

Appendice A

Richiami di Relatività ristretta

Qui di seguito sono richiamati in forma riassuntiva alcuni concetti fondamentali della relatività ristretta necessari alla trattazione di gran parte dei fenomeni che coinvolgono nuclei e particelle.

Si ricordano i postulati fondanti, ovvero che le leggi della fisica sono indipendenti dall'osservatore purchè questo sia solidale con un qualsiasi sistema di riferimento inerziale, e inoltre la velocità c della luce nel vuoto è la massima velocità raggiungibile in natura, è indipendente dal sistema di riferimento inerziale e costituisce una costante universale.

Scelti allora due sistemi di riferimento inerziali S ed S' , cartesiani ortogonali, con le origini O ed O' coincidenti all'istante $t = t' = 0$ ed S' in moto con velocità $v = v_z = \beta c$ rispetto ad S , la relazione fra le coordinate di un qualsiasi evento descritto rispetto a un sistema di riferimento o rispetto all'altro, è data dalle trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta z) \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \gamma(z - \beta ct) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

con $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Le trasformazioni inverse sono:

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta z') \\ x = x' \\ y = y' \\ z = \gamma(z' + \beta ct') \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Le componenti *covarianti* di un quadrivettore x sono indicate da apici in caratteri greci μ, ν , ecc., per cui: x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, e quindi: $x \equiv$

$$(x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z) \equiv (x^0, \mathbf{x}).$$

Le componenti *controvarianti* di un quadrivettore x sono invece indicate da pedici in caratteri greci, per cui: x_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, e quindi: $x \equiv (x_0 = x^0 = ct, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z) \equiv (x_0, -\mathbf{x})$.

Il prodotto scalare di due quadrivettori x ed y è dato, con la solita regola di Einstein di somma sugli indici ripetuti, da

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \quad (\text{A.3})$$

ed è una quantità invariante per le trasformazioni di Lorentz, che equivalgono alla composizione di una *rotazione* e di una *traslazione*; similmente nello spazio tridimensionale il prodotto scalare di due qualsiasi vettori è invariante per rotazioni.

Il segno "−" nel prodotto scalare implica che lo spazio quadrivettoriale non è Euclideo.

Quanto visto ora si può anche esprimere introducendo il tensore metrico $g^{\mu\nu}$ caratterizzato dall'aver i termini diagonali pari a $(1, -1, -1, -1)$ e uguali a 0 tutti i termini fuori dalla diagonale. I termini controvarianti del tensore metrico coincidono con quelli covarianti, cioè $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ e si ha

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{e} \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{A.4})$$

Grazie al tensore metrico il prodotto scalare si può scrivere come

$$x \cdot y = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (\text{A.5})$$

Il prodotto scalare di un quadrivettore per se stesso, $x^\mu x_\mu = x^2$ è anche una quantità Lorentz-invariante.

Nel caso sia $x^2 = x^\mu x_\mu > 0$ il quadrivettore è detto di tipo *tempo*, se invece $x^2 = x^\mu x_\mu = 0$ esso è detto di tipo *luce*, se infine $x^2 = x^\mu x_\mu < 0$ esso è detto di tipo *spazio*.

La trasformazione di Lorentz fra due sistemi di riferimento inerziali si può anche scrivere come

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu \quad (\text{A.6})$$

e l'invarianza del prodotto scalare fra due quadrivettori implica

$$a^\mu_\nu a^\lambda_\mu = \delta^\lambda_\nu \quad (\text{A.7})$$

con δ^λ_ν il simbolo di Kronecker.

Anche il vettore impulso \mathbf{p} e l'energia totale E di una particella definiscono un quadrivettore p , comunemente detto *quadrivettore energia-impulso* o *quadri-impulso*

$$p = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \quad (\text{A.8})$$

Le trasformazioni di Lorentz correlano anche le singole componenti del quadrivettore energia-impulso di una particella fra due diversi sistemi inerziali S ed S' :

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta p_z \right) \\ p'_x = p_x \\ p'_y = p_y \\ p'_z = \gamma \left(p_z - \beta \frac{E}{c} \right) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Similmente a quanto visto per le coordinate, presi due quadrivettori energia-impulso, $p = (p^0, \mathbf{p})$ e $q = (q^0, \mathbf{q})$, di due diversi sistemi fisici, o particelle, il prodotto scalare dei due, $p \cdot q = (p^0 q^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$ è Lorentz-invariante, ed è quindi una costante del moto. Nel caso particolare del prodotto scalare di un quadrivettore energia-impulso per se stesso si ha

$$p \cdot p = p^\mu p_\mu = p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}|^2 = \text{cost.} \quad (\text{A.10})$$

che data l'indipendenza dal particolare sistema di riferimento inerziale, può essere considerato nel sistema a riposo con la particella, da cui $\mathbf{p} = 0$, e correlato con l'energia a riposo $E_0 = mc^2$ della particella

$$p \cdot p = \frac{E_0^2}{c^2} = m^2 c^2 \quad (\text{A.11})$$

con m la massa della particella.

L'impulso e l'energia totale di una particella di massa m , in moto con velocità \mathbf{v} rispetto a un osservatore inerziale sono dati da

$$\begin{cases} \mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = m\gamma\beta c \\ E = m\gamma c^2 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

e ne consegue

$$\beta = \frac{c \mathbf{p}}{E} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{E}{mc^2} \quad (\text{A.13})$$

La più generale relazione fra impulso \vec{p} , energia E e velocità $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ può quindi essere scritta in una forma valida sia per corpi dotati di massa che per corpi di massa nulla, come ad esempio il fotone

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{\beta} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \quad (\text{A.14})$$

