

Capitolo 12

Interazioni fra ioni pesanti relativistici

12.1 **Vedi anche Valentina Zacco**

Capitolo 13

Fissione nucleare

I neutroni non interagiscono col campo coulombiano e quindi, contrariamente ai protoni, possono avvicinarsi ai nuclei e penetrare in essi anche se dotati di bassissime energie cinetiche. Possono quindi interagire con i nuclei ed il loro potenziale attrattivo formando stati legati.

Agli inizi degli studi sui nuclei si pensava di sfruttare la cattura di neutroni a bassa energia per produrre nuovi nuclei con più alti valori del numero di massa A .

Nel corso di esperimenti di questo tipo per la formazione di elementi transuranici, si osservava spesso che lo scattering di neutroni termici, ovvero con energie cinetiche dell'ordine di $kT \approx 1/40$ MeV, su nuclei con A dispari, quale ad esempio ^{235}U , non produce nuclei più pesanti ma piuttosto la frammentazione del nucleo genitore in due nuclei figli di massa inferiore. Questa frammentazione del nucleo pesante in due nuclei di media taglia più alcuni frammenti minori è detta *fissione nucleare*. Alcuni nuclei possono fissionare anche spontaneamente. Un tipico esempio di fissione indotta su un nucleo con A dispari è proprio l'assorbimento termico di neutroni su ^{235}U



Lo scattering di neutroni termici su nuclei con A pari, quale ^{238}U , non produce invece frammentazione del genitore. Perché il fenomeno abbia in tal caso luogo è necessario che le energie cinetiche dei neutroni incidenti siano molto superiori, dell'ordine di 2 MeV.

La fissione è una caratteristica dei nuclei di grossa taglia e si può stimare l'energia rilasciata per la fissione di un tale nucleo basandosi sul grafico dell'energia media di legame per nucleone [13.1](#) L'energia media di legame per nucleone è più piccola per nuclei con A molto grande rispetto a nuclei con valori intermedi di A (purchè $A \geq 56$). Il processo di fissione comporta quindi la frammentazione di un nucleo pesante in due nuclei di taglia inferiore ma con maggior energia di legame, e il conseguente rilascio di energia. Se si assume pari a ~ -7.5 MeV l'energia media di legame per nucleone

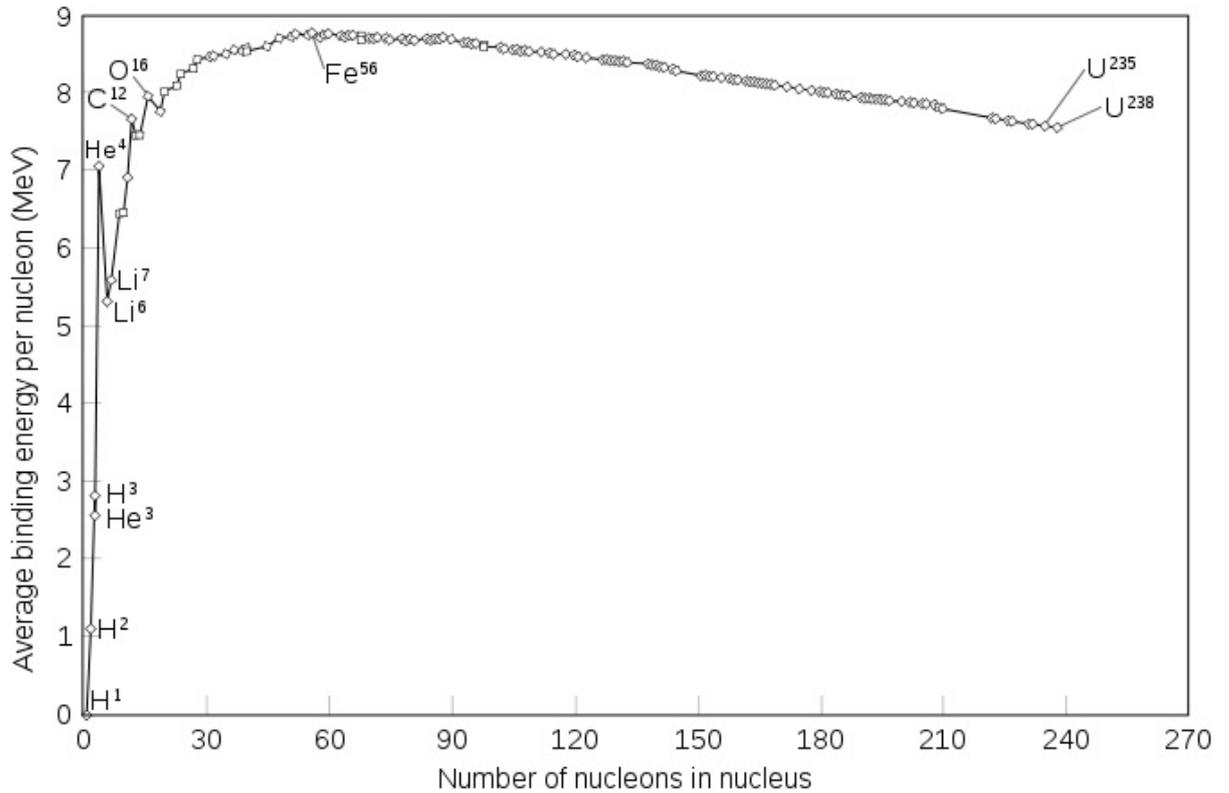


Figura 13.1: Energia media di legame per nucleone $|B/A|$, per la gran parte dei nuclei stabili.

dell' ^{235}U e pari a ~ -8.4 MeV quella dei suoi prodotti di fissione, si stima un rilascio di energia di ~ 0.9 MeV per nucleone, da cui si stima un'energia cinetica totale E_{fisU} , prodotta dalla fissione di un nucleo di ^{235}U poi ripartita fra i prodotti della fissione

$$E_{fisU} \approx (235 \times 0.9) \text{ MeV} = 211.5 \text{ MeV} \quad (13.2)$$

che rappresenta una grande quantità d'energia!

13.1 Teoria elementare della fissione

La fissione nucleare può essere capita sia qualitativamente che quantitativamente sulla base del modello nucleare a goccia di liquido. Questo presuppone che nello stato iniziale e in quello finale i nuclei abbiano forma sferica, anche se per nuclei molto grandi la forma sferica non è necessariamente stabile. Si suppone altresì che una perturbazione esterna, quale quella dovuta ad un neutrone incidente, possa creare onde superficiali che possono determinare modificazioni nella forma della goccia di liquido. Se questa si dilata

allungandosi e la deformazione prodotta è abbastanza grande, la repulsione coulombiana fra le due porzioni elongate della goccia di liquido nucleare può produrre una struttura a due lobi che a sua volta può indurre un'ulteriore repulsione tra essi fino a determinarne la completa separazione, ovvero la fissione della goccia iniziale in due gocce più piccole. Se però la separazione iniziale non è sufficientemente ampia, la goccia deformata può dar luogo ad uno stato eccitato del nucleo composto dalla fusione del neutrone incidente col nucleo genitore di numero di massa A . Questo potrà quindi diseccitarsi, tramite emissione di un fotone, verso uno stato a minore energia del nucleo con numero di massa $(A + 1)$. Quest'ultimo processo consiste nella *cattura radiativa* di un neutrone ed è schematicamente descritto in figura [13.2](#).

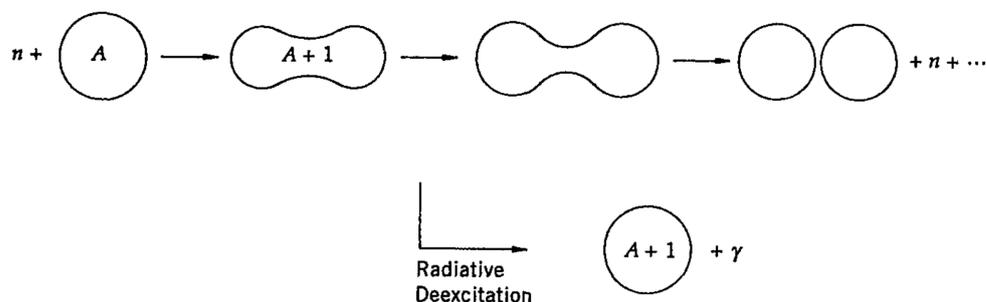


Figura 13.2: L'assorbimento di un neutrone può evolvere sia nel processo di fissione che nella cattura radiativa.

Il modello a goccia di liquido fornisce anche un'eccellente descrizione quantitativa della fissione nucleare. Da esso deriva la formula di Weizsäcker [2.55](#) che parametrizza l'energia di legame dei nuclei. Essa contiene tre termini di derivazione classica che dipendono esplicitamente dalla forma della goccia di liquido nucleare: il termine di volume, quello di superficie e quello coulombiano. Si può procedere ad un semplice calcolo classico per valutare la stabilità di una goccia di liquido in risposta allo stimolo di una perturbazione esterna. Assumendo una goccia sferica di raggio R che sotto uno stimolo esterno si deformi leggermente, a volume costante, verso la forma di un ellissoide (si ricordi che la materia nucleare è considerata come un liquido incompressibile) con semiasse maggiore a e semiasse minore b , si possono esprimere a e b in termini di un piccolo parametro ϵ di deformazione, come mostrato in Appendice [13](#)

$$a = R(1 + \epsilon) \quad , \quad b = \frac{R}{(1 + \epsilon)^{1/2}} \quad (13.3)$$

Questa scelta discende dall'invarianza del volume V della goccia

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi ab^2 \quad (13.4)$$

che assicura anche l'invarianza del termine di volume nella formula di Weizsäcker fra goccia sferica e goccia deformata. Saranno però diversi nei due casi i termini energetici di superficie e coulombiano. Sempre in Appendice [13](#) si vede infatti che supposto piccolo il parametro ϵ di deformazione, e ponendo $Z(Z-1) \simeq Z^2$, si possono riscrivere i due termini come

$$\begin{aligned} B_S(A) = b_S A^{2/3} &\longrightarrow B_S^*(A) = b_S A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2\right) \\ B_C(A, Z) = b_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} &\longrightarrow B_C^*(A, Z) = b_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5} \epsilon^2\right) \end{aligned} \quad (13.5)$$

La deformazione quindi accresce l'energia di superficie mentre riduce quella coulombiana. La stabilità della goccia dipende quindi da come questi due termini competono fra loro. La variazione totale in energia di legame dovuta alla deformazione si può quindi scrivere come

$$\begin{aligned} \Delta B^*(A, Z) &= B_S(A) + B_C(A, Z) - B_S^*(A) - B_C^*(A, Z) = \\ &= \frac{1}{5} \epsilon^2 A^{2/3} \left(2b_S - b_C \frac{Z^2}{A}\right) \end{aligned} \quad (13.6)$$

Se $\Delta B^*(A, Z) > 0$ allora la goccia sferica risulta più fortemente legata e dunque stabile per piccole perturbazioni esterne. Ricordando i valori $b_S \simeq 17.23$ MeV e $b_C \simeq 0.697$ MeV, si trova che $\Delta B^*(A, Z) > 0$ per

$$2b_S - b_C \frac{Z^2}{A} > 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{Z^2}{A} < 49 \quad (13.7)$$

Da questa semplice analisi classica si desume che un nucleo sferico è stabile per piccole perturbazioni esterne solo se $Z^2 < 49A$. Un'analisi corretta tiene conto di correzioni di origine quantistica che però non inficiano sostanzialmente il risultato, ovvero che ci si aspetta che nuclei con $Z^2 > 49A$ siano altamente instabili e soggetti a fissione spontanea.

Per nuclei grandi $Z < A/2$, e quindi essi soddisfano la condizione $Z^2 < 49A$ e dovrebbero mostrare la massima energia di legame assumendo forma sferica. Tuttavia, anche soddisfacendo la condizione $Z^2 < 49A$, può risultare che l'energia di legame di due nuclei figli sia in valore assoluto maggiore di quella del nucleo genitore, nel qual caso il genitore sferico può fissionare trasformandosi in uno stato finale più legato.

Si consideri il semplice esempio di un nucleo genitore che si frammenta in due nuclei figli identici, il che implica che sia A che Z del genitore siano pari. Sempre trascurando i termini di origine quantistica della formula di Weizsäcker e approssimando $Z(Z-1) \simeq Z^2$, si calcoli la differenza fra le energie di legame del nucleo genitore e dei prodotti di fissione quando questi sono supposti essere ormai a distanza infinita l'uno dall'altro.

I termini di volume si cancellano e resta

$$\begin{aligned}
 B(A, Z) - 2 \times B(A/2, Z/2) &\simeq b_S A^{2/3} (1 - 2^{1/3}) + b_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 2^{-2/3}) \\
 &\simeq 0.26 A^{2/3} \left(\frac{Z^2}{A} - 17.2 \right) \text{ MeV}
 \end{aligned}
 \tag{13.8}$$

La condizione che questa differenza in energia di legame sia positiva, per la quale i due frammenti di fissione danno luogo a una configurazione energeticamente più stabile rispetto al nucleo genitore, è dunque soddisfatta per $Z^2 > 17.2 A$. Mettendo assieme quanto ottenuto si individua una regione della tabella dei nuclidi, definita dalla relazione $17.2 A \lesssim Z^2 \lesssim 49.4 A$, in cui benchè la configurazione sferica del nucleo genitore risulti stabile per piccole perturbazioni, comunque la sua fissione in due frammenti uguali è energeticamente favorevole.

Una deformazione di ampiezza sufficiente può dunque condurre il nucleo al limite della scissione e la sua forma è in tal caso compatibile con una configurazione di equilibrio instabile per spostarlo dalla quale anche di una quantità infinitesima, è sufficiente un lavoro infinitesimo d'ordine superiore. Si consideri ora il grafico dell'energia potenziale dei due frammenti di fissione in funzione della distanza fra gli stessi. Quando i due frammenti sono

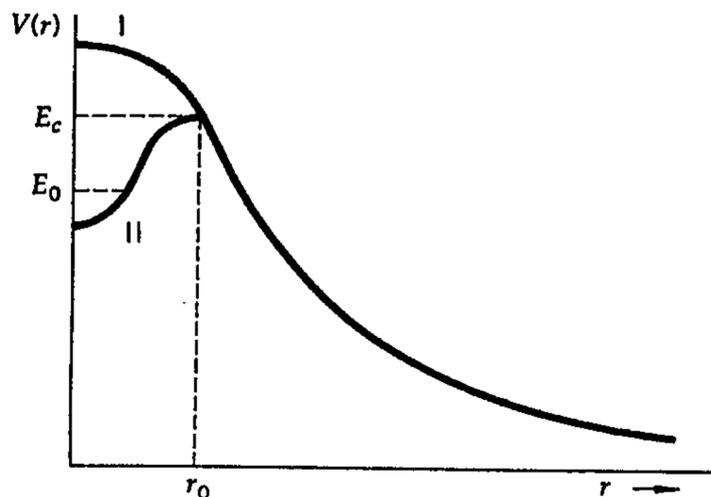


Figura 13.3: Potential energy for the interaction of two medium-size nuclei as a function of their separation distance. The nuclei just touch at $r = r_0$, and coalesce at $r = 0$.

lontani l'uno dall'altro la differenza fra la loro energia potenziale e quella del nucleo genitore è data dalla [13.8](#). Nel caso $A \approx 200$ e $Z \approx 92$ si ottengono ≈ 200 MeV per due frammenti di taglia comparabile. La repulsione coulomb-

biana tra i due frammenti cresce al diminuire della loro mutua distanza. Il potenziale coulombiano raggiunge il suo massimo, pari a ≈ 250 MeV, approssimativamente quando i due frammenti si *toccano*, con una distanza r_g fra i loro baricentri pari circa alla somma dei rispettivi raggi nucleari. Se i frammenti hanno taglia asimmetrica l'energia potenziale può essere inferiore; per frammenti con rapporto (2 : 1) fra i rispettivi valori di Z , la riduzione della barriera coulombiana è dell'11% circa.

Per $r < r_g$ i due nuclei cominciano a fondersi uno nell'altro costituendo una singola struttura nucleare deformata e come discusso precedentemente, ci sono due possibili evoluzioni di questo sistema.

Quando $Z^2 > 49A$, la forma sferica risulta instabile e l'energia decresce quadraticamente con la deformazione ϵ , come da [13.6](#) e illustrato nel ramo-I nel grafico dell'energia potenziale. In questa condizione, un nucleo genitore sferico evolve in due frammenti separati alla più lieve perturbazione, in quanto ciò è energeticamente favorevole per qualunque valore di r . Il nucleo *rotola rapidamente dalla collina di potenziale* e fissiona spontaneamente.

