

# FISICA NUCLEARE

- Reazioni nucleari in regime non relativistico
  - Modello ottico (2)
  - Reazioni con formazione del nucleo composto
  - Reazioni dirette
  - Reazioni di risonanza
- Diff. da pot. Coulombiano
  - Fattore di forma
  - Sez. d'urto di Mott

## Modello ottico

Il modello descrive l'interazione con un potenziale complesso:

$$U(r) = V(r) + iW(r)$$

$V(r)$  responsabile della parte elastica dello scattering: assomiglia al potenziale del modello a shell.

Coefficiente  $W(r)$  è responsabile dell'assorbimento.

Esempio semplice (*buca quadrata*):

$$\begin{aligned} U(r) &= -V_0 - iW_0 & r < R \\ U(r) &= 0 & r > R \end{aligned}$$

Onda diffusa:  $e^{ikr}/r$ , con:

$$k = \sqrt{2m(E + V_0 + iW_0)/\hbar^2}$$

Posto  $k = k_r + ik_i$ , funz. d'onda uscente  $\propto \frac{e^{ik_r r} e^{-k_i r}}{r}$  e densità prob. radiale  $\propto e^{-2k_i r}$ . Quindi funz. d'onda attenuata espon. e si sovrappone al volume del nucleo.

Per un assorbimento ridotto [ $W_0 < (E + V_0)$ ], si può sviluppare  $k$

$$k \simeq \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}} + \frac{iW_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2(E + V_0)}}$$

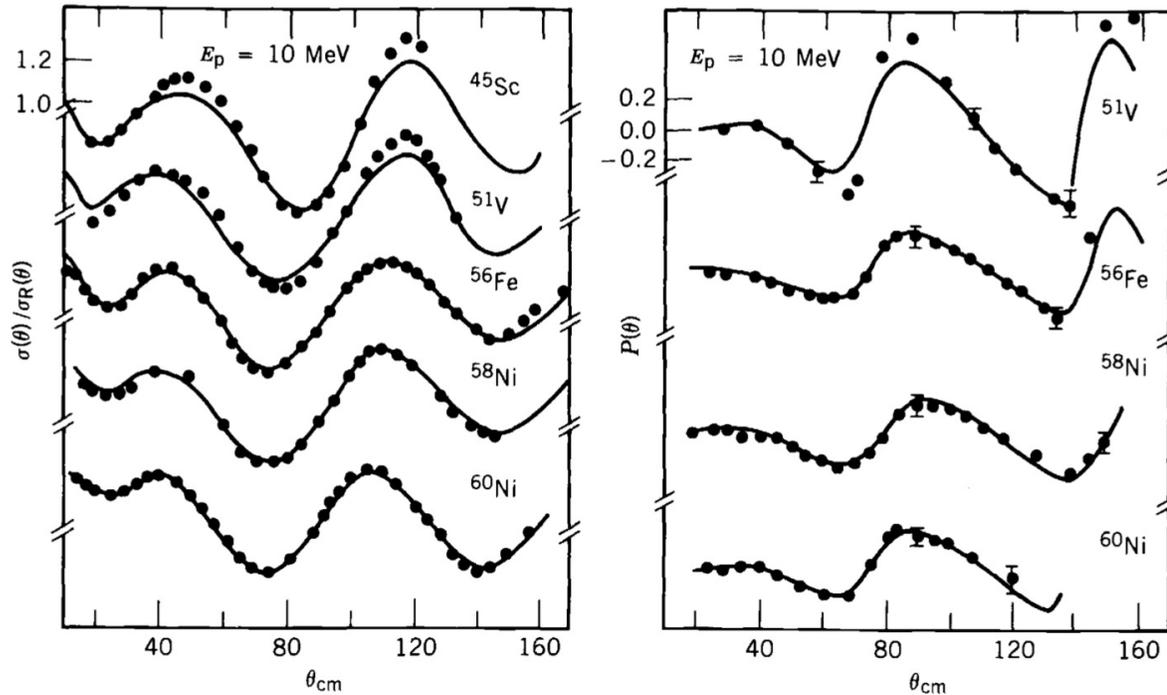
Distanza d'attenuazione  $1/e$ :

