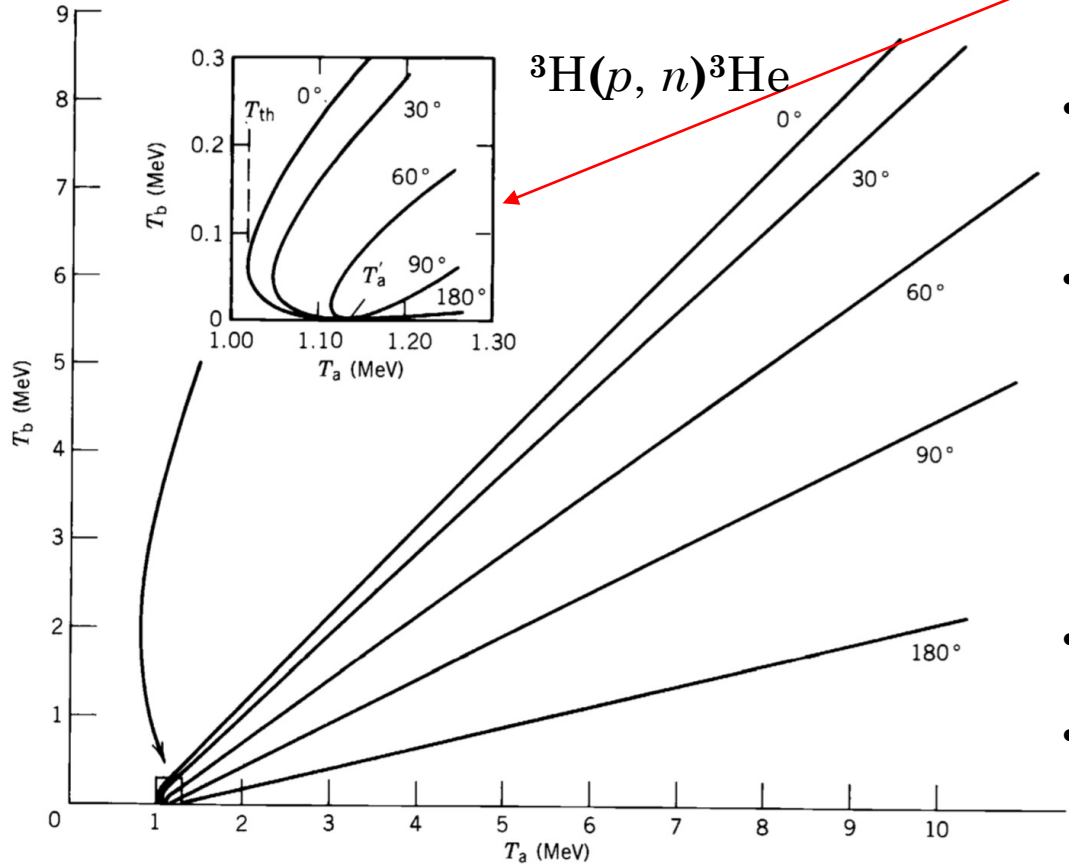
Conservazione impulso \Rightarrow $p_a = p_b \cos\vartheta + p_Y \cos\xi$ e $0 = p_b \sin\vartheta + p_Y \sin\xi$

Se è noto Q , con $E_{k,a}$ e quindi p_a controllabile, le conservazioni di E e p \Rightarrow sistema di 3 equazioni in 4 incognite, che **non ha soluzione unica**.



Se non si osserva Y , perchè troppo poco energetico, eliminando ξ ed $E_{k,Y}$ si ha:

$$\sqrt{E_{k,b}} \cong \frac{\sqrt{m_a m_b E_{k,a}} \cos\vartheta}{m_Y + m_b} \pm \frac{\sqrt{m_a m_b E_{k,a} \cos^2\vartheta + (m_Y + m_b) [m_y Q + (m_Y - m_a) E_{k,a}]}}{m_Y + m_b}$$



$Q = -763.75 \text{ keV}$ $E_{k,b} \% E_{k,a}$ per ${}^3\text{H}(p, n){}^3\text{He}$.
Riquadro: zona non biunivocità