Per $Z^2 < 49A$, il nucleo genitore sferico corrisponde a uno stato legato stabile la cui energia cresce quadraticamente con la deformazione, come mostrato nel ramo-II del grafico dell'energia potenziale. Il nucleo genitore in questo caso si trova nella buca di potenziale a un'energia E_0 maggiore del fondo della buca ma minore del valore E_C della barriera coulombiana. Classicamente

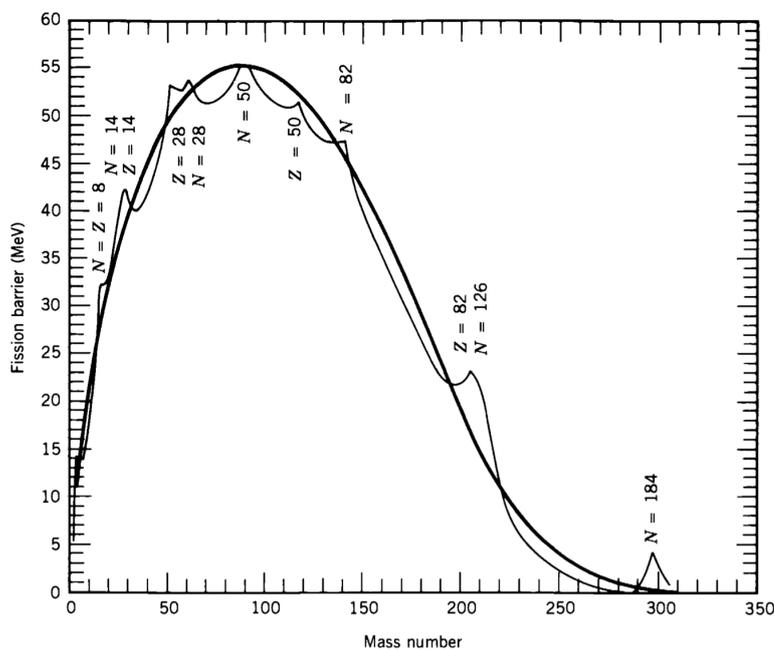


Figura 13.4: Energia d'attivazione in funzione di A . Curva spessa calcolata per isotopi più stabili in base al modello a goccia, l'altra include effetti della struttura a shell.

lo si può considerare sul fondo della buca, quindi, perchè possa dar luogo a fissione, dovrebbe acquisire un ammontare d'energia pari ad $(E_C - E_0)$, detta anche *energia d'attivazione*. Quest'energia, per nuclei con $A \approx 240$, è compresa tra 6 MeV ed 8 MeV. In questo caso il nucleo potrebbe fissionare anche per effetto tunnel, secondo un processo simile a quello del decadimento α . La probabilità, tuttavia, è estremamente bassa, data la notevole massa del frammento che dovrebbe dar luogo ad effetto tunnel, ricordando che il fattore G di Gamow dipende dalla radice quadrata della massa. La vita media associata alla fissione via tunneling è di conseguenza molto lunga. Il processo di fissione nel caso del ramo-I è invece estremamente rapido, a brevissima vita media, essendo sempre energeticamente favorevole.

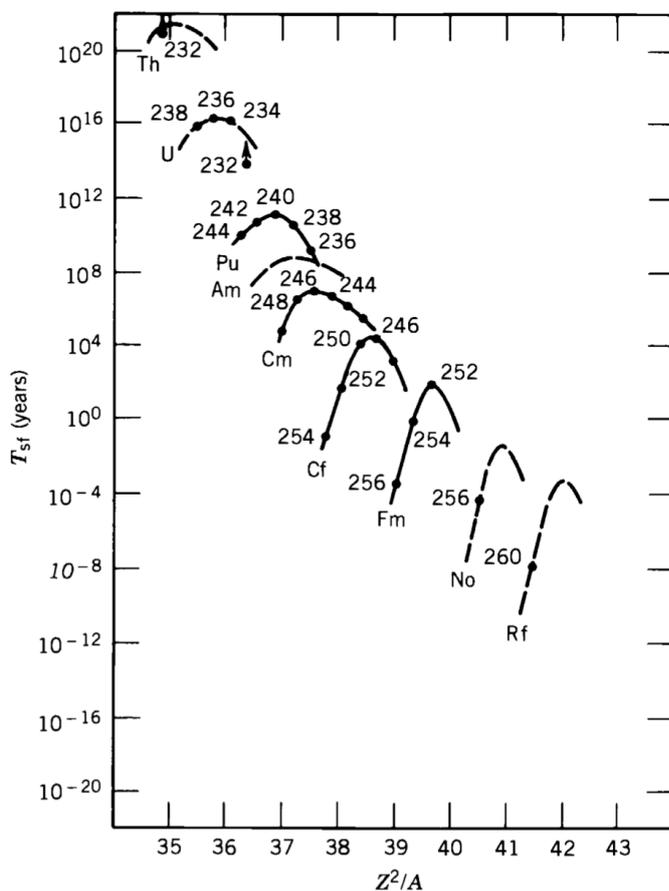


Figura 13.5: Vite medie τ_{fis} per fissione spontanea. Si nota una generale tendenza alla diminuzione di τ_{fis} al crescere di Z^2/A .

Questo approccio basato sul modello a goccia, dovuto a Bohr e Wheeler, ancorchè di concezione classica permette un'ottima comprensione sia della fissione spontanea che di quella indotta. In particolare spiega come i neutro-

ni termici inducano fissione nell' ^{235}U mentre ci vogliono neutroni energetici per fissionare ^{238}U .

Essendo ^{235}U un nucleo pari-dispari e ^{238}U pari-pari, risulta che la differenza in energia di legame fra lo stato fondamentale di ^{235}U e quella dei suoi frammenti è maggiore di quanto non lo sia la corrispondente per ^{238}U . Un ^{235}U catturando un neutrone diventa un nucleo composto pari-pari, quindi più legato, da cui si ha che questo processo rilascia energia: l'energia di legame dell'ultimo neutrone è di -6.5 MeV, sufficienti come energia d'attivazione per la fissione del nucleo composto.

L'energia cinetica del neutrone incidente in questo caso è quindi ininfluenza, e il processo su ^{235}U può essere innescato anche da neutroni termici.

La cattura di un neutrone su ^{238}U lo trasforma invece in un nucleo pari-dispari, con energia di legame dell'ultimo neutrone di soli -4.8 MeV, inferiore in valore assoluto ai 6 MeV richiesti per attivare la fissione. Da qui la necessità, per produrre fissione, che i neutroni incidenti abbiano un'energia cinetica maggiore di 1.2 MeV.

Nell'esempio trattato si sono assunti uguali i due frammenti di fissione, ma in generale i frammenti di fissione sono asimmetrici, in quanto ciò riduce l'effettiva entità della barriera coulombiana. Sperimentalmente si trova che le masse dei frammenti di fissione dell' ^{235}U tendono a raggrupparsi attorno ai valori $A \approx 95$ ed $A \approx 140$, ma non si è trovata una ragione fondamentale per questa particolare asimmetria.

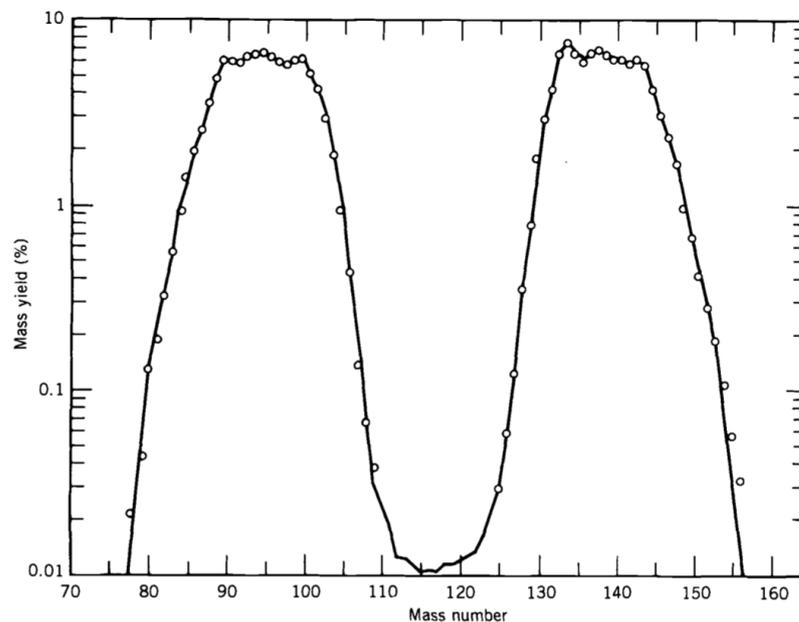


Figura 13.6: Distribuzione in massa dei frammenti di fissione indotta da neutroni termici su ^{235}U .

I frammenti di fissione sono tipicamente isotopi pesanti ed eccitati di nuclei più stabili e raggiungono lo stato fondamentale tramite emissione o *evaporazione* di neutroni, e tramite decadimenti β^- .

13.2 Sezioni d'urto di fissione

In figura 13.8 sono riportate le sezioni d'urto per fissione indotta da neutroni su ^{235}U e ^{238}U . La regione termica mostra la tipica dipendenza da $1/v$ per neutroni di bassissima energia e svariate risonanze nell'intervallo fra 1 eV e 100 eV.

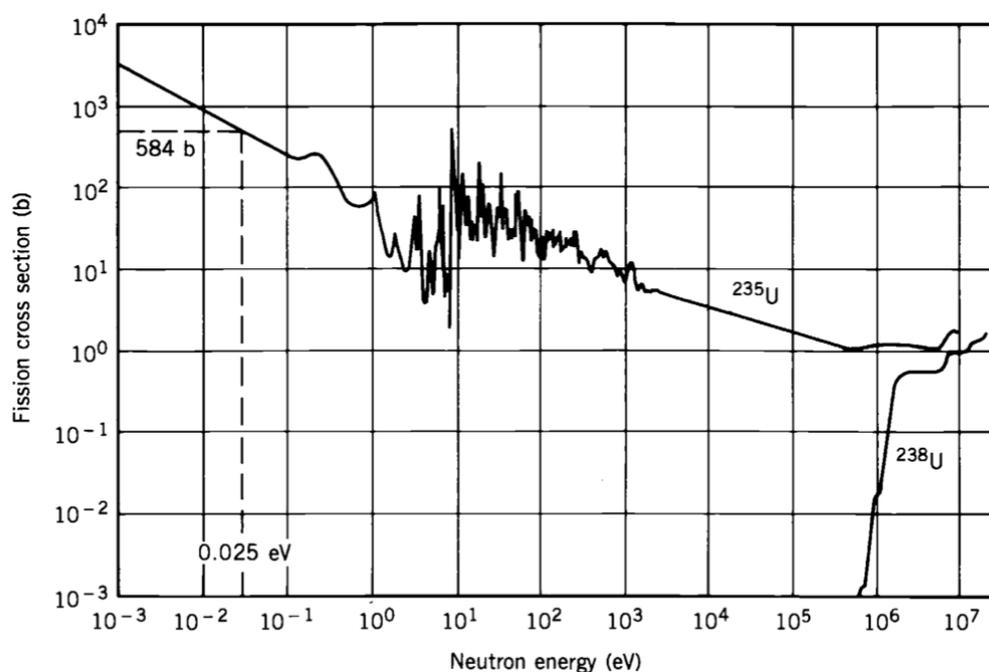


Figura 13.7: Sezioni d'urto per fissione indotta da neutroni su ^{235}U e ^{238}U .

Nell' ^{235}U la sezione d'urto per fissione termica (584 barn) domina su quella di scattering (9 barn) e su quella di cattura radiativa (97 barn). Essa risulta inoltre circa tre ordini di grandezza superiore a quella per neutroni veloci, con energie maggiori del MeV. Se quindi si vogliono utilizzare efficacemente questi ultimi per indurre fissione nell' ^{235}U bisogna prima *moderarli* fino a condurli a energie termiche.

Nell' ^{238}U la sezione d'urto di fissione è invece praticamente nulla nella regione termica e per indurre fissione ci vogliono neutroni veloci, con energie superiori al MeV.

13.3 Reazione a catena controllata

Si consideri una massa infinitamente estesa di uranio naturale (0.72 % ^{235}U , 99.28 % ^{238}U). Una singola fissione produce in media 2.5 neutroni, ognuno dei quali può stimolare un'ulteriore fissione, e così via. Questo processo è detto *reazione a catena*, e ogni fissione libera circa 200 MeV sotto forma di energia cinetica dei frammenti e radiazione.

Si definisce un *fattore di moltiplicazione* k_∞ , valido nel caso di un mezzo infinitamente esteso, per il quale quindi si trascurano eventuali perdite di neutroni attraverso la superficie, che dà la frazione di variazione di neutroni termici fra una generazione e la successiva, ovvero il numero medio di nuovi neutroni termici prodotti da ogni neutrone termico.

Perché la reazione a catena non si *spenga* bisogna che $k_\infty \geq 1$. I 2.5 neutroni prodotti in media da ogni fissione sono però *neutroni veloci*, per i quali la sezione d'urto di fissione è piccola. Per favorire la reazione a catena risulta quindi vantaggioso moderare questi neutroni fino a velocità termiche, per le quali la sezione d'urto, in regime $\sim 1/v$, vale circa 580 barn.

Molti dei neutroni prodotti nei processi di fissione possono comunque essere assorbiti o distolti dalla reazione a catena, per cui dei 2.5 neutroni in media prodotti per ogni fissione, è facile che ne resti disponibile meno di 1 termico, determinando a questo punto l'interruzione della reazione a catena.

Un possibile materiale moderatore è il carbonio, sotto forma di mattoni di grafite. Il moderatore più efficiente sarebbe quello costituito dai nuclei più leggeri, ovvero l'idrogeno, ma il carbonio è comunque una ragionevole scelta per la facilità di disporne, in forma solida e sagomabile, per il relativamente basso costo e per la densità alta con cui se ne può diporre.

Un reticolo di blocchi di uranio alternati a grafite può costituire una pila a reazione a catena, come il primo prototipo realizzato da Fermi e collaboratori a Chicago nel 1942. Se il fattore di moltiplicazione k per una pila di volume finito è esattamente pari ad 1, la pila è in condizione *critica*, in condizione *sottocritica* se $k < 1$, e *supercritica* se $k > 1$. La condizione di criticità è quella che garantisce un rilascio d'energia costante.

Per calcolare k_∞ bisogna seguire l'evoluzione d'un insieme di neutroni termici da una generazione all'altra. Si supponga di avere N neutroni termici in una certa generazione e sia ν il numero medio di neutroni veloci prodotti da ogni fissione. Una frazione di questi sono assorbiti da processi quali reazioni (n, γ) sia nell' ^{235}U che nell' ^{238}U .

Sia η il numero medio di neutroni utili alla fissione prodotto da ogni neutrone termico, con $\eta < \nu$. Dette σ_f e σ_a le sezioni d'urto rispettivamente di fissione e per altri processi d'assorbimento di neutroni termici, allora la probabilità che un neutrone produca fissione è

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_a}, \quad \text{da cui} \quad \eta = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_a} \quad (13.9)$$

Per l' ^{235}U si ha $\sigma_f = 584$ barn e $\sigma_a = 97$ barn, da cui $\eta = 2.08$ neutroni veloci prodotti per ogni neutrone termico. L' ^{238}U non è fissionabile da neutroni termici, per cui $\sigma_f = 0$, mentre $\sigma_a = 2.75$ barn. Per la miscela naturale di ^{235}U e ^{238}U le sezioni d'urto efficaci di fissione e assorbimento sono

$$\sigma_f = \frac{0.72}{100}\sigma_f(235) + \frac{99.28}{100}\sigma_f(238) = 4.20 \text{ barn}$$

$$\sigma_a = \frac{0.72}{100}\sigma_a(235) + \frac{99.28}{100}\sigma_a(238) = 3.43 \text{ barn}$$

e di conseguenza $\eta = 1.33$. È un valore già molto prossimo ad 1 e quindi resta da cercare di ridurre al minimo altri modi in cui neutroni possono essere persi, per ottenere un reattore critico. Arricchendo l'uranio al 3% di ^{235}U si porta a 1.84 il valore di η . Ciò permette di tollerare perdite di neutroni anche sensibili, pur mantenendo le condizioni critiche.