$$d = \frac{1}{2k_i} = \frac{1}{W_0} \sqrt{\frac{\hbar^2(E + V_0)}{2m}}$$

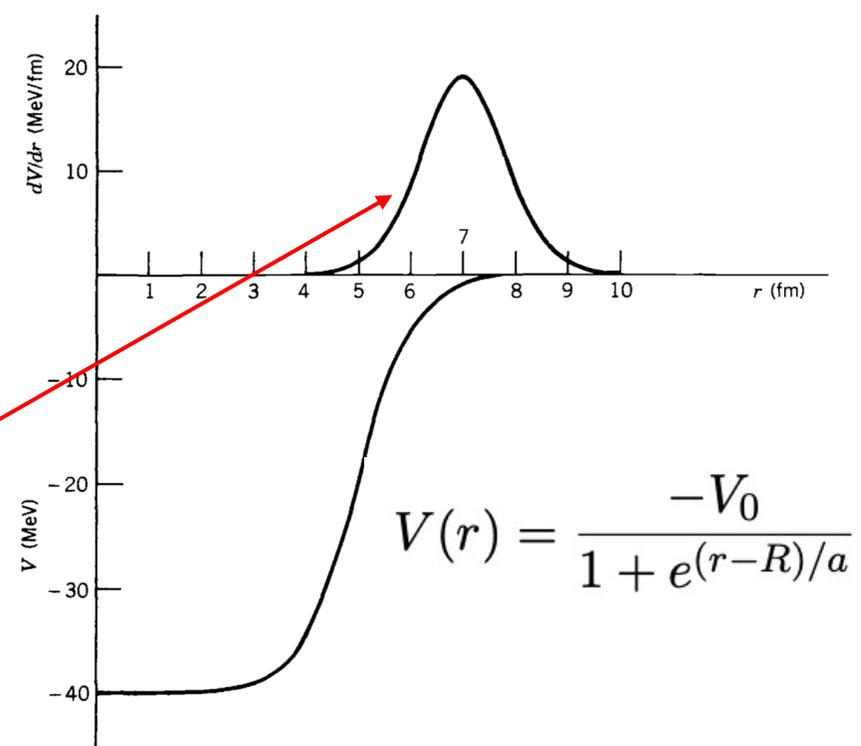
**Tipicamente:**  $d \approx R$  (alcuni fm), con  $V_0$  tipico potenziale di modello a shell ( $\sim 40$  MeV), e considerando proiettili con  $E_k \simeq 10$  MeV  $\Rightarrow W_0 \simeq 11$  MeV  $\Rightarrow$  .....

..... calcolo di modello ottico:

- Si sceglie potenziale (ad es. Saxon Woods)
- assorbimento  $W(r)$  a basse energie: **princ. esclusione**  $\Rightarrow$  nucleoni **più interni** non partecipano assorbimento di nucleoni incidenti. Nucleoni **valenza** possono assorbire, se bassa, energia partic. incidenti.  $W(r)$  scelta  $\propto dV/dr$



Sez. d'urto Coulombiana,  $p$  da 10 MeV su diversi bersagli



- Si include termine **spin-orbita** con valore maggiore alla superficie del nucleo (spin nucleoni più interni tendono a bilanciarsi).
- Se partic. incidente carica si include termine coulomb.
- Si risolve eq. Schrödinger raccordando condizioni contorno per  $r = R$  ottenendo ampiezze complesse

## Limiti del Modello ottico

- Non tiene conto e non descrive caratteristiche legate alla struttura microscopica dei nuclei coinvolti e dell'interazione
- I calcoli non dicono cosa ne sia delle particelle assorbite, ma semplicemente le escludono dal canale elastico
- Modello ottico è però utile nel discutere comportamento medio nei processi di scattering

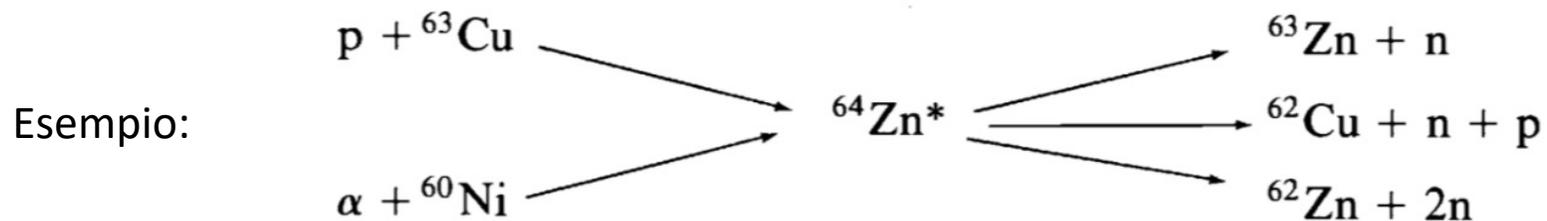
## Reazioni con formazione del nucleo composto

- Proiettile urta con  $b < R \Rightarrow$  alta probabilità interagire con molti nucleoni ripartendo con essi energia e divenendo parte sistema interagente
- Redistribuzione statistica energia proiettile può concentrarsi su un nucleone del sistema formato con energia suff. a estrometterlo  $\sim$  come **evaporazione** molecola da liquido caldo
- Processo ha luogo con formazione **stato intermedio** dopo assorbimento partic. incidente e prima emissione particelle **evaporative**.

