Ex1

martedì 1 febbraio 2022 11:52

$$W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

$v_1 = (1,0,1,1)$, $v_2 = (1,1,1,1)$

$v_3 = (2,2,4,3)$, $v_4 = (-1,1,1,0)$

ⓐ DIMENSIONE DI W? ESTRARRE BASE DA $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$. COMPLETARE A UNA BASE DI $\mathbb{R}^4$?

CONSIDERIAMO LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 2&2&4&3 \\ -1&1&1&0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim W = rg(A)$.

$\rightsquigarrow$ APPLICHIAMO L'ALGORITMO DI GAUSS PER RIDURRE LA MATRICE PER RIGHE.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1}&0&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 2&2&4&3 \\ -1&1&1&0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1}&0&1&1 \\ 0&\boxed{1}&0&0 \\ 0&0&2&1 \\ 0&1&2&1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{}$$

$$\to \begin{pmatrix} \boxed{1}&0&1&1 \\ 0&\boxed{1}&0&0 \\ 0&0&\boxed{2}&1 \\ 0&0&2&1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_3]{} \begin{pmatrix} \boxed{1}&0&1&1 \\ 0&\boxed{1}&0&0 \\ 0&0&\boxed{2}&1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim W = rg(A) = 3$.

INOLTRE, VISTO CHE ABBIAMO ANNULLATO LA QUARTA RIGA UTILIZZANDO LE PRIME 3,

(E CHE L'ABBIAMO FATTO CON L'ALGORITMO DI GAUSS, SENZA SCAMBIARE RIGHE!)

ABBIAMO CHE $v_4 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

! INFATTI, $v_4 = v_3 - v_2 - 2v_1$

$\Rightarrow W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

VISTO CHE $\dim W = 3$ E $\{v_1, v_2, v_3\}$ SONO TRE GENERATORI, DEVONO FORMARE UNA BASE DI W.

RIMANE DA COMPLETARE $\{v_1,v_2,v_3\}$ A UNA BASE DI $\mathbb{R}^4$.

CONSIDERIAMO LA BASE CANONICA $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. ALLORA,

L'INSIEME $\{v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_3, e_4\}$

È UN INSIEME DI GENERATORI DI $\mathbb{R}^4$:

QUINDI, POSSIAMO ESTRARNE UNA BASE CON L'ALGORITMO DI ELIMINAZIONE.

- $\{v_1,v_2,v_3\}$ BASE DI $W \Rightarrow v_1,v_2,v_3$ L.I. ✓
- e_1 L.I. DA $\{v_1,v_2,v_3\}$??

VERO $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ e_1 \end{pmatrix} \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1&0&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 2&2&4&3 \\ 1&0&0&0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SVOLGO} \\ \text{L'ULTIMA} \\ \text{RIGA}}}{=} - \begin{vmatrix} 0&1&1 \\ 1&1&1 \\ 2&4&3 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ R_2 \to R_2 - R_1}}{=} - \begin{vmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&0 \\ 2&4&3 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SVOLGO} \\ 2^a \text{ RIGA}}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1&1 \\ 4&3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -1 \neq 0 \ ✓.$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3, e_1\}$ 4 VETTORI L.I. DI $\mathbb{R}^4$,

$\dim \mathbb{R}^4 = 4 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3, e_1\}$ BASE DI $\mathbb{R}^4$ ✓✓✓

NOTA:

METODO ALTERNATIVO ERA USARE IL LEMMA DELLO SCAMBIO, MA UN VETTORE ALLA VOLTA!

CONSIDERO LA BASE $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

$v_1 = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 + 1e_4 \to \{v_1, e_2, e_3, e_4\}$ BASE DI $\mathbb{R}^4$.

$v_2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NON } e_1!!!}}{1\, v_1} + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 \to \{v_1, v_2, e_3, e_4\}$ BASE DI $\mathbb{R}^4$.

$v_3 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NON } e_1!}}{0 v_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NON } e_2!}}{2 v_2} + 1 e_3 + 1 \cdot e_4 \to \{v_1, v_2, v_3, e_4\}$ BASE DI $\mathbb{R}^4$.

(b) $\exists f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ LINEARE, $\operatorname{Ker} f = W$?

UTILIZZIAMO IL TEOREMA DELLA DETERMINAZIONE DELL'APPLICAZIONE LINEARE:

VISTO CHE $\{v_1, v_2, v_3, e_1\}$ È UNA BASE DI $\mathbb{R}^4$,

DEFINIRE f È EQUIVALENTE A SCEGLIERE $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(e_1)$.

! DAL TEOREMA DELLA DIMENSIONE, ABBIAMO $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Dom} f)$.

$\operatorname{Ker} f = W$, $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^4$, $\dim W = 3$, $\dim \mathbb{R}^4 = 4$

$\to 3 + \dim \operatorname{Im} f = 4 \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 1$.

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 1 \leq 2 = \dim(\underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{CODOMINIO DI } f})$

$\Rightarrow$ LE DIMENSIONI NON CI CREANO PROBLEMI, (AVREMO $\operatorname{Im} f \subsetneq \mathbb{R}^2$) f POTREBBE ESISTERE.

SUPPONIAMO CHE UNA TALE f ESISTA: CAPIAMO CHE CONDIZIONI ABBIAMO PER $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)$.

$W = \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow W \subseteq \operatorname{Ker} f$ E $\operatorname{Ker} f \subseteq W$.

$W \subseteq \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(w) = (0,0) \ \forall w \in W$.

$[w \in W \Leftrightarrow w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.]$

$\Rightarrow [W \subseteq \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = (0,0).]$

! $\operatorname{Ker} f \subseteq W$? CI RAGIONIAMO DOPO.

SAPPIAMO $\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(e_1) \rangle$,

E $f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = (0,0)$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \langle f(e_1) \rangle$.

ABBIAMO CALCOLATO $\dim \operatorname{Im} f = 1$

$\Rightarrow$ DOBBIAMO SUPPORRE $f(e_1) \neq (0,0)$.

PRENDIAMO AD ESEMPIO $f(e_1) = (1,0)$.

QUESTA SCELTA SODDISFA $\operatorname{Ker} f \subseteq W$?

$x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow x \in W$?

$x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = (0,0)$.

$x \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda e_1$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) = \lambda_1 \underbrace{f(v_1)}_{=(0,0)} + \lambda_2 \underbrace{f(v_2)}_{=(0,0)} + \lambda_3 \underbrace{f(v_3)}_{=(0,0)} + \lambda \underbrace{f(e_1)}_{=(1,0)} =$$

$= (\lambda, 0)$. QUINDI:

$f(x) = (0,0) \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, PER $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x \in W$ ✓✓✓.

ERGO, L'APPLICAZIONE LINEARE CON

$f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = (0,0)$, $f(e_1) = (1,0)$

È UN ESEMPIO DI APPLICAZIONE CHE STAVAMO CERCANDO ✓✓✓.

! UNA VOLTA IMPOSTATI $f(v_i) = 0$ PER $i = 1,2,3$, E $f(e_1) \neq 0$, QUALSIASI $f(e_1)$ ANDAVA BENE! ☺