Si può anche definire l'energia cinetica E_k di una particella rispetto a un osservatore inerziale, come differenza fra la sua energia E rispetto a tale osservatore e la sua energia a riposo E_0 , indipendente dal particolare sistema di riferimento inerziale

$$E = m\gamma c^2 = E_0 + E_k = mc^2 + E_k \quad (\text{A.15})$$

da cui, ricordando che $E = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}$,

$$E_k = E - mc^2 = mc^2 (\gamma - 1) = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \quad (\text{A.16})$$

e ancora

$$c |\vec{p}| = \sqrt{E_k^2 + 2mc^2 E_k} \quad (\text{A.17})$$

Considerando ora:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}} 2pc^2 = \frac{c^2}{E} p = \frac{p}{m\gamma} \quad (\text{A.18})$$

si ottiene:

$$dE = \frac{p}{m\gamma} dp \implies dE = v dp \quad (\text{A.19})$$

La somma e la differenza fra quadrivettori sono ancora dei quadrivettori, ne consegue che moltiplicando scalarmente per se stesse, o elevando a quadrato, somme o differenze di quadrivettori, si ottengono delle quantità Lorentz-invarianti. Se ad esempio si considerano quattro quadrivettori $q_i = (q_i^0, q_i^1, q_i^2, q_i^3)$ e se ne definisce la somma $q = \sum_i q_i$, anche $q \cdot q = q^2$ è una quantità Lorentz-invariante

$$q^2 = \left(\sum_i q_i^0 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^1 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^2 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^3 \right)^2 \quad (\text{A.20})$$

Se q_i è il vettore energia-impulso di un gruppo di particelle, allora $q \cdot q = q^2$ è connesso al quadrato dell'energia a riposo del sistema fisico costituito da quel gruppo di particelle.

A.1 Coordinate parallele e trasverse

Trattando di decadimenti o di interazioni fra particelle o fra particelle e nuclei, spesso ci si trova nella condizione in cui il sistema fisico e la struttura sperimentale sono meglio descritti se ci si riferisce a una geometria spaziale con simmetria cilindrica, in cui l'asse z di simmetria è parallelo alle velocità delle particelle incidenti o nel caso di decadimenti, è parallelo alla velocità della particella che decadrà, se questa è inizialmente in moto nel sistema di riferimento scelto.

È quindi utile riesprimere le trasformazioni di Lorentz e altri risultati già individuati in funzione di componenti parallele "||" e ortogonali, o trasverse, "⊥" alla direzione della velocità relativa \vec{v} fra due sistemi di riferimento inerziali. La [A.6](#) diventa allora, se le origini dei due sistemi coincidono per

$$t = t' = 0$$

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x_{\parallel}) \\ x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - \beta x^0) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

dove $\beta = |\vec{v}|/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, x_{\parallel} è la componente di x nella direzione di \vec{v} , per cui $\vec{x}_{\parallel} = (\vec{x} \cdot \vec{v}) \vec{v}/v^2$, e $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}$.

In questo caso la trasformazione di Lorentz è definita da tre soli parametri, ovvero le tre componenti di \vec{v} . Se i due sistemi di riferimento fossero anche ruotati uno rispetto all'altro si sarebbe nel caso più generale in cui la trasformazione dipende da sei parametri tre dei quali sarebbero gli angoli di Eulero.

Come già visto precedentemente la trasformazione di Lorentz inversa dal sistema accentato a quello non accentato si ottiene sostituendo nelle [A.21](#) i termini accentati con i non-accantati e cambiando il segno della velocità

$$\begin{cases} x^0 = \gamma(x^{0'} + \beta x'_{\parallel}) \\ x_{\parallel} = \gamma(x'_{\parallel} + \beta x^0) \\ \vec{x}_{\perp} = \vec{x}'_{\perp} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Similmente si ha, per il quadrivettore energia-impulso

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} \equiv p^{0'} = \gamma(p^0 - \beta p_{\parallel}) \\ p'_{\parallel} = \gamma(p_{\parallel} - \beta p^0) \\ \vec{p}'_{\perp} = \vec{p}_{\perp} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Si introducono ora due variabili molto utili per l'analisi dei fenomeni dinamici relativistici. La prima è la *rapidità*, definita come

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \ln \frac{E + cp_{\parallel}}{E - cp_{\parallel}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + cp_{\parallel}/E}{1 - cp_{\parallel}/E} = \operatorname{arctanh} \left(\frac{cp_{\parallel}}{E} \right) = \operatorname{arctanh}(\beta_L) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

e che risulta più appropriata della componente *longitudinale*¹ ($\beta_L = cp_{\parallel}/E$) della velocità, in quanto ha il vantaggio di essere additiva per variazioni longitudinali della velocità. Una particella con rapidità y in un definito sistema inerziale presenta cioè una rapidità pari ad $y + dy$ in un sistema di riferimento che si muove con rapidità dy nella direzione $-z$, rispetto al sistema di riferimento originale, come si può dedurre dalla formula relativistica di addizione delle velocità.

¹Dalla [A.13](#) si ha: $\vec{\beta} = \vec{\beta}_L + \vec{\beta}_{\perp}$.

Nella fisica sperimentale delle particelle e degli ioni a energie relativistiche si utilizza comunemente un'altra grandezza, legata alla rapidità e detta *pseudorapidità*, indicata con η e definita come

$$\eta = -\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (\text{A.25})$$

dove ϑ è l'angolo compreso fra il tri-impulso \vec{p} della particella e la direzione positiva dell'asse del fascio incidente. Solitamente la distribuzione dei prodotti di reazione in funzione dell'angolo polare varia molto e bruscamente in prossimità dei piccoli angoli in avanti e dei grandi angoli all'indietro, riferendosi alla pseudorapidità anzichè all'angolo polare si hanno andamenti più dolci.

La pseudorapidità può essere espressa in funzione del tri-impulso ottenendo

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|\vec{p}| + p_{\parallel}}{|\vec{p}| - p_{\parallel}}\right) = \operatorname{arctgh}\left(\frac{p_{\parallel}}{|\vec{p}|}\right) \quad (\text{A.26})$$

Si osservi che la pseudorapidità η si ottiene dalla rapidità y al limite quando la particella considerata ha un'energia a riposo mc^2 trascurabile rispetto al proprio quadri-impulso p , per cui $E \simeq p$. Si noti che comunque la pseudorapidità dipende esclusivamente dall'angolo polare e non dall'energia della particella. La rapidità permette anche di costruire la variabile Lorentz-invariante

$$\Delta R = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta\varphi)^2} \quad (\text{A.27})$$

che rappresenta la separazione angolare fra gli impulsi di due particelle, con φ l'angolo azimutale.