Lo stato è detto **nucleo composto**



- Nucleo composto **C\*** può decadere in vari modi con prob. indipendenti da come si è formato, ma dipendenti da sua composizione e dall'energia totale del sistema
- Redistribuzione  $\sim$  termica dell'energia cinetica del proiettile fra nucleoni di **C\***, con conseguente **perdita di memoria** del processo di formazione  $\Rightarrow$  **decadimento governato da processi statistici**



Siano  $A_P$  e  $A_B$  numeri di massa di proiettile e bersaglio:

- $C^*$   $\Rightarrow$  buoni risultati nel descrivere **reazioni a bassa energia** ( $10 \div 20$  MeV), con bassa probabilità che particella incidente sfugga dal sistema prima di essersi **termalizzata** con esso
- Per lo stesso motivo la sua efficacia cresce al crescere di  $A_B$
- Casualità interazioni in formazione di  $C^*$   $\Rightarrow$  con  $A_P < A_B$  emissione isotropa prodotti decadimento: **confermata** sperimentalmente
- Se  $A_P \lesssim A_B$ , mom. ang. trasferito a  $C^*$  può essere grande e distrib. angolare particelle emesse nel decadimento ne risente con preferenza per direzioni  **$\perp$**  a quella del mom. ang. trasferito
- **Analogia evaporativa**  $\Rightarrow$  numero particelle emesse cresce con l'energia e sez. d'urto ha forma  $\sim$  Gauss
- Tempi caratteristici **abbastanza lenti**:  $10^{-16} \div 10^{-18}$  s