A questo punto parte degli N neutroni termici sono stati assorbiti e i rimanenti hanno prodotto fissione, da cui si hanno ηN neutroni veloci che per contribuire al mantenimento della criticità vanno termalizzati. Mentre questi neutroni veloci si muovono entro il volume della pila, possono incontrare un nucleo di ^{238}U che ha una relativamente piccola sezione d'urto di fissione da neutroni veloci, di circa 1 barn. Questo genera una piccola crescita del numero di neutroni, di cui si tien conto introducendo un fattore ϵ , detto fattore di fissione veloce, per cui il numero di neutroni veloci diventa $\eta\epsilon N$. Per l'uranio naturale $\epsilon \simeq 1.03$.

Si attua la moderazione mescolando opportunamente materiale moderatore leggero, come ad esempio grafite, col combustibile del reattore. Da quanto riportato in tabella [8.2](#), per termalizzare neutroni di 1 MeV servono circa 100 collisioni con nuclei di carbonio. Durante il processo essi attraversano la regione $10 \div 100$ eV, dove ^{238}U mostra molte risonanze nella sezione d'urto di cattura neutronica, con valori dell'ordine di 10^3 barn, superiore a quello di fissione per ^{235}U . Per garantire l'ottenimento di un adeguato numero di neutroni termici bisogna quindi trovare il modo di impedire la cattura di risonanza dei neutroni su ^{238}U . Se l'uranio e la grafite fossero intimamente mescolati, come due polveri, sarebbe sostanzialmente impossibile evitare la cattura risonante dei neutroni su ^{238}U , in quanto il numero di urti moderatori sul carbonio di un neutrone sarebbe ridotto, prima che questo possa incontrare un nucleo di ^{238}U . È quindi sufficiente interporre il carbonio moderatore nel combustibile sotto forma di blocchi di dimensioni tali da garantire che in essi, un neutrone veloce possa sostanzialmente termalizzarsi a energie inferiori a quelle comprese nella zona di cattura risonante in ^{238}U . La distanza media che un neutrone da fissione deve percorrere in grafite per termalizzarsi è di circa 19 cm, per cui una pila che possa minimizzare

la perdita di neutroni per cattura risonante su ^{238}U richiede una matrice di elementi di combustibile uranio alternati a mattoncini di grafite di $\simeq 19$ cm di lato. Vi sarà comunque sempre una frazione residua di neutroni che subiscono cattura risonante su ^{238}U e se ne tiene conto introducendo il fattore p detto *probabilità di perdita per cattura risonante*, per cui il numero di neutroni residui, dopo la termalizzazione, diventa: $\eta\epsilon pN$. Tipicamente $p \approx 0.9$.

Un neutrone termalizzato dovrebbe poter quindi immediatamente rientrare a contatto con l'uranio combustibile, ma inesorabilmente alcuni neutroni non riescono a fuoriuscire dai blocchi di grafite moderatrice e ne vengono catturati. A queste catture contribuiscono anche materiali strutturali della pila stessa, come quelli per l'incapsulamento degli elementi di combustibile. Una ragione che porta alla scelta del carbonio come moderatore è la sua bassissima sezione d'urto di cattura termica per neutroni, pari a circa 0.0034 barn. Per tener conto della cattura residua comunque presente si introduce il *fattore di utilizzazione termica* f , che rappresenta la frazione di neutroni termici disponibili all'interazione con ^{235}U e ^{238}U . Anche f ha valori tipici dell'ordine di $\simeq 0.9$.

Il numero di neutroni che in definitiva sopravvive alla cattura del moderatore e degli altri materiali non fissili presenti è dato da $\eta\epsilon p f N$, e la criticità del reattore dipende dal suo confronto con N . Il fattore di moltiplicazione k_∞ è quindi dato da

$$k_\infty = \eta\epsilon p f \quad (13.10)$$

detta *formula dei quattro fattori*.

Nella progettazione di un reattore si cerca un compromesso per ottimizzare i tre fattori legati alla geometria della struttura, ϵ , p ed f . Blocchi troppo grandi di combustibile tendono a ridurre p , dato che l'assorbimento risonante ha luogo prevalentemente nella loro zona superficiale. Ciò fa sì che il volume interno dell'elemento di combustibile praticamente non veda neutroni catturabili in forma risonante. Quindi maggiori sono le dimensioni dell'elemento combustibile, più efficace è la sua superficie nello schermare la parte interna dell'uranio dall'assorbimento dei neutroni. Se però l'elemento combustibile fosse troppo grande lo stesso effetto si manifesterebbe anche per i neutroni termici utili alla fissione, che produrrebbero fissione prevalentemente nello strato superficiale dell'elemento combustibile, interessando meno la parte più interna dell'elemento combustibile.

La formula dei quattro fattori dà, per un pila di dimensioni infinite con moderatore a grafite, $k_\infty = 1.11$. In una pila reale, di dimensioni finite, bisogna considerare la frazione di perdita di neutroni, sia veloci che termici, dalla superficie esterna del suo volume. Si introducono allo scopo due fattori, ℓ_f e ℓ_t per tenerne conto e li si ingloba nella formula per la valutazione del fattore di moltiplicazione che diventa

$$k = \eta\epsilon p f (1 - \ell_f) (1 - \ell_t) \quad (13.11)$$

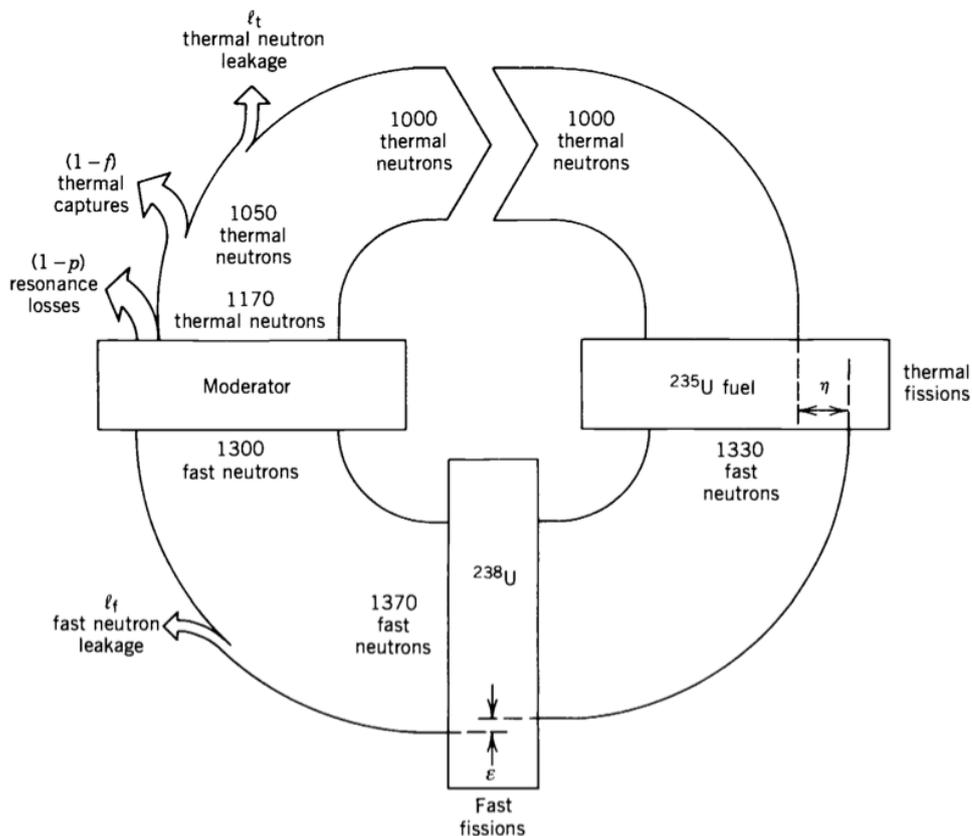


Figura 13.8: Rappresentazione dei processi in atto durante una singola generazione di neutroni. Il ciclo considera k esattamente uguale ad 1.000

Al crescere delle dimensioni del reattore diminuisce il rapporto fra la sua area esterna ed il suo volume, e quindi il numero di neutroni che sfuggono. Se ℓ_f ed ℓ_t sono piccoli allora $k_\infty - k \approx k(\ell_f - \ell_t)$. La perdita totale $(\ell_f - \ell_t)$ desce dunque al crescere dell'area esterna. La perdita di neutroni inoltre cresce con la distanza che un neutrone può coprire prima di essere assorbito, detta *lunghezza di migrazione* M , che dipende da due contributi: la lunghezza di diffusione L_d per neutroni termici, e la lunghezza di rallentamento L_s , necessaria a un neutrone veloce per raggiungere energie termiche

$$M = (L_d^2 + L_s^2)^{1/2} \quad (13.12)$$

Per la grafite si ha $L_s = 18.7$ cm ed $L_d = 50.8$ cm.

Supponendo un reattore di forma sferica e raggio R è ragionevole supporre che $(k_\infty - k) \propto R^{-2}$ e che $(k_\infty - k)$ dipenda da M . Se quindi questi sono i

soli parametri coinvolti, un ragionamento dimensionale dà

$$k_{\infty} - k \propto \frac{M^2}{R^2} \quad (13.13)$$

da cui un valore critico R_c per il raggio legato alla criticità $k = 1$

$$R_c \propto \frac{M}{\sqrt{k_{\infty} - 1}} \quad (13.14)$$

La costante di proporzionalità che rende la precedente un'uguaglianza dipende dalla geometria e per una forma sferica vale π .

$$R_c = \frac{\pi M}{\sqrt{k_{\infty} - 1}} \quad (13.15)$$

La stima per un reattore a uranio naturale moderato a grafite dá $R_c = 5$ m. La dimensione può essere ridotta, mantenendo le condizioni di criticità, se si circonda la pila del reattore con del materiale che *rifletta* all'interno della pila i neutroni che vogliono uscirne.

Si vedano ora i tempi caratteristici coinvolti nel processo di moltiplicazione neutronica. La costante di tempo τ che caratterizza i neutroni in un reattore comprende il tempo necessario a moderarli, dell'ordine di 10^{-6} s, e quello associato alla diffusione a energie termiche prima dell'assorbimento, dell'ordine di 10^{-3} s. Supponendo di avere N neutroni al tempo t , ce ne saranno mediamente kN al tempo $t + \tau$, k^2N al tempo $t + 2\tau$, e così via. L'accrescimento dN del loro numero in un intervallo di tempo dt è

$$dN = (kN - N) \frac{dt}{\tau}, \quad \text{da cui} \quad N(t) = N_0 e^{(k-1)t/\tau} \quad (13.16)$$

Se $k = 1$ allora $N = \text{cost.}$, ovvero il modo desiderato di operatività di un reattore. Se $k < 1$ il numero dei neutroni decade esponenzialmente col tempo, e se invece $k > 1$ esso cresce esponenzialmente col tempo, con una costante caratteristica espressa da $\tau/(k - 1)$.

Un reattore supercritico dell'1% ($k = 1.01$) ha una costante temporale dell'ordine di 0.1 s, da cui la *necessità* di poter governare celermente il controllo dei parametri che determinano il valore del fattore k di moltiplicazione di un reattore. Il controllo viene praticamente attuato mediante inserzione o estrazione di barre di cadmio nel volume attivo della pila, dato che il cadmio ha un altissimo potere d'assorbimento di neutroni termici.

13.4 Il reattore nucleare preistorico di Oklo

L'abbondanza relativa di ^{235}U nei giacimenti terrestri di uranio, circa due miliardi di anni fa, era dell'ordine del 3.813%, sufficientemente maggiore

di quella attuale, che è 0.7202%. Questo fa supporre che si potessero raggiungere condizioni di criticità senza dover arricchire in ^{235}U . Ciò si è in effetti prodotto spontaneamente in almeno una occasione. Le condizioni in questione hanno comportato la presenza di una concentrazione di uranio sufficientemente alta, tipicamente maggiore del 10% della massa totale, unitamente ad una concentrazione ridotta di materiali i cui nuclei abbiano un'alta sezione d'urto di assorbimento per neutroni, e contemporaneamente la presenza di sufficiente acqua quale moderatore, maggiore del 50% della massa totale.

Queste condizioni hanno caratterizzato la zona di depositi di minerali uraniferi di Oklo, nel Gabon.

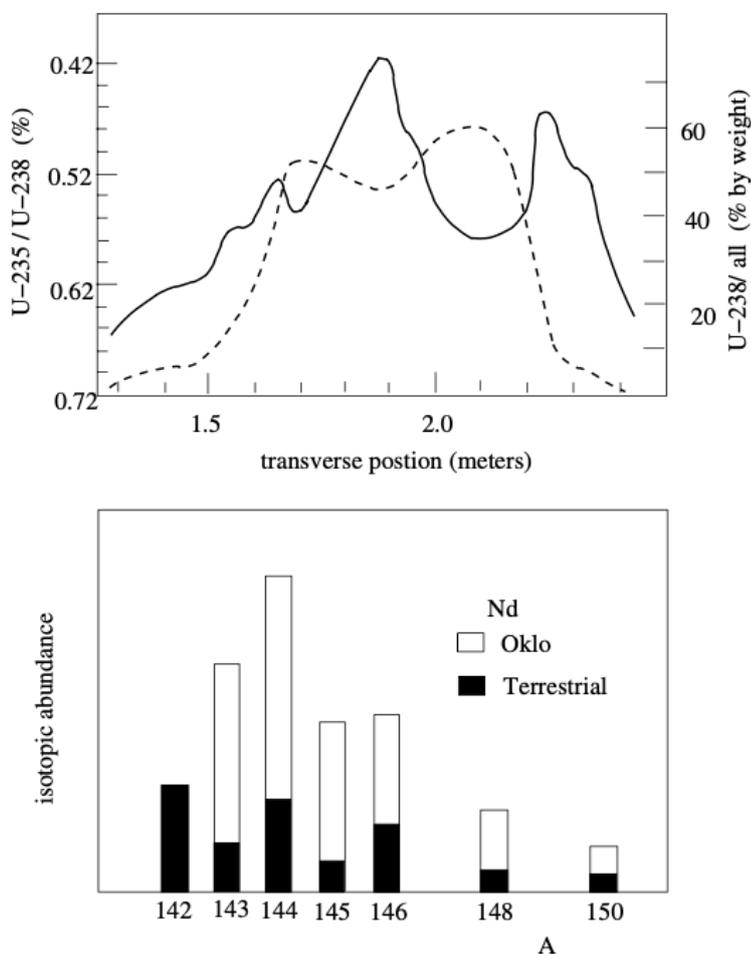


Figura 13.9: Composizione dei depositi di Oklo.

Ciò è sostanzialmente legato al fatto che circa due miliardi di anni fa si svilupparono sulla Terra delle alghe verdi-azzurre, micro-organismi in grado di effettuare la fotosintesi clorofilliana. La loro diffusione determinò lo sviluppo

dell'atmosfera ad alto contenuto di ossigeno che caratterizza ancora oggi la Terra.

L'uranio è solubile in acqua solo in presenza di ossigeno, quindi è stato l'aumento dei livelli d'ossigeno a permettere la soluzione di uranio in acqua e il suo conseguente trasporto fino a luoghi in cui poteva depositarsi in concentrazioni crescenti. Un ruolo importante è stato poi giocato dalla particolare conformazione del terreno in cui si trova la vena uranifera di Oklo che con un'inclinazione di circa 45° permise l'accumulo di acqua in un serbatoio naturale dove l'ossido di uranio si poteva concentrare.

Dalla figura [13.10](#) si nota che nel minerale di questo deposito il rapporto fra ^{235}U e ^{238}U scende quasi fino allo 0.42 %, e oltretutto vi è presenza di prodotti di fissione. Quindi una parte di ^{235}U è stata utilizzata prima dell'estrazione del minerale dalla miniera!

Si suppone che la struttura naturale abbia costituito una sorta di reattore che ha funzionato in condizione \sim critica per circa 10^6 anni in un periodo situato grosso modo 1.8×10^9 anni fa.

Un risultato interessante degli studi sul reattore naturale di Oklo è il limite stringente ottenuto in merito alla dipendenza dal tempo del valore di costanti fondamentali. Questo viene dall'osservazione che l'abbondanza in Oklo del nuclide ^{149}Sm è quella tipica degli scarti di un reattore, ovvero circa 40 volte inferiore al valore dell'abbondanza naturale dell'isotopo, pari al 13.8%. Un'abbondanza così bassa è dovuta alla cattura risonante di neutroni termici che trasformano ^{149}Sm in ^{150}Sm .