A.2 Legge relativistica del moto di una particella

La legge relativistica del moto di una particella di massa m si ottiene dalla seconda legge di Newton, ricordando che $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} + m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} \quad (\text{A.28})$$

Sviluppando la derivata si ha

$$m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} = m\frac{d\left[(1-\beta^2)^{-1/2}\right]}{dt}\vec{v} = \frac{m}{2}\frac{\left(2\frac{v}{c^2}a_t\right)}{(1-\beta^2)^{3/2}}\vec{v} = m\gamma^3(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}$$

da cui

$$\vec{F} = m\gamma\vec{a} + m\gamma^3(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta} \quad (\text{A.29})$$

La forza agente risulta quindi la somma di due termini, uno parallelo all'accelerazione e uno parallelo alla velocità. Non si può dunque definire alcuna

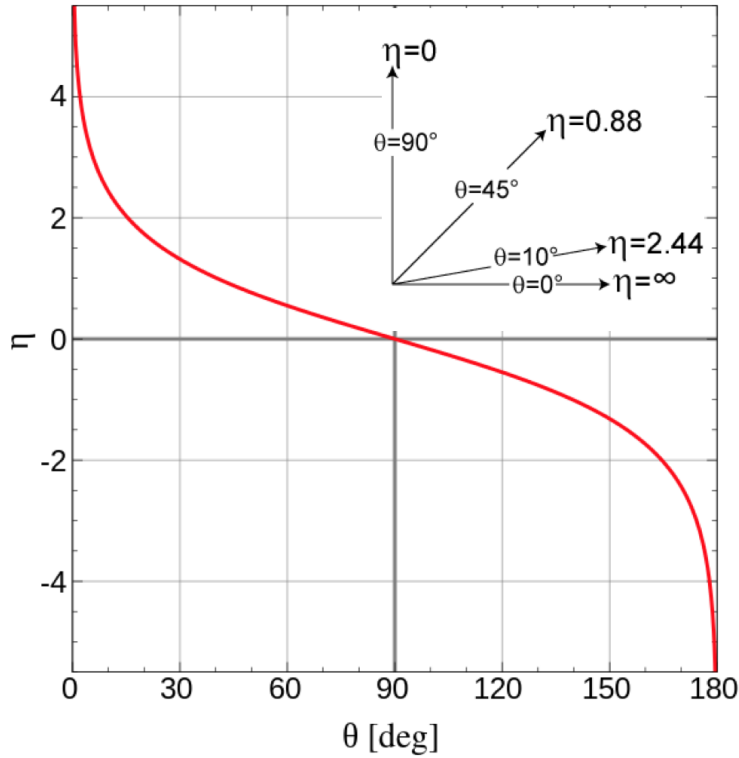


Figura A.1: Pseudorapidità η in funzione dell'angolo polare ϑ .

”massa” come il rapporto tra forza e accelerazione, e ne consegue che ad alte velocità la massa non rappresenta l'inerzia rispetto al moto. Moltiplicando scalarmente entrambi i membri della [A.29](#) per $\vec{\beta}$ si ottiene

$$\vec{F} \cdot \vec{\beta} = m\gamma \vec{a} \cdot \vec{\beta} + m\gamma^2 \beta^2 \vec{a} \cdot \vec{\beta} = m\gamma (1 + \gamma^2 \beta^2) \vec{a} \cdot \vec{\beta} = m\gamma^3 \vec{a} \cdot \vec{\beta}$$

da cui

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{\beta}}{m\gamma^3} \quad (\text{A.30})$$

che sostituita in [A.29](#) dà

$$\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} = m\gamma \vec{a} \quad (\text{A.31})$$

L'accelerazione è quindi anch'essa la somma di due termini, uno parallelo alla forza e uno parallelo alla velocità.

Forza e accelerazione risultano parallele ed equiverse in due soli casi, ovvero quando forza e velocità sono parallele, per cui $\vec{F} = m\gamma^3 \vec{a}$, o quando forza e velocità sono ortogonali, per cui $\vec{F} = m\gamma \vec{a}$. Le costanti di proporzionalità sono diverse nei due casi.

Appendice B

Cinematica relativistica del decadimento in due corpi

I decadimenti nucleari finora studiati coinvolgono spesso strutture *figlie* emesse da un nucleo *genitore* con energie simili o superiori agli equivalenti energetici delle masse delle particelle figlie stesse. Questi casi vanno quindi trattati secondo il corretto approccio relativistico, come del resto sarà necessario con i decadimenti di singole particelle.

Riferendosi ai concetti riportati in Appendice [A](#), si analizza ora il decadimento di una struttura o particella *genitore* in due strutture o particelle *figlie*, ovvero il decadimento in due corpi, che è anche la forma più semplice di reazione.

Si consideri il decadimento di una particella di massa M inizialmente a riposo rispetto a un osservatore inerziale solidale col sistema del laboratorio (SL), che in questo caso coincide con quello del centro di massa (CM), e siano m_1 ed m_2 le masse delle particelle figlie. Il quadri-impulso della particella genitore è quindi $P = (Mc, 0, 0, 0)$, e indicati con $p_1 = (E_1/c, \vec{p}_1)$ e $p_2 = (E_2/c, \vec{p}_2)$ i quadri-impulsi delle particelle figlie, la conservazione del quadri-impulso richiede che sia

$$P = p_1 + p_2 \quad \text{da cui,} \quad \vec{p}_2 = -\vec{p}_1 \quad (\text{B.1})$$

Per cui nel sistema (CM) le due particelle figlie sono emesse lungo la stessa direzione, in versi opposti con impulsi di uguale modulo. Si può dunque omettere il pedice nell'impulso e la conservazione dell'energia assume la forma

$$E_1 + E_2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} = Mc^2 \quad (\text{B.2})$$