- Tranne in piccolo intervallo $1.019 \text{ MeV} \leq E_{k,a} \leq 1.147 \text{ MeV}$, c'è corrispondenza biunivoca fra $E_{k,b}$ e ϑ , fissato $E_{k,a}$
- $E_{k,a}$ ha minimo assoluto E_{th} sotto il quale la reazione non avviene e corrisponde a $Q < 0$.
Soglia si manifesta sempre per $\vartheta = 0$, quindi $\xi = 0$, e corrisponde a Y e b che si muovono assieme, restando però due entità separate
Urto centrale senza trasformazione d'energia in impulsi trasversi
- Se $Q > 0$ nessuna soglia, ma tener conto di barriera coulombiana
- Zona non-biunivocità fino ad angolo massimo ϑ_m equivalente a condizione d'annullamento argomento della seconda radice.

- Misura di $E_{k,b}$, noti $E_{k,a}$ e $\vartheta \Rightarrow Q$ e relazione fra masse. Note m_a , m_b ed m_X si deduce m_Y .

$$Q = E_{k,b} \left(1 + \frac{m_b}{m_Y} \right) - E_{k,a} \left(1 - \frac{m_a}{m_Y} \right) - 2 \sqrt{\frac{m_a}{m_Y} \frac{m_b}{m_Y}} E_{k,a} E_{k,b} \cos \vartheta$$

- Se reazione conduce a stati eccitati di Y , allora il Q deve tenerne conto

$$Q_{ecc} = (m_X + m_a - m_Y^* - m_b) c^2 = Q_0 - E_{ecc}$$

Diffusione da potenziale nucleare

- Intensità interazione **NO** approccio perturbativo (Born).
- Per alte energie $\lambda = h/p \approx$ dimensioni nucleo \Rightarrow approccio **ottico**. Sez. d'urto sperimentali elastiche \sim andamenti diffrattivi.

Ottica: disco opaco con bordo netto \Rightarrow massimi e minimi diffrazione con 1° minimo a $\sin\vartheta \approx \lambda/R$. Minimi successivi \approx spazati e massimi intermedi calano d'ampiezza al progredire di ϑ .