La cattura di neutroni termici sul nuclide (A, Z) dipende dalla presenza di stati altamente eccitati del nuclide $(A + 1, Z)$ che possono decadere o emettendo un fotone o un neutrone di energia $E_n \sim kT \sim 0.2 \text{ eV}$.

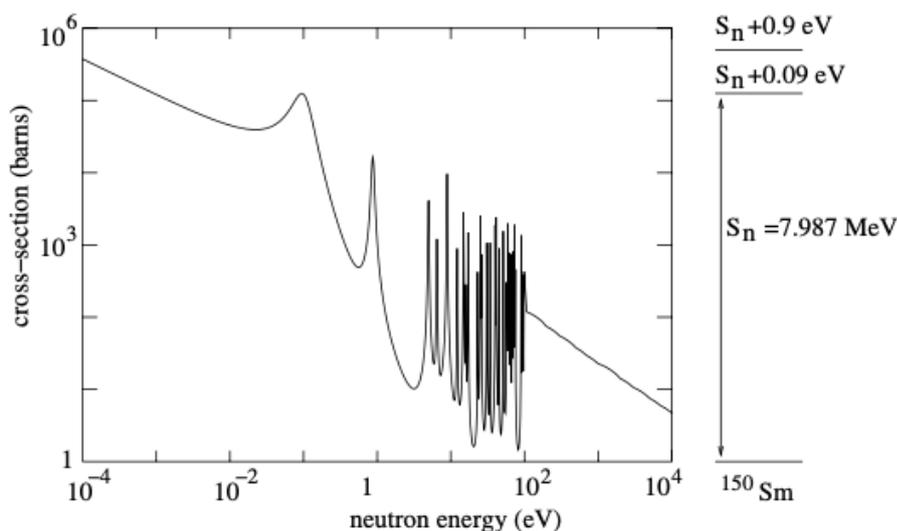


Figura 13.10: Sezione d'urto di cattura radiativa nel ^{149}Sm .

Lo stato eccitato del nuclide $(A + 1, Z)$ ha quindi, rispetto al suo stato fondamentale, un'energia $E \sim S_n + 0.02 \text{ eV}$, dove $S_n \simeq 8 \text{ MeV}$ è l'energia di estrazione del neutrone. Se questo tipo di cattura risonante di neutroni termici sul ^{149}Sm era attiva anche 1.8×10^9 anni fa, ciò significa che il valore energetico del livello è cambiato meno di 0.02 eV nello stesso periodo, ovvero un limite al cambiamento inferiore a 10^{-8} .

Poichè la posizione dei livelli nucleari dipende dal valore di costanti fondamentali, il limite ottenuto si riflette sul limite all'eventuale cambiamento del valore delle costanti fondamentali nello stesso arco di tempo. Siccome l'1% circa dell'entità energetica dei livelli è di origine elettrostatica, un limite di 10^{-8} sul cambiamento del valore dei livelli può essere conservativamente considerato come un limite di 10^{-6} sul cambiamento del valore della costante di struttura fine nell'arco di 2 miliardi di anni.

Capitolo 14

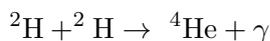
Fusione nucleare

Il grafico in figura [14.1](#) suggerisce un'alternativa alla fissione per estrarre energia dai nuclei, partendo dai nuclei più leggeri e risalendo la curva verso i nuclei più stabili. Se si fondono due nuclei leggeri sino a formare un nucleo con $A < 56$ si ha un rilascio d'energia.

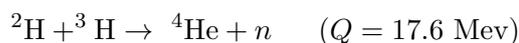
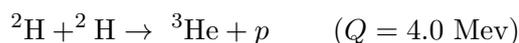
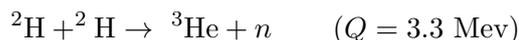
La fusione presenta chiari vantaggi rispetto alla fissione, come sorgente d'energia: i nuclei leggeri sono abbondanti e facili da reperire e i prodotti della fusione sono anch'essi leggeri e non radioattivi. C'è però anche un significativo svantaggio rispetto alla fissione, ovvero la necessità di vincere la mutua repulsione coulombiana fra due nuclei per riuscire a fonderli.

La fissione indotta da neutroni non richiede il superamento di alcuna barriera coulombiana per cui sono sufficienti neutroni incidenti di basse energie, per i quali oltretutto la sezione d'urto con l' ^{235}U cresce al calare della loro energia cinetica. Una volta superata la barriera coulombiana la fusione fra due nuclei diventa molto probabile in quanto i due nuclei si sovrappongono evolvendo verso uno stato di minima energia. Il processo base della fusione risulta quindi più semplice da capire rispetto alla fissione.

La più elementare reazione di fusione concepibile, $p+p \rightarrow {}^2\text{He}$, non può aver luogo, data l'instabilità di ${}^2\text{He}$. Una reazione di fusione possibile è invece



in cui il ruolo del fotone γ è essenzialmente di bilanciare l'energia, dato che ${}^4\text{He}$ non ha stati eccitati. L'energia rilasciata è $Q = 23.8$ MeV, superiore alle energie di separazione da ${}^4\text{He}$ sia del protone che del neutrone. Sono però più probabili le reazioni



Più è stabile il prodotto finale, maggiore è l'energia rilasciata nel processo. La fusione in step successivi di quattro protoni a formare ${}^4\text{He}$, che si vedrà

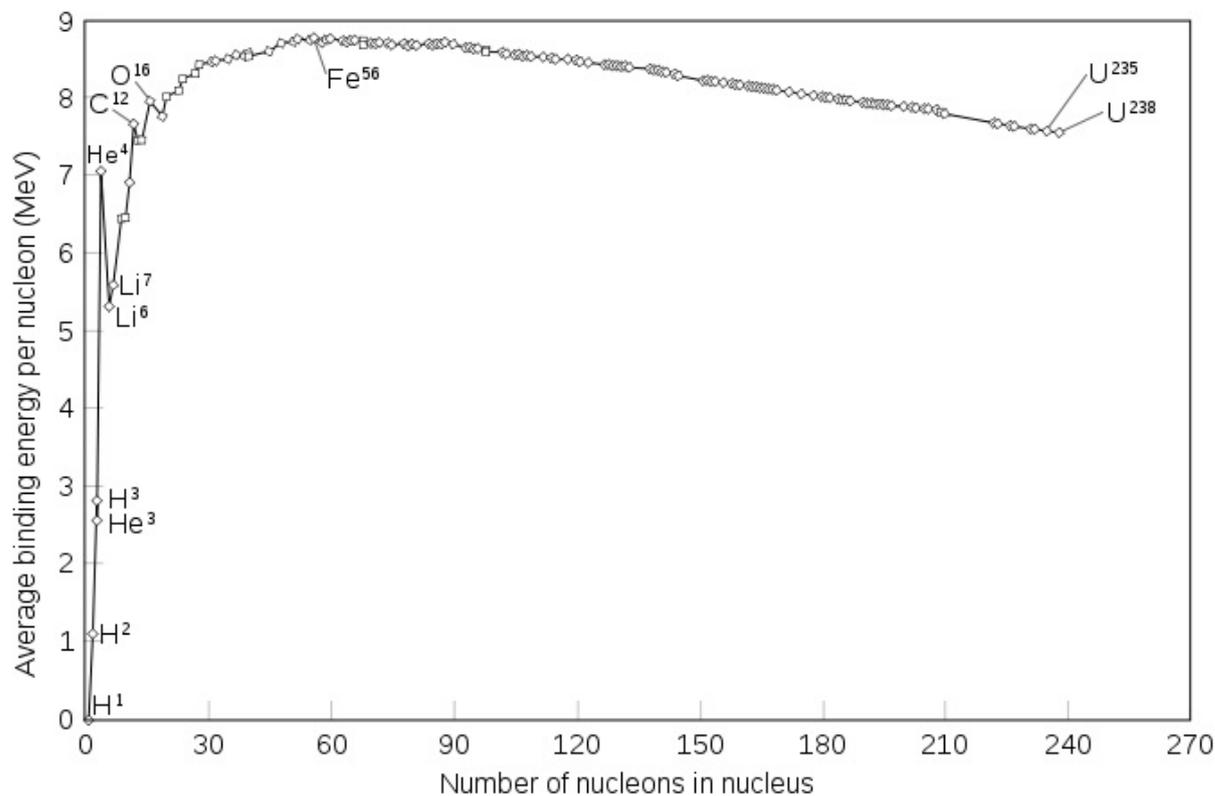
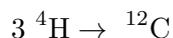


Figura 14.1: Energia media di legame per nucleone $|B/A|$.

a fine capitolo, è responsabile dell'energia termonucleare rilasciata in stelle di tipo solare. Il passo successivo in una stella, quando tutto l'idrogeno disponibile si è ormai fuso in elio, è la fusione dell'elio. La reazione più semplice da immaginare, ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$ non è osservata in quanto il ${}^8\text{Be}$ si disgrega in due ${}^4\text{He}$ in un tempo proporzionale a quello con cui si è formato ($\sim 10^{-16}$) s. Ha invece luogo un processo più complicato



La probabilità che tre particelle interagiscano in uno stesso punto contemporaneamente è però trascurabile. Nelle stelle il processo avviene in due step: si produce dapprima una piccola concentrazione in equilibrio di ${}^8\text{Be}$, quindi si ha la cattura di una α sul ${}^8\text{Be}$. Questo è un processo risonante nella produzione di ${}^{12}\text{C}$, quindi la sezione d'urto diventa abbastanza grande da dare una ragionevole probabilità di cattura della particella α prima che il ${}^8\text{Be}$ si disgreghi.

L'alta barriera coulombiana nelle reazioni dell'elio implica che esso può *bruciare* soltanto nelle stelle più calde e vecchie. A temperature ancora più alte possono aver luogo nelle stelle altre reazioni di fusione che procedono sino alla formazione di ${}^{56}\text{Fe}$.

14.1 Caratteristiche della fusione

14.1.1 Rilascio energetico

Il calcolo dell'energia rilasciata nel processo di fusione è più diretto che per la fissione, basta calcolare il Q valore della reazione appropriata. Nella gran parte dei casi, si tratti di applicazioni pratiche o di processi stellari, le particelle interagenti hanno energie cinetiche comprese nell'intervallo $1 \div 10$ keV, quindi piccole a confronto dei Q -valori coinvolti che sono di alcuni MeV. Le energie rilasciate e l'energia finale totale dei prodotti di reazione b ed Y , coincidono sostanzialmente col Q valore

$$\frac{1}{2}m_b v_b^2 + \frac{1}{2}m_Y v_Y^2 \simeq Q \quad (14.1)$$

Trascurando ragionevolmente anche gli impulsi iniziali, quelli nel canale d'uscita sono uguali in modulo e opposti in verso

$$m_b v_b \simeq m_Y v_Y \quad (14.2)$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_b v_b^2 &\simeq \frac{Q}{1 + m_b/m_Y} \\ \frac{1}{2}m_Y v_Y^2 &\simeq \frac{Q}{1 + m_Y/m_b} \end{aligned} \quad (14.3)$$

che permettono di calcolare la distribuzione in energia per le reazioni di fusione elementari viste nel paragrafo precedente. La particella più leggera prende la parte maggiore dell'energia disponibile

$$\frac{m_b v_b^2/2}{m_Y v_Y^2/2} = \frac{m_Y}{m_b} \quad (14.4)$$

Nel caso della reazione deuterio-trizio ciò assegna al neutrone prodotto l'80% dell'energia disponibile, e nella reazione deuterio-deuterio il neutrone o il protone emessi acquisiscono il 75% dell'energia disponibile.

14.1.2 Rateo di fusione

La fusione tra due nuclei può come detto aver luogo se si riesce a vincere la repulsione coulombiana fra le loro cariche protoniche; l'energia potenziale coulombiana fra i due nuclei vale

$$U_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)} \quad (14.5)$$

con Z_1 e Z_2 i numeri atomici dei due nuclei di raggi R_1 ed R_2 . La quantità $(R_1 + R_2)$ rappresenta dunque la distanza classica di massimo avvicinamento possibile fra i due nuclei. Ricordando che si può porre $R = R_0 A^{1/3}$ si

ha

$$U_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} \quad (14.6)$$

Se si considera ad esempio un caso per cui $A_1 \approx A_2 \approx 2Z_1 \approx 2Z_2 = 8$, si ottiene $U_C \approx 4.8$ MeV, per l'ammontare di energia E che dovrebbe essere fornita ai due nuclei onde permettere loro di superare la barriera coulombiana. È una quantità d'energia relativamente ridotta che si può ottenere facilmente accelerando uno dei due nuclei con sistemi elettrostatici quali ad esempio acceleratori di Crockroft-Walton o Van de Graaff. Ciò che si ottiene però al momento dell'urto è che quasi tutti i nuclei interagiscono elasticamente; affinché la fusione abbia luogo è infatti anche necessario che i due nuclei permangano vicini per un certo tempo che può eccedere quello in gioco durante l'urto indotto da fasci accelerati, tranne nei rari casi in cui l'urto che si produce è centrale, ovvero ha luogo con parametro d'urto $b \simeq 0$.

Un modo che la natura ha trovato per ottenere le condizioni che favoriscono la fusione è di riscaldare a sufficienza una miscela "confinata" di nuclei onde fornire loro abbastanza energia termica da permettergli di superare la barriera coulombiana, e ciò ha luogo nella formazione di una stella grazie all'intervento dell'interazione gravitazionale che "confina" e favorisce il "riscaldamento". Si può stimare la temperatura necessaria affinché la fusione possa aver luogo in una stella secondo quanto detto, ricordando il valore della costante k_B di Boltzmann ($k_B = 8.61673324 \times 10^{-11}$ MeV K⁻¹), da cui

$$T \simeq \frac{4.8}{k_B} \simeq 5.6 \times 10^{10} \text{ K} \quad (14.7)$$

che è però un valore molto superiore a quello tipicamente presente all'interno della maggior parte delle stelle che è dell'ordine di $10^7 \div 10^8$ K. Fu proprio questo semplice risultato che portò molti a rifiutare inizialmente l'idea di A. Eddington che l'energia delle stelle provenisse da reazioni di fusione nucleare al loro interno. Questo fatto rappresenta oltretutto anche uno degli ostacoli maggiori da superare per riuscire ad ottenere la fusione controllata in un reattore.

Le reazioni di fusione hanno in realtà luogo a temperature inferiori a quella stimata e ciò grazie alla combinazione di due fatti.

- Il primo e più importante è l'effetto tunnel, grazie al quale per ottenere la fusione non si deve necessariamente mettere in gioco un'energia superiore a quella dell'intera barriera coulombiana. Ricordando quanto detto a proposito del decadimento α , si ha che la penetrazione della barriera dipende da un certo numero di fattori il più importante dei quali è il fattore G di Gamow che dipende dalle velocità relative e che per due nuclei interagenti con numeri atomici Z_1 e Z_2 e masse m_1 ed

m_2 , può essere scritto in funzione dell'energia E come

$$G(E) = \sqrt{\frac{E_G}{E}} \quad \text{con} \quad E_G = 2m_r c^2 (\pi\alpha Z_1 Z_2)^2 \quad (14.8)$$

dove α è la costante di struttura fine ed $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, cioè la massa ridotta del sistema dei due nuclei in procinto di fondersi.

La probabilità di attraversamento della barriera, e quindi di fusione tra i due nuclei, è proporzionale ad $e^{-G(E)}$, e quindi aumenta all'aumentare di E . Se la si considera ad esempio per la fusione di due protoni all'interno di una stella tipica alla temperatura di 10^7 K, si ha $E_G \simeq 490$ keV ed $E \simeq 1$ keV, da cui si ottiene una probabilità di fusione estremamente bassa, proporzionale ad $e^{-22} \simeq 10^{-9.55}$.

- Il secondo fatto che unitamente al primo rende ragione dei ratei dei processi di fusione all'interno delle stelle, dipende dalla forma maxwelliana delle distribuzioni di energia al loro interno, per cui anche alle temperature di $10^7 \div 10^8$ K, vi sono comunque nuclei con energie cinetiche superiori a quella media della distribuzione, sulla coda alta della stessa e con valori quindi più adatti a favorire la fusione. È la cooperazione tra questi due effetti che favorisce la fusione nucleare in una stella.