Raccogliendo e quadrando una prima volta si ottiene:

$$\begin{aligned} Mc^2 - \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} &= \sqrt{m_2^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \quad \implies \\ M^2 c^4 + (m_1 c^2 - m_2 c^2)(m_1 c^2 + m_2 c^2) &= 2Mc^2 \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \end{aligned}$$

quadrando nuovamente ed estraendo $|\vec{p}|^2$ si ha

$$\begin{aligned}
M^4c^2 + (m_1 - m_2)^2(m_1 + m_2)^2c^2 + 2M^2c^2(m_1 - m_2)(m_1 + m_2) &= \\
= 4M^2(m_1^2c^2 + |\vec{p}|^2) &\implies \\
|\vec{p}|^2 = \frac{M^4c^2 + (m_1 - m_2)^2(m_1 + m_2)^2c^2 - 2M^2m_1^2c^2 - 2M^2m_2^2c^2}{4M^2} = \\
\frac{M^4c^2 + (m_1 - m_2)^2(m_1 + m_2)^2c^2 - M^2(m_1 + m_2)^2c^2 - M^2(m_1 - m_2)^2c^2}{4M^2}
\end{aligned}$$

da cui infine:

$$|\vec{p}| = \frac{\sqrt{[M^2c - (m_1 - m_2)^2c][M^2c - (m_1 + m_2)^2c]}}{2M} \quad (\text{B.3})$$

valida soltanto se

$$M \geq m_1 + m_2 \quad (\text{B.4})$$

che implica la possibilità per una particella di decadere soltanto se la sua massa supera la somma delle masse dei prodotti del decadimento.

Se dunque la massa di una particella supera la somma delle masse di altre due particelle, allora essa sarà instabile e potrà di conseguenza decadere in quelle due particelle figlie, a meno che il decadimento non sia interdetto dal rispetto di qualche altra legge di conservazione quale quella della carica, del momento angolare, ecc. Quella ora espressa è quindi una condizione necessaria, ma non sufficiente, all'avvenire di un particolare decadimento.

Va anche osservato che sia gli impulsi che le energie delle particelle figlie sono fissati dalle loro masse unitamente alla massa della particella genitore. Ciò invece non vale nel caso di decadimento in più di due particelle figlie: in tal caso l'impulso di una particella figlia può assumere qualsiasi valore compreso fra 0 e un certo valore massimo determinato dalle masse delle particelle coinvolte.

Tornando al decadimento in due corpi, le energie delle particelle figlie si ottengono dalla [B.2](#). Quadrando per E_1 ed E_2

$$E_1^2 = m_1^2c^4 + p^2c^2 \quad , \quad E_2^2 = m_2^2c^4 + p^2c^2$$

$$\text{da cui: } E_1^2 - m_1^2c^4 = p^2c^2 = E_2^2 - m_2^2c^4 \implies E_2^2 = E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4$$

$$\text{quindi: } E_2 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4}$$

Inoltre dalla [B.2](#)

$$E_1 + E_2 = Mc^2 \implies E_2 = Mc^2 - E_1$$

$$\text{da cui: } Mc^2 - E_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + m_2^2c^4}$$

$$\text{e quadrando: } M^2c^4 - 2E_1Mc^2 = m_2^2c^4 - m_1^2c^4$$

da cui infine:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2}{2M} \\ E_2 = \frac{M^2 c^2 + m_2^2 c^2 - m_1^2 c^2}{2M} \end{cases} \quad \text{e similmente,} \quad (\text{B.5})$$

Si noti anche che non c'è una direzione preferita per l'emissione della particella figlia, e il decadimento è quindi *isotropo*. Se però si sceglie la direzione di uno qualsiasi dei due prodotti del decadimento, ad esempio tramite il posizionamento di un rivelatore, allora la direzione d'emissione dell'altro risulta fissata dalla conservazione dell'impulso e come detto i prodotti del decadimento si muovono *back-to-back* nel sistema di riferimento del centro di massa del genitore.

Nel caso in cui le due particelle figlie abbiano masse identiche, $m_1 = m_2 = m$, come ad esempio nel decadimento $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, le formule [B.5](#) si semplificano con le energie delle due particelle figlie date da $E_1 = E_2 = Mc^2/2$, e l'impulso espresso da $|\vec{p}| = c\sqrt{M^2 - 4m^2}/2$.

È interessante anche il caso di decadimento in due corpi di una particella genitore *in volo*, ovvero descritta da un osservatore non a riposo con il sistema del suo centro di massa, ma in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso. L'importanza di questo caso è chiara non appena si pensi che è spesso il solo modo di misurare la massa di particelle-genitore neutre, cioè di carica elettrica nulla.

Si scrivano i quadri-impulsi della particella genitore e delle due particelle figlie

$$P = (E/c, 0, 0, p) \quad (\text{B.6})$$

$$p_1 = (E_1/c, \vec{p}_{1\perp}, p_{1z}) \quad , \quad p_2 = (E_2/c, \vec{p}_{2\perp}, p_{2z})$$

nell'ipotesi di aver scelto l'asse z parallelo alla direzione di volo, e quindi alla velocità, della particella madre. La conservazione dell'impulso richiede allora che i vettori bidimensionali degli impulsi trasversi delle due particelle abbiano lo stesso modulo, la stessa direzione e versi opposti:

$$\vec{p}_{1\perp} = -\vec{p}_{2\perp} \equiv \vec{p}_{\perp} \quad (\text{B.7})$$

Le energie e le componenti lungo z degli impulsi delle particelle sono collegate ai valori nel sistema del CM da un *Lorentz boost* con velocità pari a quella della particella madre (vedi Appendice [A](#)). Indicando con un apice ' le variabili cinematiche nel CM, le trasformazioni di Lorentz per le particelle figlie sono

$$\begin{cases} E_1 = \gamma(E'_1 + vp'_{1z}) \\ p_{1z} = \gamma\left(p'_{1z} + \frac{\beta E'_1}{c}\right) \\ \vec{p}_{1\perp} = \vec{p}'_{1\perp} \end{cases} \quad \begin{cases} E_2 = \gamma(E'_2 + vp'_{2z}) \\ p_{2z} = \gamma\left(p'_{2z} + \frac{\beta E'_2}{c}\right) \\ \vec{p}_{2\perp} = \vec{p}'_{2\perp} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

e ricordando le [A.13](#) dell'Appendice [A](#) si ha

$$\beta = \frac{c p}{E} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{E}{M c^2} \quad (\text{B.9})$$

Il problema è così risolto.