## Reazioni dirette

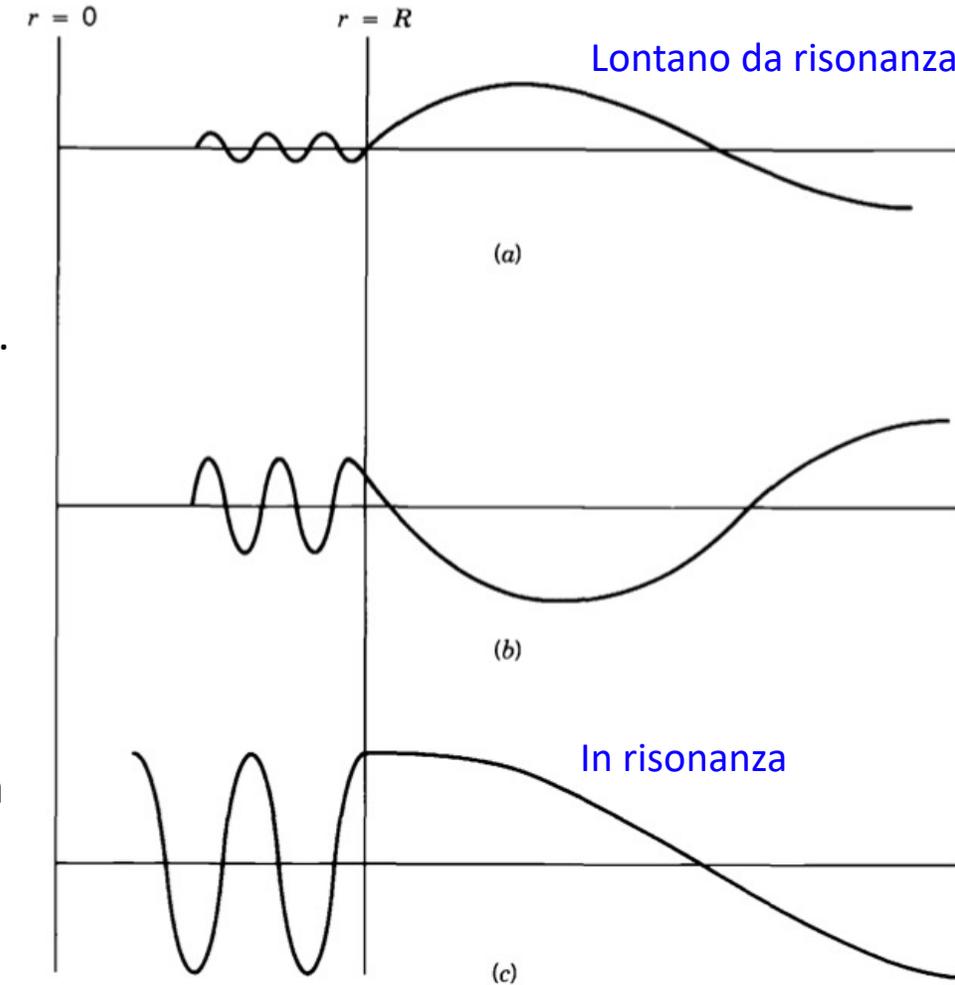
- Nucleone proiettile da **1 MeV** ( $\lambda \simeq 4$  fm)  $\Rightarrow$  non risolve singoli nucleoni del bersaglio e dà **nucleo composto**.  
A **20 MeV**,  $\lambda \simeq 1$  fm  $\Rightarrow$  possibile int. diretta con singolo nucleone del bersaglio: **reazione diretta**.  
**Probabili urti con nucleoni più periferici del bersaglio.**
- Entrambi meccanismi possono contribuire a reazione, importante distinguerli. In **reazioni dirette**:
  - **tempi caratteristici**  $\sim 10^{-22}$  s, 4÷6 ordini di grandezza meno del nucleo composto
  - **distribuzioni angolari** dei prodotti **anisotrope** e caratterizzate da **picchi**
- Reazione anelastica può procedere **in entrambi i modi**, con forte dipendenza da energia proiettile: **stripping**  
deutone  $X(d,n)Y$ , in cui singolo protone è **trasferito** da proiettile a bersaglio
- Alternativamente  $X(d,p)X'$ , più facile per via **diretta** poiché evaporazione **p** da **C\*** inibita da barriera coulombiana
- Reazione  $X(\alpha,n)Y$  **difficile** per via **diretta** poiché richiede trasferimento di ben **3 nucleoni** su shell di valenza di un bersaglio, che è processo poco probabile
- Reazioni di **pickup** (proiettile cattura nucleone al bersaglio) come ad es.  $X(p,d)Y$ , danno informazioni su stati di singola particella

## Reazioni di risonanza

- Nel  $C^*$  stati non legati così numerosi da costituire  $\sim$  spettro continuo. La sovrapposizione fra stati che ne derivate li rende instabili e il sistema ricorda una **struttura calda fluttuante**.
- Stati legati studiati con reazioni dirette sono al contrario stabili per emissione di particelle e con vite medie molto più lunghe (decadimenti  $\gamma$ ). Plausibile trattarli come stati discreti ognuno con sua funzione d'onda.
- Fra i due estremi regione di **risonanza**: livelli discreti con alta probabilità di formarsi e larghezze ridotte solitamente con due soli modi di decadimento: **re-emissione** particella incidente o **emissione  $\gamma$** .  
Sez. d'urto attorno energie caratteristiche dei livelli  $\Rightarrow$  Breit-Wigner.

**Qualitativamente:** particella incidente su pot. a buca quadrata. Fase interna al nucleo dipende da energia partic. incidente e influisce su ampiezza relativa funzione d'onda fra dentro e fuori nucleo.

- (a) particella ha poca probabilità di penetrare nucleo e forma con esso stato quasi legato;  
 (c) alta probabilità di penetrare  $\Rightarrow$  condizione di **risonanza**.



Raccordo funz. d'onda su  
frontiera buca legato a fase

- Se una sola onda parziale  $l$  contribuisce a stato risonante, lo si ha per  $\eta_l = -1 \Rightarrow$  sfasamento  $\delta_l = \pi/2$   
 Forma della risonanza espandendo sfasamento attorno a questo valore.