Si consideri la fusione fra due tipologie di nuclei a e b , presenti in equilibrio termico alla temperatura T , con densità n_a e n_b in un certo volume definito. Si supponga anche che T sia sufficientemente alta da far sì che i nuclei a e b costituiscano un *plasma* completamente ionizzato. Si assuma anche che le velocità delle due tipologie di nuclei siano distribuite secondo Maxwell-Boltzmann, per cui la probabilità che vi siano due nuclei con velocità relativa v compresa nell'intervallo $(v + dv)$ è data da

$$P(v) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m_r}{kT}\right)^{3/2} e^{(-mv^2/2kT)} v^2 dv \quad (14.9)$$

con m_r la massa ridotta del sistema dei due nuclei.

Detta σ_{ab} la sezione d'urto del processo di fusione si ha dunque, per il rateo R_{ab} delle reazioni di fusione per unità di volume

$$R_{ab} = n_a n_b \langle \sigma_{ab} v \rangle \quad (14.10)$$

con le parentesi $\langle \rangle$ che indicano la media, ovvero

$$\langle \sigma_{ab} v \rangle \equiv \int_0^\infty \sigma_{ab} v P(v) dv \quad (14.11)$$

Tenendo conto che molte sezioni d'urto nucleari a bassa energia mostrano un andamento tipicamente proporzionale all'inverso dell'energia cinetica E del

proiettile, e ricordando il ruolo dell'effetto tunnel, si può scrivere la sezione d'urto di fusione come

$$\sigma_{ab}(E) = S(E) \frac{1}{E} e^{-\left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}} \quad (14.12)$$

dove $S(E)$ è una funzione lentamente variabile di E che esprime i dettagli dei meccanismi nucleari dell'interazione. ¹ Sostituendo la [14.9] e la [14.12]

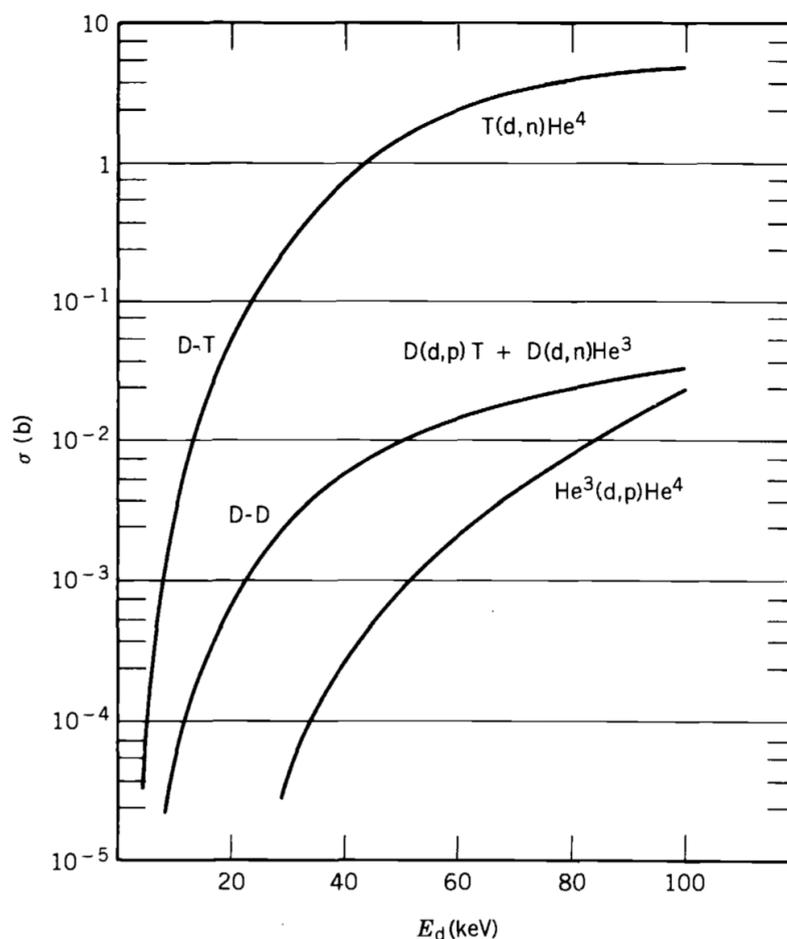


Figura 14.2: Sezioni d'urto per reazioni di fusione.

nella [14.11] si ha, per il rateo delle reazioni di fusione per unità di volume

$$R_{ab} = n_a n_b \sqrt{\frac{8}{\pi m_r}} \left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty S(E) e^{-\left[\frac{E}{kT} - \sqrt{\frac{E_G}{E}}\right]} dE \quad (14.13)$$

¹L'assunzione di lenta variabilità per $S(E)$ implica ad esempio che si esclude la presenza di risonanze.

Il fatto che $S(E)$ sia lentamente variabile con E implica che il ruolo dominante nell'integrando sia svolto dal termine esponenziale e ne risulta che il termine Maxwelliano, calante con E , si combina con quello crescente con E dovuto all'effetto tunnel, dando luogo ad un massimo nell'integrando, detto *picco di Gamow*, in corrispondenza al valore

$$E = E_0 = \left[\frac{1}{4} E_G (kT)^2 \right]^{1/3} \quad (14.14)$$

Il processo di fusione può quindi aver luogo in corrispondenza del ristretto intervallo di energie $E_0 \pm \Delta E_0$, con

$$\Delta E_0 = \frac{4}{2^{1/3} \sqrt{3}} E_G^{1/6} (kT)^{5/6} \quad (14.15)$$

come mostrato in figura [14.3](#). Nel caso di due protoni che si fondono alla

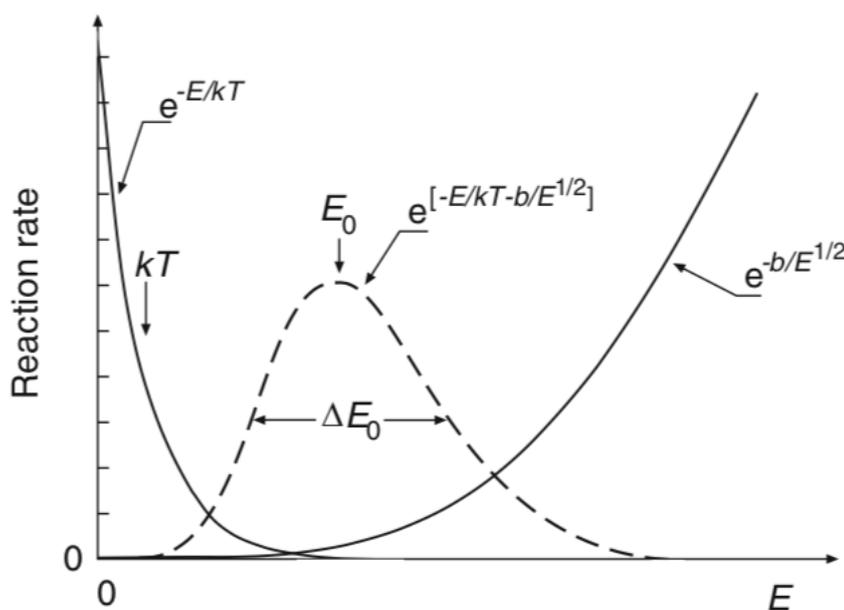
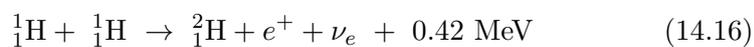


Figura 14.3: Picco di Gamow. In figura $b \equiv E_G$.

temperatura $T = 2 \times 10^7$ K (la temperatura interna del Sole è stimata essere $T_{\odot} \simeq 1.57 \times 10^7$ K), si ha $E_G = 493$ keV, $kT = 1.7$ keV, $E_0 = 7.2$ keV e $\Delta E_0 = 8.2$ keV.

Per tornare quindi all'energia prodotta in una stella, e considerando più precisamente il Sole, si ha che la quasi totalità dell'energia prodotta in esso proviene dal cosiddetto ciclo *protone-protone*, che ha più di un canale possibile, il principale dei quali, detto catena PP-I e illustrato in figura [14.4](#),

inizia con la fusione di nuclei di idrogeno e la conseguente produzione di nuclei di deuterio



Il deuterio si fonde quindi con altro idrogeno e produce ${}^3_2\text{He}$



Infine due nuclei di ${}^3_2\text{He}$ si fondono e formano ${}^4_2\text{He}$

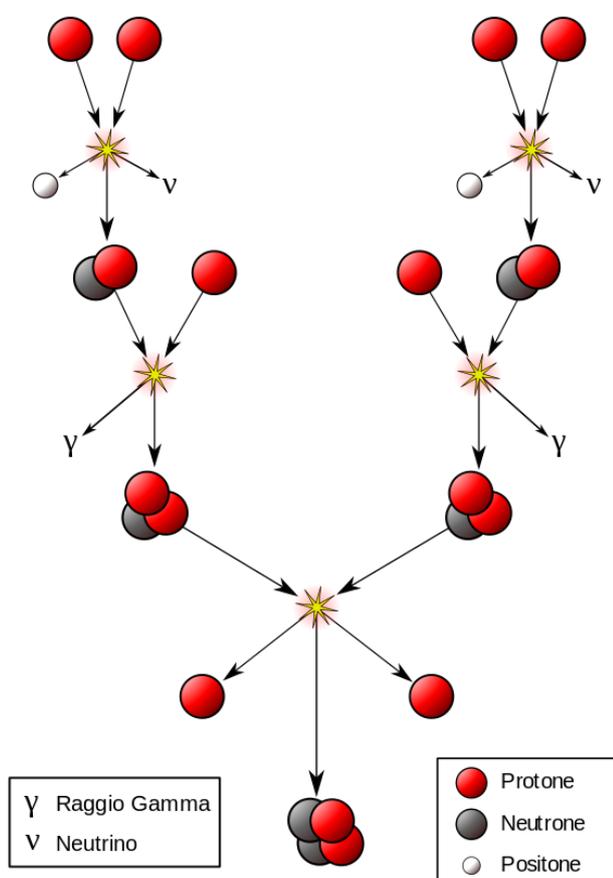
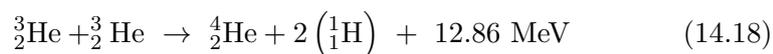


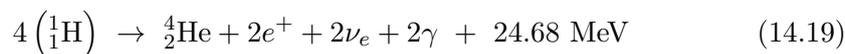
Figura 14.4: Catena PP-I



La notevole quantità d'energia rilasciata nel corso dell'ultima reazione di fusione è dovuta alla grande energia di legame dell' ${}^4_2\text{He}$.

La prima delle reazioni indicate, la [14.16](#), essendo dovuta all'interazione debole, procede con un rateo estremamente basso ed è questo il motivo della lunga *vita media* del Sole!

Il ciclo nella sua completezza può quindi essere descritto come



Dato il valore di T_\odot tutta la materia all'interno del Sole è ionizzata e costituisce un plasma. I positroni prodotti annichilano nel plasma con gli elettroni presenti rilasciando un'ulteriore energia di 1.02 MeV, per cui l'energia totale prodotta in ogni ciclo del tipo [14.19](#) ammonta a 26.72 MeV. Bisogna però tener conto che ogni neutrino che sfugge nello spazio porta via mediamente un'energia pari a 0.26 MeV. Ne risulta quindi che per ogni protone coinvolto nella catena PP-I vengono mediamente irraggiati 6.55 MeV.

La catena PP-I non è però la sola, vi sono altri cicli di fusione che contribuiscono all'energia prodotta in una stella e di cui si tratterà oltre, accennando alla nucleosintesi degli elementi nelle stelle.

Appendice A

Richiami di Relatività ristretta

Qui di seguito sono richiamati in forma riassuntiva alcuni concetti fondamentali della relatività ristretta necessari alla trattazione di gran parte dei fenomeni che coinvolgono nuclei e particelle.

Si ricordano i postulati fondanti, ovvero che le leggi della fisica sono indipendenti dall'osservatore purchè questo sia solidale con un qualsiasi sistema di riferimento inerziale, e inoltre la velocità c della luce nel vuoto è la massima velocità raggiungibile in natura, è indipendente dal sistema di riferimento inerziale e costituisce una costante universale.

Scelti allora due sistemi di riferimento inerziali S ed S' , cartesiani ortogonali, con le origini O ed O' coincidenti all'istante $t = t' = 0$ ed S' in moto con velocità $v = v_z = \beta c$ rispetto ad S , la relazione fra le coordinate di un qualsiasi evento descritto rispetto a un sistema di riferimento o rispetto all'altro, è data dalle trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta z) \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \gamma(z - \beta ct) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

con $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Le trasformazioni inverse sono:

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta z') \\ x = x' \\ y = y' \\ z = \gamma(z' + \beta ct') \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Le componenti *covarianti* di un quadrivettore x sono indicate da apici in caratteri greci μ, ν , ecc., per cui: x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, e quindi: $x \equiv$

$$(x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z) \equiv (x^0, \mathbf{x}).$$

Le componenti *controvarianti* di un quadrivettore x sono invece indicate da pedici in caratteri greci, per cui: x_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, e quindi: $x \equiv (x_0 = x^0 = ct, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z) \equiv (x_0, -\mathbf{x})$.

Il prodotto scalare di due quadrivettori x ed y è dato, con la solita regola di Einstein di somma sugli indici ripetuti, da

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \quad (\text{A.3})$$

ed è una quantità invariante per le trasformazioni di Lorentz, che equivalgono alla composizione di una *rotazione* e di una *traslazione*; similmente nello spazio tridimensionale il prodotto scalare di due qualsiasi vettori è invariante per rotazioni.

Il segno "−" nel prodotto scalare implica che lo spazio quadrivettoriale non è Euclideo.

Quanto visto ora si può anche esprimere introducendo il tensore metrico $g^{\mu\nu}$ caratterizzato dall'aver i termini diagonali pari a $(1, -1, -1, -1)$ e uguali a 0 tutti i termini fuori dalla diagonale. I termini controvarianti del tensore metrico coincidono con quelli covarianti, cioè $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ e si ha

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{e} \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{A.4})$$

Grazie al tensore metrico il prodotto scalare si può scrivere come

$$x \cdot y = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (\text{A.5})$$

Il prodotto scalare di un quadrivettore per se stesso, $x^\mu x_\mu = x^2$ è anche una quantità Lorentz-invariante.

Nel caso sia $x^2 = x^\mu x_\mu > 0$ il quadrivettore è detto di tipo *tempo*, se invece $x^2 = x^\mu x_\mu = 0$ esso è detto di tipo *luce*, se infine $x^2 = x^\mu x_\mu < 0$ esso è detto di tipo *spazio*.

La trasformazione di Lorentz fra due sistemi di riferimento inerziali si può anche scrivere come

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu \quad (\text{A.6})$$

e l'invarianza del prodotto scalare fra due quadrivettori implica

$$a^\mu_\nu a^\lambda_\mu = \delta^\lambda_\nu \quad (\text{A.7})$$

con δ^λ_ν il simbolo di Kronecker.

Anche il vettore impulso \mathbf{p} e l'energia totale E di una particella definiscono un quadrivettore p , comunemente detto *quadrivettore energia-impulso* o *quadri-impulso*

$$p = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \quad (\text{A.8})$$

Le trasformazioni di Lorentz correlano anche le singole componenti del quadrivettore energia-impulso di una particella fra due diversi sistemi inerziali S ed S' :

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta p_z \right) \\ p'_x = p_x \\ p'_y = p_y \\ p'_z = \gamma \left(p_z - \beta \frac{E}{c} \right) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Similmente a quanto visto per le coordinate, presi due quadrivettori energia-impulso, $p = (p^0, \mathbf{p})$ e $q = (q^0, \mathbf{q})$, di due diversi sistemi fisici, o particelle, il prodotto scalare dei due, $p \cdot q = (p^0 q^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$ è Lorentz-invariante, ed è quindi una costante del moto. Nel caso particolare del prodotto scalare di un quadrivettore energia-impulso per se stesso si ha

$$p \cdot p = p^\mu p_\mu = p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}|^2 = \text{cost.} \quad (\text{A.10})$$

che data l'indipendenza dal particolare sistema di riferimento inerziale, può essere considerato nel sistema a riposo con la particella, da cui $\mathbf{p} = 0$, e correlato con l'energia a riposo $E_0 = mc^2$ della particella

$$p \cdot p = \frac{E_0^2}{c^2} = m^2 c^2 \quad (\text{A.11})$$

con m la massa della particella.