Si possono ora in primo luogo calcolare gli angoli che gli impulsi delle due particelle figlie fanno con l'asse z e l'uno rispetto all'altro, in funzione dell'impulso \vec{p} della particella genitore. A tale scopo è interessante affrontare il problema senza l'uso diretto delle trasformazioni di Lorentz, partendo dalla conservazione energia-impulso

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + p_1^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + p_2^2 c^2} \quad (\text{B.10})$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (\text{B.11})$$

Sostituendo nella [B.10](#) p_2^2 con $(\vec{p} - \vec{p}_1)^2$, si ottiene un'equazione che contiene l'impulso incognito p_1 e l'angolo ϑ_1 fra \vec{p}_1 e l'asse z . Risolvere per p_1 è una procedura lunga, anche se diretta, che fornisce

$$p_1 = \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2) c^2 p \cos\vartheta_1 \pm 2E \sqrt{M^2 p'^2 - m_1^2 p^2 \text{sen}^2 \vartheta_1}}{2(M^2 + p^2 \text{sen}^2 \vartheta_1)} \quad (\text{B.12})$$

L'esistenza di valori reali per p_1 richiede che $(M^2 p'^2 - m_1^2 p^2 \text{sen}^2 \vartheta_1) \geq 0$ e questa condizione è soddisfatta per ogni angolo ϑ_1 se $(M p' / m_1 p) > 1$. In questo caso bisogna anche scartare la soluzione che prevede il segno " - " in quanto condurrebbe a valori negativi e privi di significato fisico per p_1 , con $\vartheta_1 > \pi/2$. Se d'altronde $(M p' / m_1 p) < 1$, allora i valori possibili per ϑ_1 sono superiormente limitati in quanto $\text{sen}\vartheta_{1max} = (M p' / m_1 p)$. In questo caso entrambi i segni danno risultati possibili: per ogni valore $\vartheta_1 < \vartheta_{1max}$ si hanno due possibili valori di p_1 e quindi corrispondentemente anche due possibili valori di p_2 .

Per il decadimento in due corpi si può anche dedurre la correlazione tra l'angolo ϑ_1 che la particella figlia 1 fa nel sistema SL con la direzione della velocità della particella genitore, e l'angolo corrispondente ϑ_1^* nel sistema CM, ottenendo

$$\text{tg}\vartheta_1 = \frac{\text{sen}\vartheta_1^*}{\gamma(v/v_1^* + \text{cos}\vartheta_1^*)} \quad (\text{B.13})$$

con v modulo della velocità in SL della particella genitore, e v_1^* modulo in CM della velocità della particella figlia.

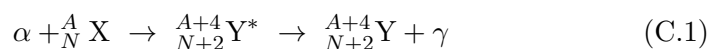
Il passo successivo, la trattazione della dinamica relativistica del decadimento in tre corpi, fornisce risultati utili ad esempio anche quando si vogliono assegnare i corretti numeri quantici di spin, parità, isospin ai mesoni.

Appendice C

La scoperta del neutrone

Nel 1930, W.Bothe ed H.Becker osservarono che se le particelle α emesse dal polonio con energie cinetiche dell'ordine dei 5 MeV¹, vengono fatte incidere su alcuni elementi leggeri quali ${}^9_4\text{Be}$, ${}^{11}_5\text{B}$ o ${}^7_3\text{Li}$, si osservava la produzione di una inusuale radiazione molto penetrante. Il berillio risultava il bersaglio più efficace in quanto, a parità di intensità di particelle α incidenti, forniva i fasci più intensi della nuova radiazione.

Questa non risultava poi sensibile all'azione di campi elettrici e per questo si pensò potesse trattarsi di radiazione γ , secondo uno schema di reazione



ma non si conoscevano radiazioni γ così penetranti, e vi erano inoltre dei dettagli dei risultati sperimentali di difficile interpretazione, supponendo si trattasse di raggi γ .

Due anni dopo I.Joliot-Curie e F.Joliot mostrarono che tale nuova radiazione era in grado di attraversare spessori di materiali pesanti quali il piombo, anche tre volte superiori a quanto potessero fare i raggi γ più energetici emessi dalle sorgenti radioattive note. Ponendo inoltre paraffina o altri bersagli idrogenati sul percorso della radiazione penetrante sconosciuta, questa estraeva da tali bersagli, protoni con energie cinetiche fino a ≈ 5.3 MeV.

Ciò poteva apparire non inconsistente con l'ipotesi di γ incidenti che diano luogo a diffusione Compton, ma le energie richieste a tali γ dovrebbero essere irrealisticamente grandi, dell'ordine di circa 50 MeV, per estrarre dai nuclei protoni con energie cinetiche fino a ≈ 5.3 MeV, ovvero con impulsi fino a ≈ 100 MeV/c. Ettore Majorana congetturò che il tipo di interazione che aveva luogo fra la nuova radiazione e i protoni, richiedeva che la prima fosse costituita da particelle neutre e non da γ .

Sulla scorta dei risultati ottenuti dai coniugi Joliot-Curie, J.Chadwick riprodusse le misure con paraffina e con altri bersagli idrogenati, quindi ricchi di

¹L'isotopo ${}^{208}\text{Po}$, con una vita media di 2.9 anni, emette α da 5.21 MeV; l'isotopo ${}^{209}\text{Po}$, con una vita media di 103 anni, emette α da 4.98 MeV; l'isotopo ${}^{210}\text{Po}$, con una vita media di 138.4 giorni, emette α da 5.41 MeV.