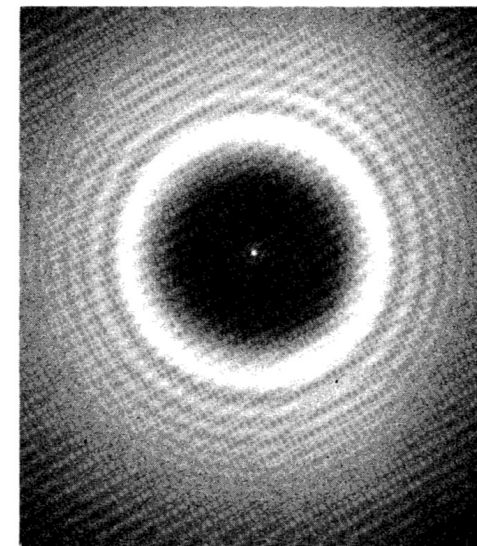
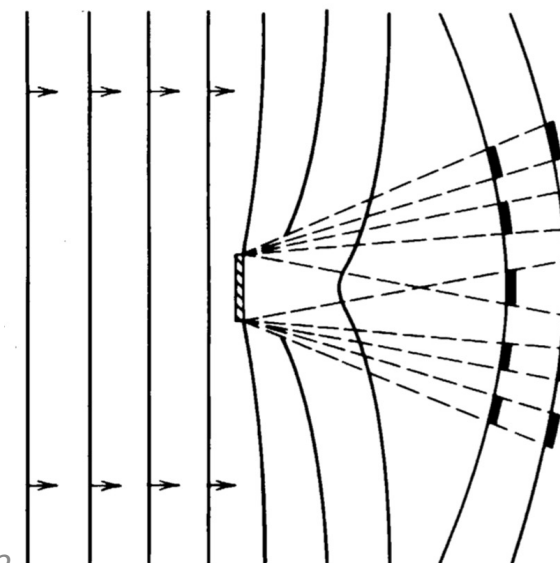
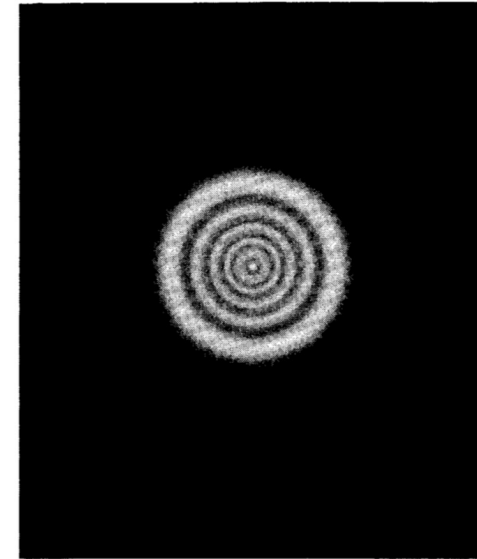
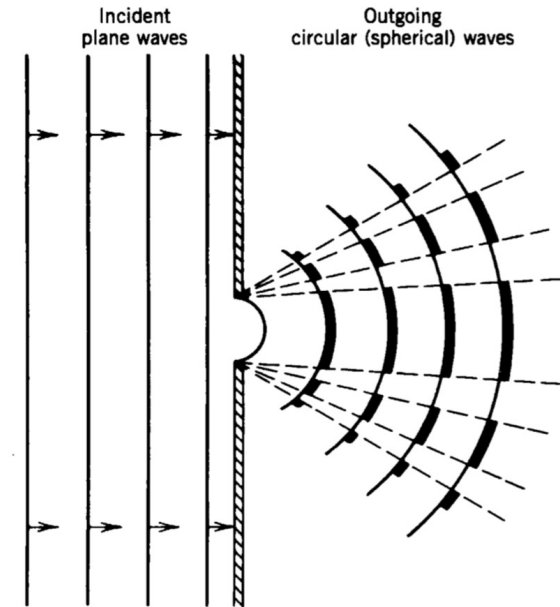
- Nucleo assorbe efficacemente nucleoni incidenti \Rightarrow **analogia con disco opaco**.

Proiettili carichi: concorrenza meccanismi coulombiani%nucleari.

- Per osservare diff. elastica diffrattiva di nucleoni \Rightarrow eliminare effetti coulombiani. Due modi:

1°_ utilizzare proiettili privi di carica come i n , che però sentono forza nucleare.

(Sez. d'urto diff. mostrano minimi sempre > 0 , dato che superficie nucleare non \sim bordo netto, ma è struttura diffusa).