L'impulso e l'energia totale di una particella di massa m , in moto con velocità \mathbf{v} rispetto a un osservatore inerziale sono dati da

$$\begin{cases} \mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = m\gamma\beta c \\ E = m\gamma c^2 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

e ne consegue

$$\beta = \frac{c \mathbf{p}}{E} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{E}{mc^2} \quad (\text{A.13})$$

La più generale relazione fra impulso \vec{p} , energia E e velocità $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ può quindi essere scritta in una forma valida sia per corpi dotati di massa che per corpi di massa nulla, come ad esempio il fotone

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{\beta} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \quad (\text{A.14})$$

Si può anche definire l'energia cinetica E_k di una particella rispetto a un osservatore inerziale, come differenza fra la sua energia E rispetto a tale osservatore e la sua energia a riposo E_0 , indipendente dal particolare sistema di riferimento inerziale

$$E = m\gamma c^2 = E_0 + E_k = mc^2 + E_k \quad (\text{A.15})$$

da cui, ricordando che $E = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}$,

$$E_k = E - mc^2 = mc^2 (\gamma - 1) = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \quad (\text{A.16})$$

e ancora

$$c |\vec{p}| = \sqrt{E_k^2 + 2mc^2 E_k} \quad (\text{A.17})$$

Considerando ora:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}} 2pc^2 = \frac{c^2}{E} p = \frac{p}{m\gamma} \quad (\text{A.18})$$

si ottiene:

$$dE = \frac{p}{m\gamma} dp \implies dE = v dp \quad (\text{A.19})$$

La somma e la differenza fra quadrivettori sono ancora dei quadrivettori, ne consegue che moltiplicando scalarmente per se stesse, o elevando a quadrato, somme o differenze di quadrivettori, si ottengono delle quantità Lorentz-invarianti. Se ad esempio si considerano quattro quadrivettori $q_i = (q_i^0, q_i^1, q_i^2, q_i^3)$ e se ne definisce la somma $q = \sum_i q_i$, anche $q \cdot q = q^2$ è una quantità Lorentz-invariante

$$q^2 = \left(\sum_i q_i^0 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^1 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^2 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^3 \right)^2 \quad (\text{A.20})$$

Se q_i è il vettore energia-impulso di un gruppo di particelle, allora $q \cdot q = q^2$ è connesso al quadrato dell'energia a riposo del sistema fisico costituito da quel gruppo di particelle.

A.1 Coordinate parallele e trasverse

Trattando di decadimenti o di interazioni fra particelle o fra particelle e nuclei, spesso ci si trova nella condizione in cui il sistema fisico e la struttura sperimentale sono meglio descritti se ci si riferisce a una geometria spaziale con simmetria cilindrica, in cui l'asse z di simmetria è parallelo alle velocità delle particelle incidenti o nel caso di decadimenti, è parallelo alla velocità della particella che decadrà, se questa è inizialmente in moto nel sistema di riferimento scelto.

È quindi utile riesprimere le trasformazioni di Lorentz e altri risultati già individuati in funzione di componenti parallele "||" e ortogonali, o trasverse, "⊥" alla direzione della velocità relativa \vec{v} fra due sistemi di riferimento inerziali. La [A.6](#) diventa allora, se le origini dei due sistemi coincidono per

$$t = t' = 0$$

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x_{\parallel}) \\ x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - \beta x^0) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

dove $\beta = |\vec{v}|/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, x_{\parallel} è la componente di x nella direzione di \vec{v} , per cui $\vec{x}_{\parallel} = (\vec{x} \cdot \vec{v}) \vec{v}/v^2$, e $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}$.

In questo caso la trasformazione di Lorentz è definita da tre soli parametri, ovvero le tre componenti di \vec{v} . Se i due sistemi di riferimento fossero anche ruotati uno rispetto all'altro si sarebbe nel caso più generale in cui la trasformazione dipende da sei parametri tre dei quali sarebbero gli angoli di Eulero.

Come già visto precedentemente la trasformazione di Lorentz inversa dal sistema accentato a quello non accentato si ottiene sostituendo nelle [A.21](#) i termini accentati con i non-accentati e cambiando il segno della velocità

$$\begin{cases} x^0 = \gamma(x^{0'} + \beta x'_{\parallel}) \\ x_{\parallel} = \gamma(x'_{\parallel} + \beta x^0) \\ \vec{x}_{\perp} = \vec{x}'_{\perp} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Similmente si ha, per il quadrivettore energia-impulso

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} \equiv p^{0'} = \gamma(p^0 - \beta p_{\parallel}) \\ p'_{\parallel} = \gamma(p_{\parallel} - \beta p^0) \\ \vec{p}'_{\perp} = \vec{p}_{\perp} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Si introducono ora due variabili molto utili per l'analisi dei fenomeni dinamici relativistici. La prima è la *rapidità*, definita come

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \ln \frac{E + cp_{\parallel}}{E - cp_{\parallel}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + cp_{\parallel}/E}{1 - cp_{\parallel}/E} = \operatorname{arctanh} \left(\frac{cp_{\parallel}}{E} \right) = \operatorname{arctanh}(\beta_L) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

e che risulta più appropriata della componente *longitudinale*¹ ($\beta_L = cp_{\parallel}/E$) della velocità, in quanto ha il vantaggio di essere additiva per variazioni longitudinali della velocità. Una particella con rapidità y in un definito sistema inerziale presenta cioè una rapidità pari ad $y + dy$ in un sistema di riferimento che si muove con rapidità dy nella direzione $-z$, rispetto al sistema di riferimento originale, come si può dedurre dalla formula relativistica di addizione delle velocità.

¹Dalla [A.13](#) si ha: $\vec{\beta} = \vec{\beta}_L + \vec{\beta}_{\perp}$.

Nella fisica sperimentale delle particelle e degli ioni a energie relativistiche si utilizza comunemente un'altra grandezza, legata alla rapidità e detta *pseudorapidità*, indicata con η e definita come

$$\eta = -\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (\text{A.25})$$

dove ϑ è l'angolo compreso fra il tri-impulso \vec{p} della particella e la direzione positiva dell'asse del fascio incidente. Solitamente la distribuzione dei prodotti di reazione in funzione dell'angolo polare varia molto e bruscamente in prossimità dei piccoli angoli in avanti e dei grandi angoli all'indietro, riferendosi alla pseudorapidità anzichè all'angolo polare si hanno andamenti più dolci.

La pseudorapidità può essere espressa in funzione del tri-impulso ottenendo

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|\vec{p}| + p_{\parallel}}{|\vec{p}| - p_{\parallel}}\right) = \operatorname{arctgh}\left(\frac{p_{\parallel}}{|\vec{p}|}\right) \quad (\text{A.26})$$

Si osservi che la pseudorapidità η si ottiene dalla rapidità y al limite quando la particella considerata ha un'energia a riposo mc^2 trascurabile rispetto al proprio quadri-impulso p , per cui $E \simeq p$. Si noti che comunque la pseudorapidità dipende esclusivamente dall'angolo polare e non dall'energia della particella. La rapidità permette anche di costruire la variabile Lorentz-invariante

$$\Delta R = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta\varphi)^2} \quad (\text{A.27})$$

che rappresenta la separazione angolare fra gli impulsi di due particelle, con φ l'angolo azimutale.

A.2 Legge relativistica del moto di una particella

La legge relativistica del moto di una particella di massa m si ottiene dalla seconda legge di Newton, ricordando che $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} + m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} \quad (\text{A.28})$$

Sviluppando la derivata si ha

$$m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} = m\frac{d\left[(1-\beta^2)^{-1/2}\right]}{dt}\vec{v} = \frac{m}{2}\frac{\left(2\frac{v}{c^2}a_t\right)}{(1-\beta^2)^{3/2}}\vec{v} = m\gamma^3(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}$$

da cui

$$\vec{F} = m\gamma\vec{a} + m\gamma^3(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta} \quad (\text{A.29})$$

La forza agente risulta quindi la somma di due termini, uno parallelo all'accelerazione e uno parallelo alla velocità. Non si può dunque definire alcuna

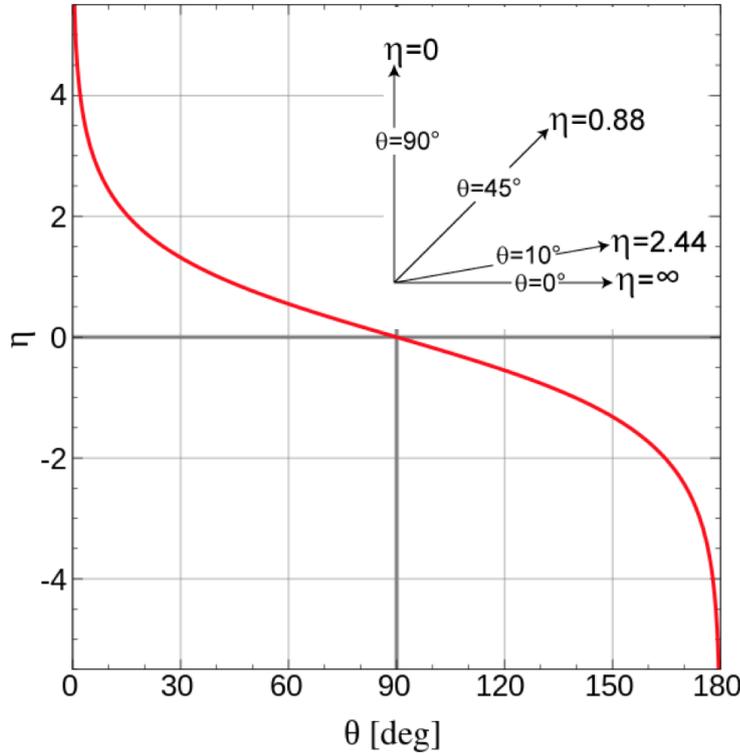


Figura A.1: Pseudorapidità η in funzione dell'angolo polare ϑ .

”massa” come il rapporto tra forza e accelerazione, e ne consegue che ad alte velocità la massa non rappresenta l'inerzia rispetto al moto. Moltiplicando scalarmente entrambi i membri della [A.29](#) per $\vec{\beta}$ si ottiene

$$\vec{F} \cdot \vec{\beta} = m\gamma \vec{a} \cdot \vec{\beta} + m\gamma^2 \beta^2 \vec{a} \cdot \vec{\beta} = m\gamma (1 + \gamma^2 \beta^2) \vec{a} \cdot \vec{\beta} = m\gamma^3 \vec{a} \cdot \vec{\beta}$$

da cui

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{\beta}}{m\gamma^3} \quad (\text{A.30})$$

che sostituita in [A.29](#) dà

$$\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} = m\gamma \vec{a} \quad (\text{A.31})$$

L'accelerazione è quindi anch'essa la somma di due termini, uno parallelo alla forza e uno parallelo alla velocità.

Forza e accelerazione risultano parallele ed equiverse in due soli casi, ovvero quando forza e velocità sono parallele, per cui $\vec{F} = m\gamma^3 \vec{a}$, o quando forza e velocità sono ortogonali, per cui $\vec{F} = m\gamma \vec{a}$. Le costanti di proporzionalità sono diverse nei due casi.

Appendice B

Cinematica relativistica del decadimento in due corpi

I decadimenti nucleari finora studiati coinvolgono spesso strutture *figlie* emesse da un nucleo *genitore* con energie simili o superiori agli equivalenti energetici delle masse delle particelle figlie stesse. Questi casi vanno quindi trattati secondo il corretto approccio relativistico, come del resto sarà necessario con i decadimenti di singole particelle.

Riferendosi ai concetti riportati in Appendice [A](#), si analizza ora il decadimento di una struttura o particella *genitore* in due strutture o particelle *figlie*, ovvero il decadimento in due corpi, che è anche la forma più semplice di reazione.

Si consideri il decadimento di una particella di massa M inizialmente a riposo rispetto a un osservatore inerziale solidale col sistema del laboratorio (SL), che in questo caso coincide con quello del centro di massa (CM), e siano m_1 ed m_2 le masse delle particelle figlie. Il quadri-impulso della particella genitore è quindi $P = (Mc, 0, 0, 0)$, e indicati con $p_1 = (E_1/c, \vec{p}_1)$ e $p_2 = (E_2/c, \vec{p}_2)$ i quadri-impulsi delle particelle figlie, la conservazione del quadri-impulso richiede che sia

$$P = p_1 + p_2 \quad \text{da cui,} \quad \vec{p}_2 = -\vec{p}_1 \quad (\text{B.1})$$

Per cui nel sistema (CM) le due particelle figlie sono emesse lungo la stessa direzione, in versi opposti con impulsi di uguale modulo. Si può dunque omettere il pedice nell'impulso e la conservazione dell'energia assume la forma

$$E_1 + E_2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} = Mc^2 \quad (\text{B.2})$$

Raccogliendo e quadrando una prima volta si ottiene:

$$\begin{aligned} Mc^2 - \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} &= \sqrt{m_2^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \quad \implies \\ M^2 c^4 + (m_1 c^2 - m_2 c^2)(m_1 c^2 + m_2 c^2) &= 2Mc^2 \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \end{aligned}$$

quadrando nuovamente ed estraendo $|\vec{p}|^2$ si ha

$$\begin{aligned}
M^4c^2 + (m_1 - m_2)^2(m_1 + m_2)^2c^2 + 2M^2c^2(m_1 - m_2)(m_1 + m_2) &= \\
= 4M^2(m_1^2c^2 + |\vec{p}|^2) &\implies \\
|\vec{p}|^2 = \frac{M^4c^2 + (m_1 - m_2)^2(m_1 + m_2)^2c^2 - 2M^2m_1^2c^2 - 2M^2m_2^2c^2}{4M^2} &= \\
\frac{M^4c^2 + (m_1 - m_2)^2(m_1 + m_2)^2c^2 - M^2(m_1 + m_2)^2c^2 - M^2(m_1 - m_2)^2c^2}{4M^2} &
\end{aligned}$$

da cui infine:

$$|\vec{p}| = \frac{\sqrt{[M^2c - (m_1 - m_2)^2c][M^2c - (m_1 + m_2)^2c]}}{2M} \quad (\text{B.3})$$

valida soltanto se

$$M \geq m_1 + m_2 \quad (\text{B.4})$$

che implica la possibilità per una particella di decadere soltanto se la sua massa supera la somma delle masse dei prodotti del decadimento.

Se dunque la massa di una particella supera la somma delle masse di altre due particelle, allora essa sarà instabile e potrà di conseguenza decadere in quelle due particelle figlie, a meno che il decadimento non sia interdetto dal rispetto di qualche altra legge di conservazione quale quella della carica, del momento angolare, ecc. Quella ora espressa è quindi una condizione necessaria, ma non sufficiente, all'avvenire di un particolare decadimento.

Va anche osservato che sia gli impulsi che le energie delle particelle figlie sono fissati dalle loro masse unitamente alla massa della particella genitore. Ciò invece non vale nel caso di decadimento in più di due particelle figlie: in tal caso l'impulso di una particella figlia può assumere qualsiasi valore compreso fra 0 e un certo valore massimo determinato dalle masse delle particelle coinvolte.

Tornando al decadimento in due corpi, le energie delle particelle figlie si ottengono dalla [B.2](#). Quadrando per E_1 ed E_2

$$E_1^2 = m_1^2c^4 + p^2c^2 \quad , \quad E_2^2 = m_2^2c^4 + p^2c^2$$

$$\text{da cui: } E_1^2 - m_1^2c^4 = p^2c^2 = E_2^2 - m_2^2c^4 \implies E_2^2 = E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4$$

$$\text{quindi: } E_2 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4}$$

Inoltre dalla [B.2](#)

$$E_1 + E_2 = Mc^2 \implies E_2 = Mc^2 - E_1$$

$$\text{da cui: } Mc^2 - E_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + m_2^2c^4}$$

$$\text{e quadrando: } M^2c^4 - 2E_1Mc^2 = m_2^2c^4 - m_1^2c^4$$

da cui infine:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2}{2M} \\ E_2 = \frac{M^2 c^2 + m_2^2 c^2 - m_1^2 c^2}{2M} \end{cases} \quad \text{e similmente,} \quad (\text{B.5})$$

Si noti anche che non c'è una direzione preferita per l'emissione della particella figlia, e il decadimento è quindi *isotropo*. Se però si sceglie la direzione di uno qualsiasi dei due prodotti del decadimento, ad esempio tramite il posizionamento di un rivelatore, allora la direzione d'emissione dell'altro risulta fissata dalla conservazione dell'impulso e come detto i prodotti del decadimento si muovono *back-to-back* nel sistema di riferimento del centro di massa del genitore.