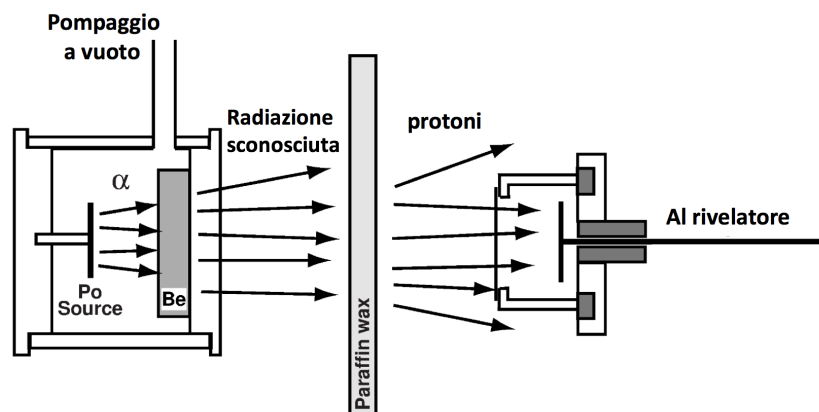


Figura C.1: Schema delle misure dei coniugi Joliot-Curie e di Chadwick.

protoni bersaglio, misurando il range dei protoni prodotti.

Egli osservò che l'ipotesi di avere γ da ≈ 50 MeV contrastava con l'applicazione della conservazione dell'energia alle reazioni coinvolte nelle misure sperimentali



in quanto

$$c^2 \left[M_\alpha + M({}^9_4\text{Be}) - M({}^{13}_6\text{C}) \right] \simeq 3727.4 + 8392.8 - 12109.6 \simeq 11 \text{ MeV} \quad (\text{C.3})$$

mentre invece le conservazioni di energia e impulso risultavano soddisfatte ipotizzando che nella reazione fosse prodotta una particella neutra di massa simile a quella del protone



per cui

$$\begin{aligned} c^2 \left[M_\alpha + M({}^9_4\text{Be}) - M({}^{12}_6\text{C}) - M_n \right] &\simeq \\ &\simeq 3727.4 + 8392.8 - 11175.0 - M_n c^2 \simeq (945.2 - M_n c^2) \text{ MeV} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

da cui si ottiene che se $M_n = M_p$ allora l'energia cinetica massima della particella neutra n prodotta è pari a $\simeq 6$ MeV.

Chadwick provò così che i risultati ottenuti non erano consistenti col fatto che la nuova radiazione fosse costituita da raggi γ , in quanto ciò avrebbe comportato la violazione della conservazione di energia e impulso, mentre erano invece consistenti con l'avvenuta produzione di particelle di massa sostanzialmente equivalente a quella dei protoni, ma elettricamente neutre, come congetturato da Majorana, ovvero i neutroni.

Appendice D

Applicazioni decadimento α

D.0.1 Convertitore termoelettrico a plutonio

Il ^{238}Pu decade α , con un tempo di dimezzamento $T_{1/2} \simeq 88.03$ y, rilasciando un'energia cinetica $E = 5.49$ MeV. Il nucleo figlio ^{234}U ha una vita media $\tau_U \simeq 3.5 \times 10^5$ y. L'energia così prodotta può essere convertita in energia elettrica tramite un generatore radiotermico (RTG) e quello che equipaggia la sonda spaziale Voyager 2 ha un'efficienza del 5.5% in questo processo.

Il Voyager 2, lanciato il 20/08/1977, raggiunse la minima distanza da Saturno il 26/08/1981. Saturno dista dal Sole 9.5 U.A., dove 1 U.A. corrisponde alla distanza fra Terra e Sole.

a) Si calcoli con quanto plutonio era stato equipaggiato l'RTG del Voyager 2 sapendo che questo, al momento di massimo avvicinamento a Saturno, disponeva di una potenza elettrica $W_{Sat} = 395$ W.

b) Quale potenza elettrica aveva ancora disponibile il Voyager 2 quando, il 24/08/1989 sorvolò alla minima distanza Nettuno, che dista 30.1 U.A. dal Sole? Quale potenza elettrica ha ancora disponibile oggi Voyager 2?

c) Sapendo che i pannelli solari che equipaggiavano lo Skylab avevano un'area attiva di 730 m² e gli fornivano 10.5 kW, quale area avrebbero dovuto avere pannelli solari equivalenti che avessero equipaggiato Voyager 2, in grado di alimentarlo come ha fatto l'RTG?

Soluzione:

a) Il tempo di dimezzamento $T_{1/2} \simeq 88.03$ y di ^{238}Pu corrisponde ad una vita media

$$\tau_\alpha = T_{1/2}/\ln 2 \simeq 88.03/0.6931 = 127 \text{ y.}$$

Dato che $\tau_\alpha/\tau_U \simeq 3.6 \times 10^{-4} \ll 1$, si può considerare il nucleo figlio ^{234}U come praticamente stabile e trascurare il contributo dei suoi decadimenti al funzionamento del sistema RTG.

Supponendo che l'RTG sia stato caricato di plutonio al momento del lancio del Voyager 2, si associ ad esso il tempo $t_0 = 0$ giorni, e sia $t_1 = 1467$ giorni

il tempo associato al sorvolo di Saturno da parte del Voyager 2. Si calcoli ora, tenendo conto dell'efficienza del sistema RTG, il numero $\Delta N(t_1)$ di decadimenti al secondo che garantiscono una potenza di 395 Watt, ricordando che $1 \text{ Watt} = 6.2415 \times 10^{12} \text{ MeV/s}$

$$\Delta N(t_1) = \frac{395 \times 6.2415 \times 10^{12}}{5.49 \times 0.055} \simeq 8.1649 \times 10^{15} \quad (\text{D.1})$$