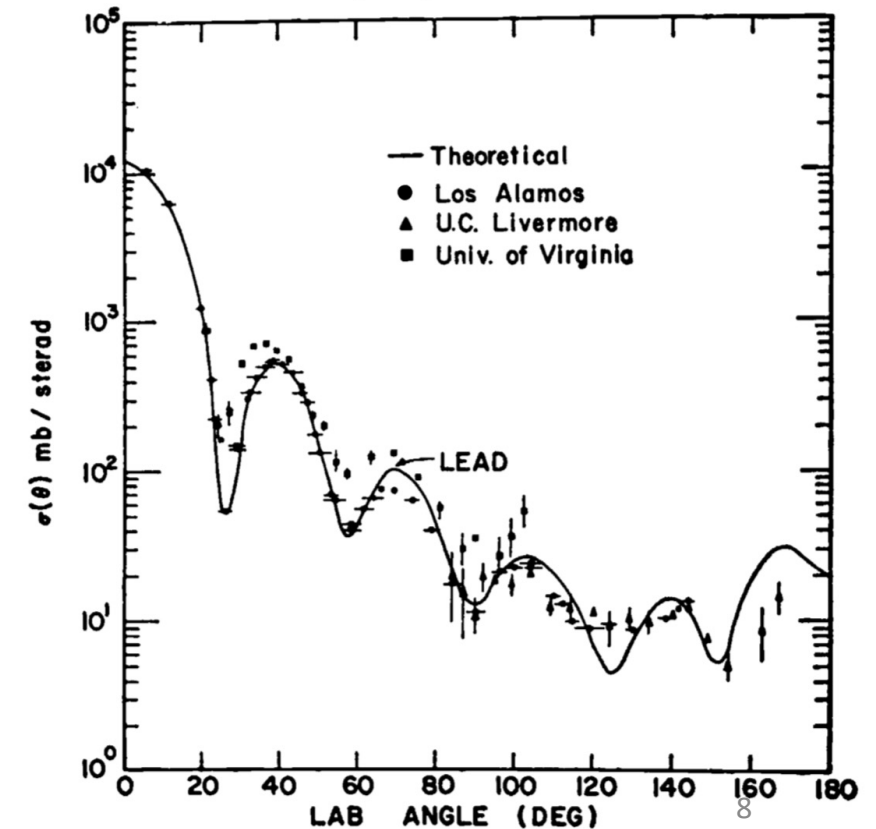
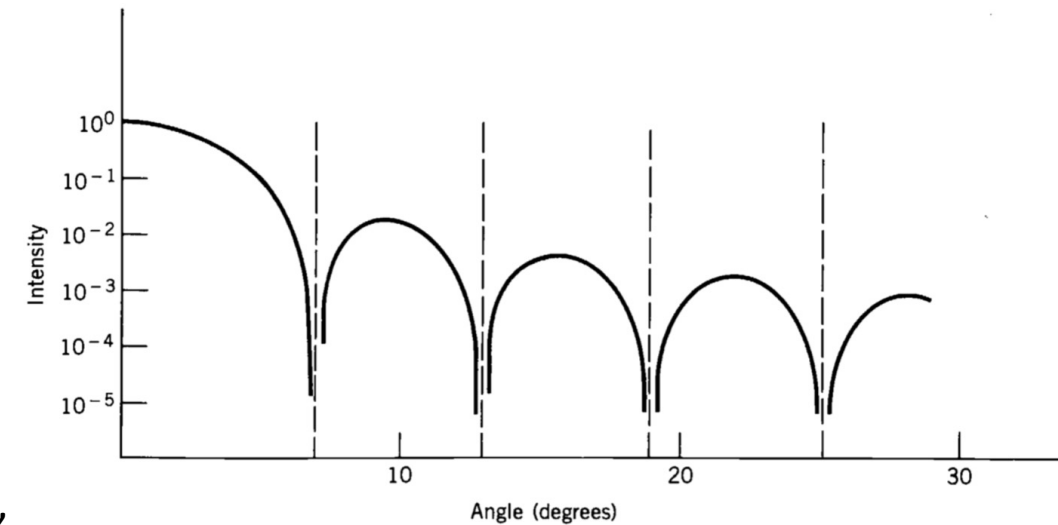


2°_ con proiettili carichi, ridurre effetti coulomb. (due passi successivi)

a) energia suff. a contrastare barriera coulomb. e favorire massimo avvicinamento proiettile-bersaglio;

b) osservare a grandi angoli, dove sezione d'urto coulomb. decresce molto e rapidamente.

- Diff. anelastica coulombiana lascia nucleo, e spesso anche proiettile, eccitati.
- Misura distrib. energia particelle diffuse ad angolo definito mostra singolo picco elastico, alla massima energia, e picchi a energie inferiori corrispondenti a interaz. anelastiche associate a specifici stati eccitati del bersaglio.
- Posizione di ogni picco correlata a energia dello stato eccitato che lo ha generato, e sua popolazione \propto sez. d'urto per reazione d'eccitazione dello stato associato.
- Distrib. angolari particelle diffuse da stati eccitati \leftrightarrow spin-parità degli stessi.



Diffusione in onde parziali

Fascio lungo z , centro diffusore di **massa $\approx \infty$** in $z = 0$. Part. incidenti \Rightarrow **onde piane e^{ikz}** con impulso **$|p| = \hbar k$** , e particelle in uscita **onde sferiche**.