Convergenza migliora espandendo  $\cot(\delta_l)$  da cui, trascurando termini d'ordine superiore

$$\cot\delta_\ell = -\frac{(E - E_R)}{\Gamma/2} \quad \text{con} \quad \Gamma = 2 \left( \frac{\partial\delta_\ell}{\partial E} \right)_{E=E_R}^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$\sin\delta_\ell = \frac{\Gamma/2}{[(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4]^{1/2}} \quad \text{e infine} \quad \sigma_{sc} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma^2}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

- Considerando spin  $s_a$  ed  $s_X$  di proiettile e bersaglio, e mom. ang. orbitale  $l$ , si sostituisce  $(2l+1)$  con

$$g = \frac{2I + 1}{(2s_a + 1)(2s_X + 1)} \quad \text{essendo} \quad \mathbf{I} = \mathbf{s}_a + \mathbf{s}_Z + \mathbf{l}$$

- Se poi la risonanza può decadere in canali diversi e indipendenti  $\Rightarrow \Gamma = \sum_i \Gamma_i$

$\Gamma^2$  a **denominatore** è connesso a larghezza di decadimento dello stato risonante e quindi a  $\tau = \hbar/\Gamma$ .

$\Gamma^2$  a **numeratore** è invece direttamente connesso a formazione della risonanza e a sua probabilità di decadere in un canale particolare.

Per **scattering elastico**, canale d'ingresso e uscita coincidono,  $\alpha+X \rightarrow \alpha+X$  e si utilizza la stessa larghezza parziale

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} g \frac{(\Gamma_{aX})^2}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

Per una reazione del tipo  $\alpha+X \rightarrow b+Y$  si pone invece

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_{aX}\Gamma_{bY}}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

## Diffusione da potenziale coulombiano

Ricalcoliamo d'urto di Rutherford con **Regola d'oro**.

- Particella **puntiforme** carica  $Z_1 e$ , bersaglio **puntiforme** carica  $Z_2 e$ , trascurando **spin**.
- $[M_{\text{massa bersaglio}}] \gg [E_{k,a}/c^2] \Rightarrow$  si trascura rinculo  $\Rightarrow$  si può utilizzare **tri-impulso** e se  $Z_2 e$  piccolo, ovvero **potenziale non molto intenso**  $\Rightarrow$  **approssimazione di Born**.
- Effetto potenziale a distanza  $\infty$  **trascurabile**  $\Rightarrow$  particelle incidenti  $\approx$  libere nei loro stati iniziale e finale:

(sono autofunzioni impulso  $\sim$  onde piane)

$$\psi_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar} \qquad \psi_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar}$$

$V$  sia abbastanza grande da **confondere stati discreti con  $\approx$  continuo**, e contenga strutture da considerare schermaggio di  $Z_2 e$   $\forall$  particella incidente/deflessa oltre una certa distanza. **Risultato finale non deve dipendere da  $V$**

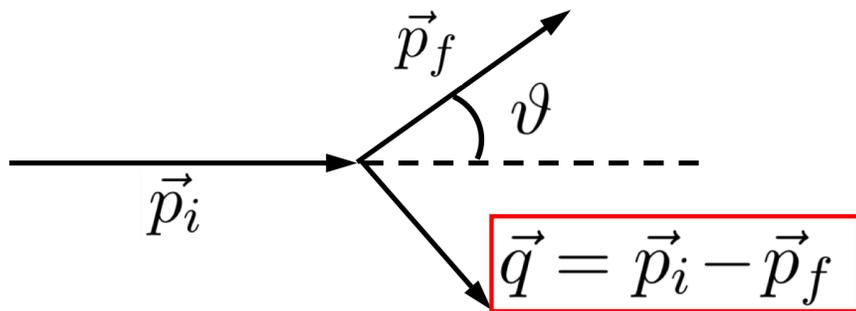
$n_a$  particelle incidenti per unità di volume  $\int_V |\psi_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{r})|^2 dV = n_a V$   $(V = \frac{N_a}{n_a} \propto R^3)$

$N_a \rightarrow$  totalità particelle del fascio che hanno inciso sul bersaglio

**Tasso  $W$**  di interazioni:  $\frac{\sigma v_a}{V} = W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{dn}{dE_f}$   $E_f$ : en. totale (kin. + massa) dello stato finale

Si suppone un **urto elastico**  $\Rightarrow dE_f = dE' = dE$

Trascurare effetto potenziale a grande distanza **implica** conservazione moduli impulsi:  **$|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$**



Densità spazio fasi:  $dn(|\mathbf{p}_f|) = \frac{4\pi |\mathbf{p}_f|^2 V}{(2\pi\hbar)^3} d|\mathbf{p}_f|$

da cui:  $d\sigma \frac{v_a}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{|\mathbf{p}_f|^2 V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d|\mathbf{p}_f|}{dE_f} d\Omega$

Se energia particelle coinvolte alta  $\Rightarrow v_a \simeq c$  e  **$|\mathbf{p}_f| \simeq E_f/c$** , da cui:  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{4\pi^2 c^4 \hbar^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2$

