Geometria 1

I appello d'esame

Anno accademico 2021-2022

31/1/2022

1) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$v_1 = (1,0,1,1),\ v_2 = (1,1,1,1),\ v_3 = (2,2,4,3),\ v_4 = (-1,1,1,0).$$

   (a) Trovare la dimensione di W, estrarre una sua base dall'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e prolungarla ad una base di $\mathbb{R}^4$.

   (b) Descrivere, se esiste, un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ avente W come nucleo.

2) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

   (a) Dimostrare che A è diagonalizzabile e trovare una matrice diagonale D, e una matrice invertibile S e la sua inversa, tali che $S^{-1}AS = D$.

   (b) Far vedere che esiste una matrice invertibile M tale che ${}^tMAM = D$.

   (c) Sia b la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ definita da $b(x,y) = {}^txAy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$. Dimostrare che b è un prodotto scalare e scrivere la funzione norma associata.

   (d) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, rispetto al prodotto scalare del punto precedente.

3) Si consideri il sistema dipendente dal parametro reale k

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ (k+2)x + 2y + 4z = 2 \\ (1+2k)x + 3y + 2z = 1 + 2k. \end{cases}$$

Determinare per quali k il sistema è compatibile, e per tali k descrivere l'insieme delle soluzioni, dicendo che tipo di insieme è, e la sua dimensione.