Nel caso in cui le due particelle figlie abbiano masse identiche, $m_1 = m_2 = m$, come ad esempio nel decadimento $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, le formule [B.5](#) si semplificano con le energie delle due particelle figlie date da $E_1 = E_2 = M c^2 / 2$, e l'impulso espresso da $|\vec{p}| = c\sqrt{M^2 - 4m^2}/2$.

È interessante anche il caso di decadimento in due corpi di una particella genitore *in volo*, ovvero descritta da un osservatore non a riposo con il sistema del suo centro di massa, ma in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso. L'importanza di questo caso è chiara non appena si pensi che è spesso il solo modo di misurare la massa di particelle-genitore neutre, cioè di carica elettrica nulla.

Si scrivano i quadri-impulsi della particella genitore e delle due particelle figlie

$$P = (E/c, 0, 0, p) \quad (\text{B.6})$$

$$p_1 = (E_1/c, \vec{p}_{1\perp}, p_{1z}) \quad , \quad p_2 = (E_2/c, \vec{p}_{2\perp}, p_{2z})$$

nell'ipotesi di aver scelto l'asse z parallelo alla direzione di volo, e quindi alla velocità, della particella madre. La conservazione dell'impulso richiede allora che i vettori bidimensionali degli impulsi trasversi delle due particelle abbiano lo stesso modulo, la stessa direzione e versi opposti:

$$\vec{p}_{1\perp} = -\vec{p}_{2\perp} \equiv \vec{p}_{\perp} \quad (\text{B.7})$$

Le energie e le componenti lungo z degli impulsi delle particelle sono collegate ai valori nel sistema del CM da un *Lorentz boost* con velocità pari a quella della particella madre (vedi Appendice [A](#)). Indicando con un apice ' le variabili cinematiche nel CM, le trasformazioni di Lorentz per le particelle figlie sono

$$\begin{cases} E_1 = \gamma(E'_1 + vp'_{1z}) \\ p_{1z} = \gamma\left(p'_{1z} + \frac{\beta E'_1}{c}\right) \\ \vec{p}_{1\perp} = \vec{p}'_{1\perp} \end{cases} \quad \begin{cases} E_2 = \gamma(E'_2 + vp'_{2z}) \\ p_{2z} = \gamma\left(p'_{2z} + \frac{\beta E'_2}{c}\right) \\ \vec{p}_{2\perp} = \vec{p}'_{2\perp} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

e ricordando le [A.13](#) dell'Appendice [A](#) si ha

$$\beta = \frac{c p}{E} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{E}{M c^2} \quad (\text{B.9})$$

Il problema è così risolto.

Si possono ora in primo luogo calcolare gli angoli che gli impulsi delle due particelle figlie fanno con l'asse z e l'uno rispetto all'altro, in funzione dell'impulso \vec{p} della particella genitore. A tale scopo è interessante affrontare il problema senza l'uso diretto delle trasformazioni di Lorentz, partendo dalla conservazione energia-impulso

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + p_1^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + p_2^2 c^2} \quad (\text{B.10})$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (\text{B.11})$$

Sostituendo nella [B.10](#) p_2^2 con $(\vec{p} - \vec{p}_1)^2$, si ottiene un'equazione che contiene l'impulso incognito p_1 e l'angolo ϑ_1 fra \vec{p}_1 e l'asse z . Risolvere per p_1 è una procedura lunga, anche se diretta, che fornisce

$$p_1 = \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2) c^2 p \cos\vartheta_1 \pm 2E \sqrt{M^2 p'^2 - m_1^2 p^2 \text{sen}^2 \vartheta_1}}{2(M^2 + p^2 \text{sen}^2 \vartheta_1)} \quad (\text{B.12})$$

L'esistenza di valori reali per p_1 richiede che $(M^2 p'^2 - m_1^2 p^2 \text{sen}^2 \vartheta_1) \geq 0$ e questa condizione è soddisfatta per ogni angolo ϑ_1 se $(M p' / m_1 p) > 1$. In questo caso bisogna anche scartare la soluzione che prevede il segno " - " in quanto condurrebbe a valori negativi e privi di significato fisico per p_1 , con $\vartheta_1 > \pi/2$. Se d'altronde $(M p' / m_1 p) < 1$, allora i valori possibili per ϑ_1 sono superiormente limitati in quanto $\text{sen}\vartheta_{1max} = (M p' / m_1 p)$. In questo caso entrambi i segni danno risultati possibili: per ogni valore $\vartheta_1 < \vartheta_{1max}$ si hanno due possibili valori di p_1 e quindi corrispondentemente anche due possibili valori di p_2 .

Per il decadimento in due corpi si può anche dedurre la correlazione tra l'angolo ϑ_1 che la particella figlia 1 fa nel sistema SL con la direzione della velocità della particella genitore, e l'angolo corrispondente ϑ_1^* nel sistema CM, ottenendo

$$\text{tg}\vartheta_1 = \frac{\text{sen}\vartheta_1^*}{\gamma(v/v_1^* + \text{cos}\vartheta_1^*)} \quad (\text{B.13})$$

con v modulo della velocità in SL della particella genitore, e v_1^* modulo in CM della velocità della particella figlia.

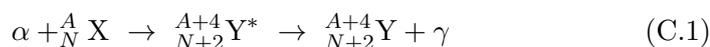
Il passo successivo, la trattazione della dinamica relativistica del decadimento in tre corpi, fornisce risultati utili ad esempio anche quando si vogliono assegnare i corretti numeri quantici di spin, parità, isospin ai mesoni.

Appendice C

La scoperta del neutrone

Nel 1930, W.Bothe ed H.Becker osservarono che se le particelle α emesse dal polonio con energie cinetiche dell'ordine dei 5 MeV¹, vengono fatte incidere su alcuni elementi leggeri quali ${}^9_4\text{Be}$, ${}^{11}_5\text{B}$ o ${}^7_3\text{Li}$, si osservava la produzione di una inusuale radiazione molto penetrante. Il berillio risultava il bersaglio più efficace in quanto, a parità di intensità di particelle α incidenti, forniva i fasci più intensi della nuova radiazione.

Questa non risultava poi sensibile all'azione di campi elettrici e per questo si pensò potesse trattarsi di radiazione γ , secondo uno schema di reazione



ma non si conoscevano radiazioni γ così penetranti, e vi erano inoltre dei dettagli dei risultati sperimentali di difficile interpretazione, supponendo si trattasse di raggi γ .

Due anni dopo I.Joliot-Curie e F.Joliot mostrarono che tale nuova radiazione era in grado di attraversare spessori di materiali pesanti quali il piombo, anche tre volte superiori a quanto potessero fare i raggi γ più energetici emessi dalle sorgenti radioattive note. Ponendo inoltre paraffina o altri bersagli idrogenati sul percorso della radiazione penetrante sconosciuta, questa estraeva da tali bersagli, protoni con energie cinetiche fino a ≈ 5.3 MeV.

Ciò poteva apparire non inconsistente con l'ipotesi di γ incidenti che diano luogo a diffusione Compton, ma le energie richieste a tali γ dovrebbero essere irrealisticamente grandi, dell'ordine di circa 50 MeV, per estrarre dai nuclei protoni con energie cinetiche fino a ≈ 5.3 MeV, ovvero con impulsi fino a ≈ 100 MeV/c. Ettore Majorana congetturò che il tipo di interazione che aveva luogo fra la nuova radiazione e i protoni, richiedeva che la prima fosse costituita da particelle neutre e non da γ .

Sulla scorta dei risultati ottenuti dai coniugi Joliot-Curie, J.Chadwick riprodusse le misure con paraffina e con altri bersagli idrogenati, quindi ricchi di

¹L'isotopo ${}^{208}\text{Po}$, con una vita media di 2.9 anni, emette α da 5.21 MeV; l'isotopo ${}^{209}\text{Po}$, con una vita media di 103 anni, emette α da 4.98 MeV; l'isotopo ${}^{210}\text{Po}$, con una vita media di 138.4 giorni, emette α da 5.41 MeV.

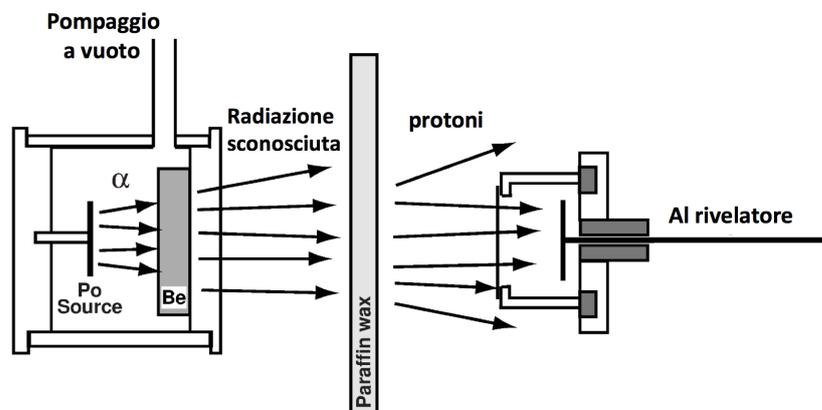


Figura C.1: Schema delle misure dei coniugi Joliot-Curie e di Chadwick.

protoni bersaglio, misurando il range dei protoni prodotti.

Egli osservò che l'ipotesi di avere γ da ≈ 50 MeV contrastava con l'applicazione della conservazione dell'energia alle reazioni coinvolte nelle misure sperimentali



in quanto

$$c^2 \left[M_\alpha + M({}^9_4\text{Be}) - M({}^{13}_6\text{C}) \right] \simeq 3727.4 + 8392.8 - 12109.6 \simeq 11 \text{ MeV} \quad (\text{C.3})$$

mentre invece le conservazioni di energia e impulso risultavano soddisfatte ipotizzando che nella reazione fosse prodotta una particella neutra di massa simile a quella del protone



per cui

$$\begin{aligned} c^2 \left[M_\alpha + M({}^9_4\text{Be}) - M({}^{12}_6\text{C}) - M_n \right] &\simeq \\ &\simeq 3727.4 + 8392.8 - 11175.0 - M_n c^2 \simeq (945.2 - M_n c^2) \text{ MeV} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

da cui si ottiene che se $M_n = M_p$ allora l'energia cinetica massima della particella neutra n prodotta è pari a $\simeq 6$ MeV.

Chadwick provò così che i risultati ottenuti non erano consistenti col fatto che la nuova radiazione fosse costituita da raggi γ , in quanto ciò avrebbe comportato la violazione della conservazione di energia e impulso, mentre erano invece consistenti con l'avvenuta produzione di particelle di massa sostanzialmente equivalente a quella dei protoni, ma elettricamente neutre, come congetturato da Majorana, ovvero i neutroni.

Appendice D

Applicazioni decadimento α

D.0.1 Convertitore termoelettrico a plutonio

Il ^{238}Pu decade α , con un tempo di dimezzamento $T_{1/2} \simeq 88.03$ y, rilasciando un'energia cinetica $E = 5.49$ MeV. Il nucleo figlio ^{234}U ha una vita media $\tau_U \simeq 3.5 \times 10^5$ y. L'energia così prodotta può essere convertita in energia elettrica tramite un generatore radiotermico (RTG) e quello che equipaggia la sonda spaziale Voyager 2 ha un'efficienza del 5.5% in questo processo.

Il Voyager 2, lanciato il 20/08/1977, raggiunse la minima distanza da Saturno il 26/08/1981. Saturno dista dal Sole 9.5 U.A., dove 1 U.A. corrisponde alla distanza fra Terra e Sole.

a) Si calcoli con quanto plutonio era stato equipaggiato l'RTG del Voyager 2 sapendo che questo, al momento di massimo avvicinamento a Saturno, disponeva di una potenza elettrica $W_{Sat} = 395$ W.

b) Quale potenza elettrica aveva ancora disponibile il Voyager 2 quando, il 24/08/1989 sorvolò alla minima distanza Nettuno, che dista 30.1 U.A. dal Sole? Quale potenza elettrica ha ancora disponibile oggi Voyager 2?

c) Sapendo che i pannelli solari che equipaggiavano lo Skylab avevano un'area attiva di 730 m² e gli fornivano 10.5 kW, quale area avrebbero dovuto avere pannelli solari equivalenti che avessero equipaggiato Voyager 2, in grado di alimentarlo come ha fatto l'RTG?

Soluzione:

a) Il tempo di dimezzamento $T_{1/2} \simeq 88.03$ y di ^{238}Pu corrisponde ad una vita media

$$\tau_\alpha = T_{1/2}/\ln 2 \simeq 88.03/0.6931 = 127 \text{ y.}$$

Dato che $\tau_\alpha/\tau_U \simeq 3.6 \times 10^{-4} \ll 1$, si può considerare il nucleo figlio ^{234}U come praticamente stabile e trascurare il contributo dei suoi decadimenti al funzionamento del sistema RTG.

Supponendo che l'RTG sia stato caricato di plutonio al momento del lancio del Voyager 2, si associ ad esso il tempo $t_0 = 0$ giorni, e sia $t_1 = 1467$ giorni

il tempo associato al sorvolo di Saturno da parte del Voyager 2. Si calcoli ora, tenendo conto dell'efficienza del sistema RTG, il numero $\Delta N(t_1)$ di decadimenti al secondo che garantiscono una potenza di 395 Watt, ricordando che $1 \text{ Watt} = 6.2415 \times 10^{12} \text{ MeV/s}$

$$\Delta N(t_1) = \frac{395 \times 6.2415 \times 10^{12}}{5.49 \times 0.055} \simeq 8.1649 \times 10^{15} \quad (\text{D.1})$$

Lo scopo è però risalire alla massa di plutonio con cui è stato caricato il sistema RTG, ovvero al numero N_0 di atomi di plutonio presenti all'istante t_0 . Si esprime quindi $\Delta N(t_1)$ tenendo conto della [4.1](#), con $\lambda = \tau_\alpha$

$$\begin{aligned} \Delta N(t_1) &= N_0 e^{-t_1/\tau_\alpha} - N_0 e^{-(t_1+1)/\tau_\alpha} = N_0 \left(e^{-t_1/\tau_\alpha} - e^{-t_1/\tau_\alpha} e^{-1/\tau_\alpha} \right) = \\ &= N_0 e^{-t_1/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right) \quad \text{da cui,} \\ N_0 &= \Delta N(t_1) e^{t_1/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

e sostituendo i valori

$$N_0 \simeq 3.37524 \times 10^{25}$$

Quindi, essendo pari a 244.06 g la massa molare del plutonio e ricordando il numero di Avogadro, si ha che la quantità di ^{238}Pu con cui è stato inizialmente caricato il dispositivo RTG ammonta a circa 13.7 kg.

b) Per rispondere alla seconda domanda si ponga $t_2 = 4387$ giorni il tempo associato al sorvolo di Nettuno da parte del Voyager 2. Poichè la potenza disponibile grazie al dispositivo RTG è in qualsiasi momento t_i sempre proporzionale ad $N_0 e^{-t_i/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right)$, si ottiene la potenza disponibile al momento del sorvolo di Nettuno come

$$W_{Net} = W_{Sat} \frac{e^{-t_2/\tau_\alpha}}{e^{-t_1/\tau_\alpha}} \simeq 370.9 \text{ W} \quad (\text{D.3})$$

Similmente, la potenza ancora disponibile al 1 marzo 2018, supponendo immutata l'efficienza del dispositivo RTG, ammonta a circa 296 W.

c) Assumendo ragionevolmente che l'energia luminosa irradiata dal Sole scali come l'inverso del quadrato della distanza dal Sole stesso, detta $A_1 = 730 \text{ m}^2$ l'area attiva delle celle fotovoltaiche che fornivano allo Skylab 10.5 kW a una distanza di 1 U.A. dal Sole, l'area che dovrebbero avere celle equivalenti per fornire a Voyager 2 395 W a 9.5 U.A. (Saturno), equivale ad

$$A_2 = 730 \times \frac{395}{10500} \times 9.5^2 \simeq 2478.5 \text{ m}^2$$

L'area necessaria alla distanza di Nettuno sarebbe invece

$$A_3 = 730 \times \frac{370.9}{10500} \times 30.1^2 \simeq 23361.8 \text{ m}^2$$

quindi circa 9.5 volte maggiore e pari a quella di circa 3.3 campi da calcio.