Lo scopo è però risalire alla massa di plutonio con cui è stato caricato il sistema RTG, ovvero al numero N_0 di atomi di plutonio presenti all'istante t_0 . Si esprime quindi $\Delta N(t_1)$ tenendo conto della [4.1](#), con $\lambda = \tau_\alpha$

$$\begin{aligned} \Delta N(t_1) &= N_0 e^{-t_1/\tau_\alpha} - N_0 e^{-(t_1+1)/\tau_\alpha} = N_0 \left(e^{-t_1/\tau_\alpha} - e^{-t_1/\tau_\alpha} e^{-1/\tau_\alpha} \right) = \\ &= N_0 e^{-t_1/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right) \quad \text{da cui,} \\ N_0 &= \Delta N(t_1) e^{t_1/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

e sostituendo i valori

$$N_0 \simeq 3.37524 \times 10^{25}$$

Quindi, essendo pari a 244.06 g la massa molare del plutonio e ricordando il numero di Avogadro, si ha che la quantità di ^{238}Pu con cui è stato inizialmente caricato il dispositivo RTG ammonta a circa 13.7 kg.

b) Per rispondere alla seconda domanda si ponga $t_2 = 4387$ giorni il tempo associato al sorvolo di Nettuno da parte del Voyager 2. Poichè la potenza disponibile grazie al dispositivo RTG è in qualsiasi momento t_i sempre proporzionale ad $N_0 e^{-t_i/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right)$, si ottiene la potenza disponibile al momento del sorvolo di Nettuno come

$$W_{Net} = W_{Sat} \frac{e^{-t_2/\tau_\alpha}}{e^{-t_1/\tau_\alpha}} \simeq 370.9 \text{ W} \quad (\text{D.3})$$

Similmente, la potenza ancora disponibile al 1 marzo 2018, supponendo immutata l'efficienza del dispositivo RTG, ammonta a circa 296 W.

c) Assumendo ragionevolmente che l'energia luminosa irradiata dal Sole scali come l'inverso del quadrato della distanza dal Sole stesso, detta $A_1 = 730 \text{ m}^2$ l'area attiva delle celle fotovoltaiche che fornivano allo Skylab 10.5 kW a una distanza di 1 U.A. dal Sole, l'area che dovrebbero avere celle equivalenti per fornire a Voyager 2 395 W a 9.5 U.A. (Saturno), equivale ad

$$A_2 = 730 \times \frac{395}{10500} \times 9.5^2 \simeq 2478.5 \text{ m}^2$$

L'area necessaria alla distanza di Nettuno sarebbe invece

$$A_3 = 730 \times \frac{370.9}{10500} \times 30.1^2 \simeq 23361.8 \text{ m}^2$$

quindi circa 9.5 volte maggiore e pari a quella di circa 3.3 campi da calcio.

20.3 ALPHA-DECAY APPLICATIONS

Alpha decays from long-lived heavy nuclei have two important characteristics that provide for important applications: they are emitted at a unique energy (in contrast to β decays) and (if the half-life is long enough) the emission rate is virtually constant.

Let's consider, for example, the α decay of ^{238}Pu ($t_{1/2} = 86 \text{ y}$), which is produced from the decay of ^{238}Np following neutron capture by ^{237}Np . The Q value is about 5.6 MeV and the decay rate of 1 g of ^{238}Pu would be

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \lambda N &= \frac{0.693}{t_{1/2}} \cdot \frac{1 \text{ g}}{238 \text{ g/mol}} 6 \times 10^{23} \text{ atoms/mol} \\ &= (2.6 \times 10^{-10} \text{ decays/s})(2.5 \times 10^{21} \text{ atoms/g}) \\ &= 6 \times 10^{11} \text{ decays/s/g} \end{aligned}$$

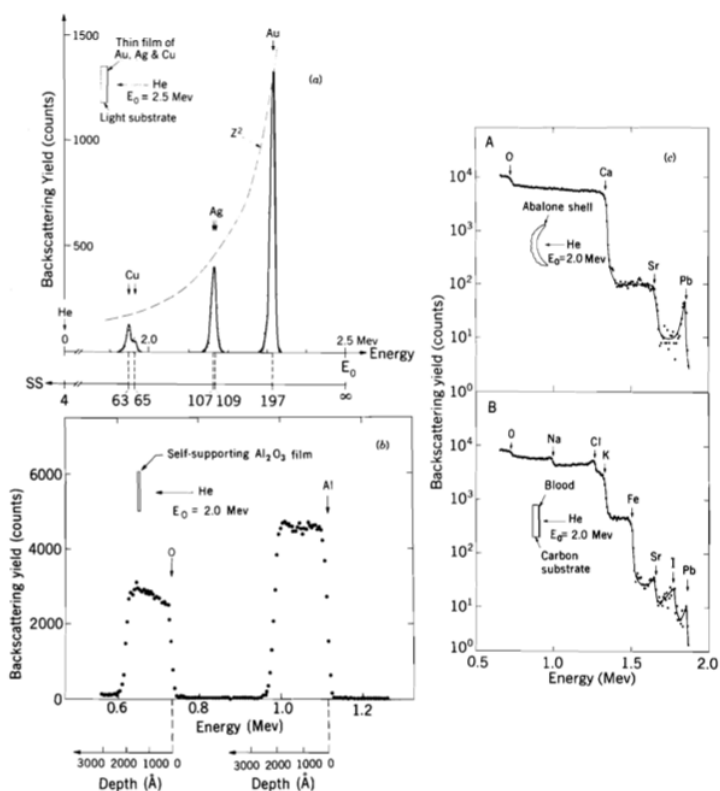


Figure 20.5 (a) Backscattering spectrum of 2.5-MeV α particles from a thin film of copper, silver, and gold. The dashed line shows the Z^2 behavior of the cross section expected from the Rutherford formula. Note the appearance of the two isotopes of copper. (b) In a thicker target, some particles may penetrate and lose energy before backscattering. This broadens the peaks into plateaus, the thickness of which depends on the thickness of the scattering target (about 200 nm in this case). (c) Scattering from complex substances can reveal the elements of which they are made. Figures from M.-A. Nicolet, J. W. Mayer, and I. V. Mitchell, *Science* 177, 841 (1972). Copyright © 1972 by the AAAS.