Onda piana incidente: **sovrapp. di onde sferiche**

$$\psi_{inc} = A e^{ikz} = A \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\vartheta) \quad A = \text{cost. normalizz.}$$

$j_l(kr) \rightarrow$ **funz. Bessel**, soluz. parte radiale eq. Schrödinger lontano da bersaglio; $P_l(\cos\vartheta) \rightarrow$ **pol. Legendre**

Sviluppare onde incidente e diffusa in **onde parziali**, ognuna corrispondente a specifico valore di l

\Rightarrow Fattibile se pot. interazione è **centrale**; **utile se si considerano onde d'ordine l basso**.

- **Semiclassicamente**: particella d'impulso **$p = 2\pi\hbar/\lambda$** che interagisce con **parametro d'urto b** , \Rightarrow
 mom. ang. relativo $l\hbar = pb$ da cui: $b = l \frac{\hbar}{p} = l \frac{\lambda}{2\pi} = l\lambda$
- l valori interi \Rightarrow particelle con mom. ang. tra $0\hbar$ e $1\hbar$ interagiscono con parametri d'urto fra $b = 0$ e $b = \lambda$, attraversando area circolare efficace $= \pi\lambda^2$.
 Per $\hbar \leq l \leq 2\hbar$ sez. d'urto è anello circolare di raggio interno λ , esterno 2λ e area $3\pi\lambda^2$.
- Si suddivide area d'interaz. in zone corrispondenti a definito valore di mom. ang. l e area

$$\pi [(l+1)\lambda]^2 - \pi (l\lambda)^2 = (2l+1)\pi\lambda^2$$

Indicati con **1** e **2** proiettile e bersaglio: $b_{max} = R_1 + R_2$. Per max. valore utile di l : $l_{max} = b_{max}/\lambda$, dato breve range interazione, e

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^{R/\lambda} (2\ell + 1) \pi \lambda^2 = \pi (b_{max} + \lambda)^2$$

Lontano da bersaglio Bessel diventa:

$$j_{\ell}(kr) \simeq \frac{\text{sen}(kr - \ell\pi/2)}{kr} \quad \text{per } (kr \gg \ell) \quad , \text{ per cui}$$

$$= \frac{e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)}}{2ikr}$$

$$\psi_{inc} = \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell + 1) \left[e^{-i(kr - \ell\pi/2)} - e^{i(kr - \ell\pi/2)} \right] P_{\ell}(\cos\vartheta)$$

Primo termine in parentesi è **onda sferica entrante** convergente sul bersaglio, secondo **onda sferica uscente**.

La sovrapposizione delle due è un'onda piana.

Per **causalità** diffusione **agisce solo su onda uscente**, modificandone **fase** e/o **ampiezza**.

- Modificazione ampiezza, trascurando energia \Rightarrow nuove particelle, implica riduzione particelle nel canale d'uscita rispetto a canale d'ingresso.

Ma funz. d'onda rappresenta **solo** particelle con impulso $\hbar k$. Diff. anelastica può modificare energia e identità delle particelle uscenti. **Al termine e^{ikr} possono quindi essere associate meno particelle dopo diffusione anelastica.**

Alcuni **canali di reazione** possono essere chiusi, se non ci sono abbastanza **energia e/o momento angolare** disponibili. Se ne tien conto introducendo coeff. **complesso η_l** nelle onde uscenti di ordine **l^{mo}**

$$\psi = \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell + 1) \left[e^{-i(kr - \ell\pi/2)} - \eta_{\ell} e^{i(kr - \ell\pi/2)} \right] P_{\ell}(\cos\vartheta)$$

- **ψ** è sovrapposizione di onde incidenti e diffuse: **$\psi = \psi_{inc} + \psi_{dif}$** , da cui

$$\begin{aligned} \psi_{dif} &= \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell + 1) (1 - \eta_{\ell}) e^{i(kr - \ell\pi/2)} P_{\ell}(\cos\vartheta) \\ &= \frac{A}{2k} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i (1 - \eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\vartheta) \end{aligned}$$

Densità di corrente diffusa:

$$\begin{aligned} j_{dif} &= \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi_{dif}^* \frac{\partial \psi_{dif}}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{dif}^*}{\partial r} \psi_{dif} \right) \\ &= |A|^2 \frac{\hbar}{4mkr^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i (1 - \eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2 \end{aligned}$$