20.3 ALPHA-DECAY APPLICATIONS

Alpha decays from long-lived heavy nuclei have two important characteristics that provide for important applications: they are emitted at a unique energy (in contrast to β decays) and (if the half-life is long enough) the emission rate is virtually constant.

Let's consider, for example, the α decay of ^{238}Pu ($t_{1/2} = 86 \text{ y}$), which is produced from the decay of ^{238}Np following neutron capture by ^{237}Np . The Q value is about 5.6 MeV and the decay rate of 1 g of ^{238}Pu would be

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \lambda N &= \frac{0.693}{t_{1/2}} \cdot \frac{1 \text{ g}}{238 \text{ g/mol}} 6 \times 10^{23} \text{ atoms/mol} \\ &= (2.6 \times 10^{-10} \text{ decays/s})(2.5 \times 10^{21} \text{ atoms/g}) \\ &= 6 \times 10^{11} \text{ decays/s/g} \end{aligned}$$

Appendice F

Esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni

Gli esperimenti che Marcello Conversi, Ettore Pancini e Oreste Piccioni condussero a Roma a più riprese tra il 1943 e il 1947 furono cruciali in quanto permisero di evidenziare che le particelle penetranti provenienti dalla radiazione cosmica non erano, come inizialmente si riteneva, pioni, ovvero mesoni di Yukawa.

Gli esperimenti erano stati effettuati allo scopo di studiare se ci fossero differenze fra i processi di assorbimento della radiazione penetrante in diversi materiali, in funzione del segno della carica. Una particella di carica negativa

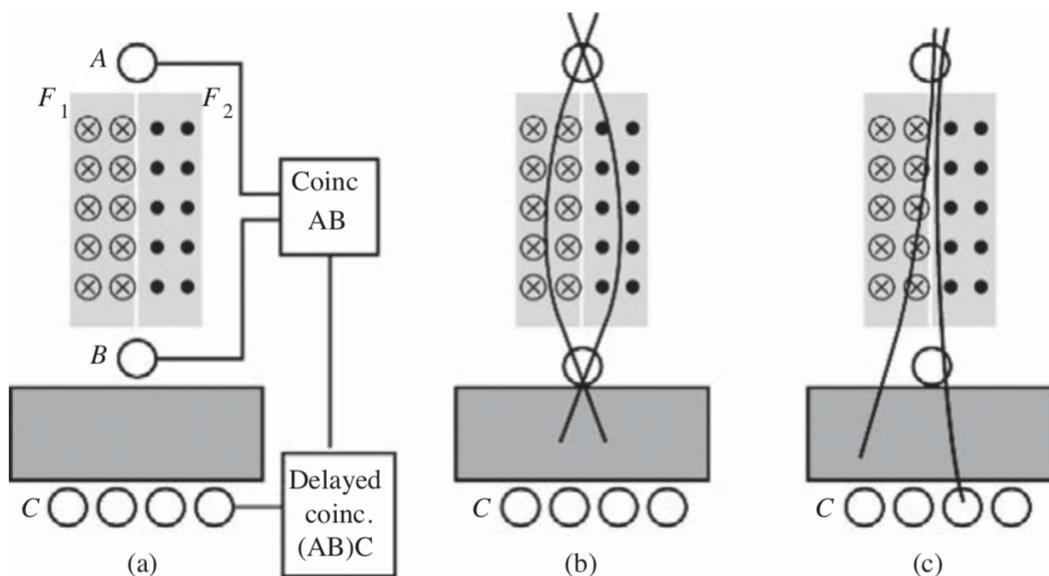


Figura F.1: Schema dell'esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni.

dovrebbe essere catturata da un nucleo e nel caso in cui si tratti della par-

ticella mediatrice della forza nucleare dovrebbe interagire immediatamente ed efficacemente col nucleo stesso, prima di decadere spontaneamente. Una particella positiva, al contrario, dovrebbe essere respinta dal nucleo e decadere nello spazio vuoto fra atomo e atomo dell'assorbitore.

La struttura dell'apparato, una riproduzione completa del quale è mostrata in figura [F.2](#), si avvale di due blocchi di ferro, indicati con F_1 ed F_2 in figura [F.1](#) magnetizzati in versi opposti, normali al piano del disegno, allo scopo di focalizzare le particelle di un segno, come in (b), e defocalizzare quelle di segno opposto, come in (c).

La condizione di *trigger* dell'esperimento era la seguente: i due contatori Geiger A e B, posizionati al di sopra e al di sotto dei blocchi magnetizzati, devono produrre due segnali in coincidenza temporale stretta, mentre uno dei contatori Geiger posti sotto lo strato di materiale assorbitore deve produrre un segnale ritardato con un ritardo Δt compreso nell'intervallo $1 \mu s < \Delta t < 4.5 \mu s$. Questa condizione garantisce che l'energia delle particelle che la soddisfano sia sufficiente a permettere loro di attraversare i blocchi di ferro magnetizzato, ma non così grande da impedire che possano poi arrestarsi nel materiale assorbitore sottostante. Essa garantisce inoltre che nell'intervallo energetico così selezionato soltanto particelle di un dato segno di carica possano colpire e attivare sia il contatore Geiger A che il successivo B, e infine che le particelle fermatesi nell'assorbitore possano decadere entro un intervallo temporale compatibile con quello che con altri esperimenti, Rossi e Nereson avevano stimato coincidere con la vita media delle particelle penetranti che giungono al suolo per effetto della radiazione cosmica.

Riferendosi alla figura [F.1](#), in (b) si vedono le traiettorie di due particelle del segno "giusto" e nell'intervallo energetico opportuno a far produrre segnali in coincidenza stretta sia al Geiger A che al Geiger B, ma non a uno dei Geiger C. In (c) è illustrato il caso di particelle con carica del segno "sbagliato". In un primo esperimento effettuato nel 1945 gli autori utilizzarono un assorbitore di ferro e il risultato fu che le particelle positive catturate nell'assorbitore vi decadevano come se fossero state nel vuoto mentre invece le particelle negative non mostravano decadimento, come ci si spettava se fossero state catturate dai nuclei e avessero immediatamente interagito con questi, producendo quindi particelle che se rivelate, avrebbero dato segnali prima del ritardo di $1 \mu s$, a partire dal quale era attiva la coincidenza ritardata.

Gli autori ripeterono l'esperimento nel 1946 con un assorbitore di carbonio e con loro sorpresa, trovarono che sia le particelle positive che quelle negative decadevano come se si fossero trovate nel vuoto. Una ricerca sistematica mostrò dunque che le particelle penetranti dovute alla radiazione cosmica non erano efficacemente assorbite dai nuclei di materiali con numeri atomici troppo bassi.

Le previsioni di accurati calcoli dicevano però che se si fosse trattato di pioni

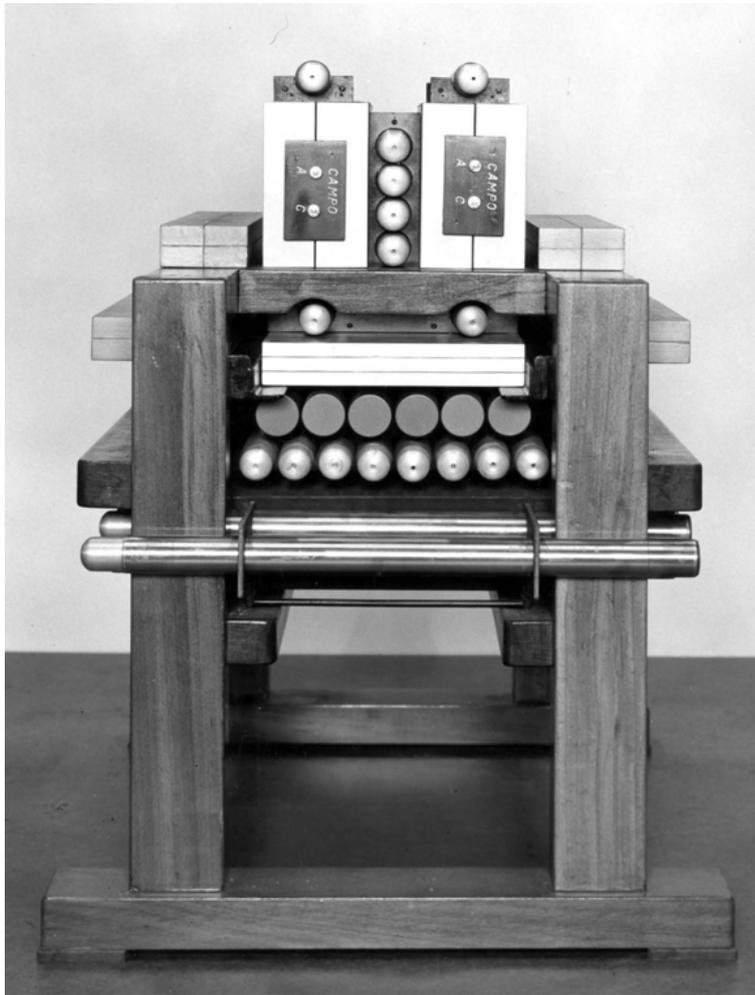


Figura F.2: Riproduzione dell'apparato di Conversi, Pancini e Piccioni.

avrebbero dovuto interagire così fortemente da essere catturati dai nuclei di qualsiasi sostanza. Si poteva dunque concludere che le particelle penetranti dovute alla radiazione cosmica e studiate nell'esperimento non erano mesoni di Yukawa.

Erano infatti muoni μ !

Appendice G

Instabilità di un nucleo prolato

Si parta da un nucleo genitore sferico di raggio $R_0 = r_0 A^{1/3}$ e si immagini di deformarlo leggermente, riferendosi a un sistema cartesiano ortogonale centrato nel suo baricentro, lungo un asse, ad esempio lungo z , in modo che assuma almeno approssimativamente la forma di un ellissoide di rotazione prolato di equazione

$$\frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad (\text{G.1})$$

La supposta incomprimibilità della materia nucleare implica che la defor-

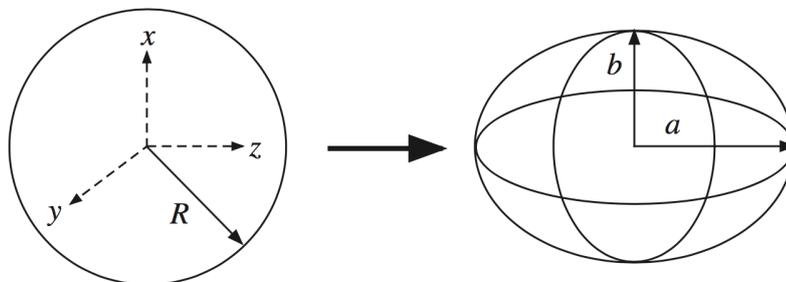


Figura G.1: Deformazione da sfera a ellissoide prolato.

mazione mantenga inalterato il volume

$$V = \frac{4}{3} \pi a b^2 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \quad (\text{G.2})$$

Indicando con ϵ il termine perturbativo positivo che interviene a modificare il raggio R_0 della goccia sferica si può allora scrivere

$$a = R_0 (1 + \epsilon) \quad (\text{G.3})$$

e di conseguenza, per la [G.2](#)

$$b = \frac{R_0}{(1 + \epsilon)^{1/2}} < a \quad (\text{G.4})$$

La deformazione produce una variazione dell'energia di legame del nucleo. Detta quindi $B^*(A, Z)$ l'energia del nucleo perturbato si ha che se la differenza

$$\Delta B^*(A, Z) = B(A, Z) - B^*(A, Z) \quad (\text{G.5})$$

è negativa, allora il nucleo è stabile rispetto alla deformazione e una volta cessata la perturbazione, diseccitandosi, ritorna all'originaria condizione di equilibrio con forma sferica di raggio R_0 . Se invece $\Delta B^*(A, Z) > 0$, allora il nucleo è instabile rispetto alla deformazione e se questa viene esaltata fino al punto da provocare la scissione del nucleo in due frammenti di masse confrontabili, si ha il processo di fissione indotto da una perturbazione esterna. Per proseguire ci si riferisca sempre alla formula semiempirica di Weizsäcker e si osservi che i termini di volume, di simmetria e di accoppiamento, essendo dipendenti dalla densità del nucleo che nell'ipotesi di incomprimibilità rimane immutata per deformazioni del volume, rimangono anch'essi sostanzialmente immutati dalla deformazione. Nel calcolo della differenza fra le energie di legame intervengono quindi attivamente soltanto i termini di superficie e coulombiano

$$\Delta B^*(A, Z) = B_S(A) + B_C(A, Z) - B_S^*(A) - B_C^*(A, Z) \quad (\text{G.6})$$

Il termine coulombiano del nucleo deformato è chiaramente minore di quello del nucleo sferico in quanto la deformazione implica un aumento delle distanze medie fra i protoni; il termine di superficie del nucleo deformato è invece maggiore del suo omologo per il nucleo non deformato, in quanto la deformazione implica un aumento della superficie.

Supponendo che la carica elettrica sia uniformemente distribuita entro il volume dell'ellissoide di rotazione si ha

$$\begin{cases} \rho_Z(\vec{r}) = \frac{3Ze}{4\pi ab^2} & \text{per, } \frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} \leq 1 \\ \rho_Z(\vec{r}) = 0 & \text{per, } \frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} > 1 \end{cases} \quad (\text{G.7})$$

Calcolando quindi le energie di superficie e coulombiana del nucleo deformato si ottiene

$$B_S^*(A) = \beta_S(\epsilon) B_S(A) \quad , \quad B_C^*(A, Z) = \beta_C(\epsilon) B_C(A, Z) \quad (\text{G.8})$$

con

$$\begin{cases} \beta_C(\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{R_0}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \ln \frac{a + (a^2 - b^2)^{1/2}}{a - (a^2 - b^2)^{1/2}} \\ \beta_S(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{R_0^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{a^2 b}{R_0^2 (a^2 - b^2)^{1/2}} \arccos \left(\frac{b}{a} \right) \end{cases} \quad (\text{G.9})$$

Supposto ragionevolmente piccolo il parametro ϵ di deformazione, si possono sviluppare in serie le [G.9](#), fermandosi al primo termine non nullo in potenze di ϵ

$$\begin{cases} \beta_C(\epsilon) \simeq 1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 \\ \beta_S(\epsilon) \simeq 1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 \end{cases} \quad (\text{G.10})$$

ottenendo quindi per $\Delta B^*(A, Z)$

$$\Delta B^*(A, Z) \simeq \frac{1}{5}\epsilon^2 A^{2/3} \left[2b_S - b_C \frac{Z^2}{A} \right] \text{ MeV} \quad (\text{G.11})$$

Per $\Delta B^*(A, Z) = 0$ la goccia di liquido nucleonico è in equilibrio instabile, da cui si ricava il valore critico del rapporto Z^2/A

$$\left(\frac{Z^2}{A} \right)_0 = \frac{2b_S}{b_C} \simeq 49.4 \quad (\text{G.12})$$

Appendice H

Leggi di conservazione e loro violazioni

Conservation quantity or symmetry	Strong Interaction	EL-Mag	Weak
Mass m /Energy E	+	+	+
Momentum p			
Angular Momentum L, S			
Charge Q	+	+	+
Isospin T	+	-	-
Strangeness S	+	+	-
Charm C			
Beauty B , Topness T			
Parity P	+	+	-
Charge Conjugation C	+	+	-
Baryon Number B	+	+	+
Lepton Number (s)		+	+
Hypercharge Y	+	+	-
Time Reversal T	+	+	-
Charge Parity CP	+	+	-
CPT	+	+	+

Figura H.1: Leggi di conservazione e loro violazioni per le interazioni fondamentali: ”+” significa conservazione e ”-” significa violazione.

Bibliografia

- [1] A. Das T. Ferbel, Introduction to Nuclear and Particle Physics, World Scientific, 2003, (2a edizione)
- [2] E. Fermi, Nuclear Physics, University of Chicago Press, 1950, (Edizione R.)
- [3] K.S. Krane., Introductory Nuclear Physics, John Wiley & Sons, 1988
- [4] B. Povh et al., Particles and Nuclei - An introduction to the physical concepts, Springer, 2015, (7a edizione)
- [5] E. Segrè, Nuclei e Particelle, Zanichelli, 1982, (2a edizione)
- [6] C. Villi et al., Lezioni di Istituzioni di Fisica Nucleare, CLEUP - PD, 1976, (Edizione aggiornata)