798 EXTENSIONS AND APPLICATIONS

Each decay releases 5.6 MeV, and the power output is therefore

$$P = \left(6 \times 10^{11} \frac{\text{decays/s}}{\text{g}} \right) \left(\frac{5.6 \times 10^6 \text{ eV}}{\text{decay}} \right) (1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})$$

$$= 0.6 \text{ W/g}$$

Each gram of ^{238}Pu produces a power output of 0.6 W. While this is not exactly enough to heat or light a house, it is quite sufficient to power simple electrical circuits, and it has the enormous advantage that it continues to operate at a constant rate even under very adverse conditions (in the vacuum and extreme cold of space, for example) and needs replacement only over time scales of the order of its half-life. The need for such stable and reliable power sources has resulted in many applications, from cardiac pacemakers to the Voyager spacecraft that photographed Jupiter, Saturn, and Uranus.

In cardiac pacemakers, the α -decay energy is deposited as heat and converted to an electric pulse through a thermoelectric converter. They are capable of producing about 300 μW of electric power, and do so continuously, limited only by the 86-year half-life of ^{238}Pu .

Alpha-particle scattering is important for both qualitative and quantitative analysis. Smoke detectors contain a small quantity of the isotope ^{241}Am ($t_{1/2} = 433 \text{ y}$) whose Q value is 5.6 MeV. Under normal conditions, the α particles ionize air molecules in the detector; the ions travel to electrodes and establish a small steady-state current in the device. The products of combustion include heavy ionized atoms; when these enter the detector, they collide with the ions responsible for the ambient current, and the resulting decrease in current triggers the alarm. The device is activated not by visible particles of smoke (as in the case of the photoelectric type of smoke detector) but instead by the charged ions resulting from combustion.

Quantitative analysis can be done by observing α particles scattered at large angles, called *Rutherford backscattering*. In our discussion of Rutherford scattering in Chapter 11, we assumed the target nucleus to be infinitely heavy, so the α particle emerges with its original incident energy. In actuality, a small energy is transmitted to the struck nucleus, and for backscattered particles ($\theta \approx 180^\circ$), the loss in energy of the α particle is

$$\Delta T = T \left[\frac{4m/M}{(1 + m/M)^2} \right] \quad (20.4)$$

where T is the incident α energy, m is the α -particle mass, and M is the mass of the target. The loss in energy is greatest for light nuclei, but even for heavy nuclei ($m/M \sim 0.02$) the energy loss is of order 0.5 MeV and can easily be detected. Scattering from a target consisting of a variety of isotopes or elements will produce a spectrum of α energies, each corresponding to a unique mass of the struck atom, from which we can infer the composition of the target. The separation between adjacent masses for heavy nuclei is of order 1% or 5 keV, which is somewhat (but not hopelessly) smaller than the resolution of a typical solid-state α -particle detector (20 keV), but for light nuclei, the separations between adjacent elements (and even between different isotopes of a single element) can be easily resolved. Figure 20.5 shows an example of a spectrum of

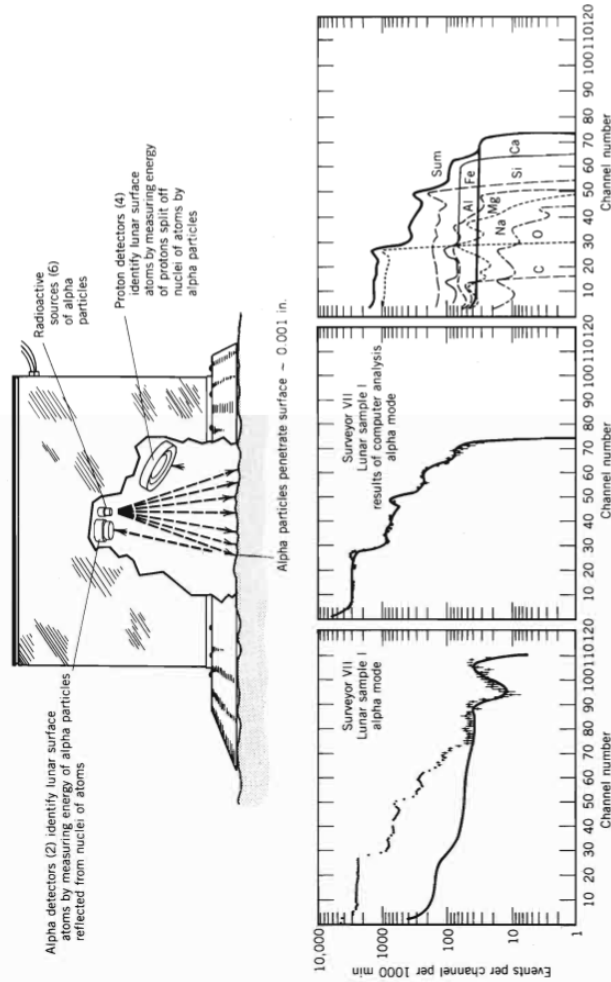


Figure 20.6 (Top) The α -particle scattering experiment from the Surveyor Moon lander. From A. L. Turkevich, Acc. Chem. Res. 6, 81 (1973). (Bottom) Data from the α -scattering experiment on the Moon. The figure at left shows the raw data; the solid line is background from a naturally occurring α -source. At center is shown the data with background subtracted, and at right is the analysis showing the constituents. The composition is dominated by oxygen and silicon, as are Earthly rocks. From J. H. Patterson et al., J. Geophys. Res. 74, 6120 (1969).

800 EXTENSIONS AND APPLICATIONS

backscattered α 's, from which it is possible to deduce the presence of various elements. This technique has been used for analysis of soil samples by the Surveyor spacecraft that landed on the Moon. The Surveyors contained a Rutherford backscattering apparatus including a source of ^{242}Cm , which decays with a half-life of 163 days. Figure 20.6 shows the Surveyor craft and its backscattering experiment.