Ma corrente incidente è:

$$j_{inc} = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$$

per cui:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i (1 - \eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2$$

- Integrando pol. Legendre su tutto angolo solido \Rightarrow **sezione d'urto di diffusione**

$$\sigma_{dif} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi \lambda^2 (2\ell + 1) |1 - \eta_{\ell}|^2$$

Interaz. elastiche $\Rightarrow \eta_{\ell} = e^{2i\delta_{\ell}}$, con δ_{ℓ} sfasam.
 onda parziale d'ordine $\ell \Rightarrow |1 - \eta_{\ell}|^2 = 4 \text{sen}^2 \delta_{\ell}$

$$\sigma_{dif} = \sum_{\ell=0}^{\infty} 4\pi \lambda^2 (2\ell + 1) \text{sen}^2 \delta_{\ell}$$

- Sezione d'urto di reazione σ_r** , tien conto di tutti i canali di reazione **tranne l'elastico**.

Rateo riduzione partic. diffuse da canale con n. d'onda k , \propto **(corrente entrante) - (corrente uscente)**

$$|j_{inc}| - |j_{out}| = \frac{|A|^2 \hbar}{4mkr^2} \left[\left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell+1} e^{i\ell\pi/2} P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2 + \right. \\ \left. - \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell+1} \eta_{\ell} e^{i\ell\pi/2} P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2 \right] \quad \text{da cui:}$$

$$\sigma_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi \lambda^2 (2\ell + 1) (1 - |\eta_{\ell}|^2)$$

- La **sezione d'urto totale** che tien conto di tutti i processi è:

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{dif} + \sigma_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} 2\pi \lambda^2 (2\ell + 1) (1 - \text{Re } \eta_{\ell})$$

Osservazioni:

- Diff. elastica può essere la sola presente ($|\eta_l| = 1$), ma assieme a diffusione anelastica c'è sempre anche elastica.
- Se bersaglio \sim disco opaco che assorbe onde parziali fino $l = b_{max}/\lambda$ ($\eta_l = 0 \Rightarrow$ assorb. completo) e non perturba quelle per $l > b_{max}/\lambda$ ($\eta_l = 1$), allora

$$\sigma_{dif} = \pi (b_{max} + \lambda)^2$$

e

$$\sigma_r = \pi (b_{max} + \lambda)^2$$

da cui: $\sigma_{Tot} = 2\pi (b_{max} + \lambda)^2$, ovvero **il doppio della sez. d'urto geometrica** (risultato non classico !)

Modello ottico (1)

Il modello descrive l'interazione usando potenziale complesso:

$$U(r) = V(r) + iW(r)$$

$V(r)$ responsabile della parte elastica dello scattering: assomiglia al potenziale del modello a shell.

Coefficiente $W(r)$ della parte immaginaria responsabile dell'assorbimento.

Esempio semplice (buca quadrata):

$$U(r) = -V_0 - iW_0 \quad r < R$$

$$U(r) = 0 \quad r > R$$

Onda diffusa: e^{ikr}/r , con:

$$k = \sqrt{2m(E + V_0 + iW_0)/\hbar^2}$$

Posto $k = k_r + ik_i$, funz. d'onda uscente $\propto \frac{e^{ik_r r} e^{-k_i r}}{r}$ e densità prob. radiale $\propto e^{-2k_i r}$. Quindi funz. d'onda è attenuata esponenzialmente e si sovrappone al volume del nucleo.

Per un assorbimento ridotto [$W_0 < (E+V_0)$], si può sviluppare k $k \simeq \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}} + \frac{iW_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2(E+V_0)}}$

Distanza cui intensità s'attenua di $1/e$: $d = \frac{1}{2k_i} = \frac{1}{W_0} \sqrt{\frac{\hbar^2(E+V_0)}{2m}}$

Se $d \approx R$ (\sim fm), assumendo per V_0 tipico potenziale di modello a shell (~ 40 MeV), e considerando proiettili con $E_k \approx 10$ MeV $\Rightarrow W_0 \approx 11$ MeV.