**Hamiltoniano d'interazione**:  $\mathcal{H}_{int} = Z_1 e \cdot \Phi(r)$ , con  $\Phi(r) = \frac{Z_2 e}{4\pi\epsilon_0 r}$  da cui

$$\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \mathcal{M}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{-i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar} e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{r} d_3x =$$

$$= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{r} d_3x = \mathcal{M}(\mathbf{q})$$

con:  **$\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f$**  **impulso trasferito.**

Essendo  $|\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}_i|^2 + |\mathbf{p}_f|^2 - 2|\mathbf{p}_i||\mathbf{p}_f|\cos\vartheta = 2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos\vartheta) = 4|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

**Integrando** :  $\mathcal{M}(\mathbf{q}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} 4\pi \left(\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|}\right)^2 = \frac{Z_1 Z_2 e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 V |\mathbf{q}|^2}$

Da cui :  $\sigma(\vartheta) = \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\mathcal{M}(\mathbf{q})|^2 = \frac{E_f^2}{(2\pi)^2 c^4} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{\epsilon_0^2 |\mathbf{q}|^4}$

$$= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{4E_f^2}{p^4 c^4} \frac{1}{\sin^4\vartheta/2}$$

Nel **limite relativistico** [ $E_f \simeq pc$ ]  $\Rightarrow$   $\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_f}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\vartheta/2}$

In quello **non-relativistico** [ $E_k = p^2/(2m)$  ed  $E_f \simeq mc^2$ ]  $\Rightarrow$   $\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\vartheta/2}$

**uguale al risultato classico!**

## Fattore di Forma

Carica  $Z_2 e$  a simmetria sferica; potenziale  
 congloba carica  $Z_1 e$  di particella incidente:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

**Matrice di transizione** diventa:

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d\mathbf{r} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

(posto:  $\mathbf{D} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ )

$$= \underbrace{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V}}_{(1)} \underbrace{\int \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{D}/\hbar}}{D} d\mathbf{D}}_{(2)} \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'/\hbar} d\mathbf{r}'}_{(3)}$$

(2)  $\Rightarrow 4\pi (\hbar/|\mathbf{q}|)^2$

(3)  $\Rightarrow F(\mathbf{q})$  coincide con **trasformata di Fourier** della distrib. della densità di carica, detta **Fattore di forma** della distribuzione di carica

Sez. d'urto di diffusione coulomb. per una carica estesa è dunque

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4E_f^2}{(pc)^4} \frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\vartheta}{2}} |F(\mathbf{q})|^2$$

- Diversamente da caso classico, sez. d'urto di bersaglio puntif. ed esteso coincidono solo per  $\vartheta = 0$  ( $|\mathbf{q}| = 0$ )

## Sezione d'urto di Mott

Considerando lo **spin**, sez. d'urto per diff. coulombiana di **leptoni** relativistici su nuclei massivi e puntiformi diventa (si trascura rinculo del bersaglio)

$$\frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Ruth}(\vartheta)}{d\Omega} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)$$

con  $\beta = v/c \rightarrow 1$

$$\frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \frac{d\sigma_{Ruth}(\vartheta)}{d\Omega} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$$

- Per velocità crescenti del proiettile la sez. d'urto di Mott cala, con  $\vartheta$ , più rapidamente di quella di Rutherford.

Sez. d'urto  $d\sigma_{Coul}(\vartheta)/d\Omega$  per una carica estesa si scrive quindi :

$$\frac{d\sigma_{Coul}(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} |F(\mathbf{q})|^2$$

**Fattore aggiuntivo rispetto a Rutherford.**

Per capirne il ruolo si può ad esempio considerare la diffusione a  $\pi$  radianti

Con  $\beta \rightarrow 1$ , l'equazione Dirac  $\Rightarrow$  conservazione **elicità**  $H$ :

$$H = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{s}| |\mathbf{p}|}$$

Conservazione  $H \Rightarrow$  proiezione  $s_z$  dovrebbe cambiare segno con l'urto, ma è impossibile con un bersaglio di **spin = 0**, per la conservazione del mom. ang. totale

$\mathbf{L}$  è infatti  $\perp$  a  $z$  e non può quindi determinare alcun cambiamento nella componente  $z$  del mom. ang.

*Per particelle relativistiche, la diffusione a  $\pi$  rad. dovrebbe quindi essere totalmente soppressa*

**Verificato sperimentalmente !**

