Ex2

martedì 1 febbraio 2022 12:49

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

(a) A DIAGONALIZZABILE? TROVARE D DIAGONALE, S INVERTIBILE t.c. $D = S^{-1}AS$.

A SIMMETRICA $\Rightarrow L_A$ AUTOAGGIUNTO

$\underset{\text{TEOREMA SPETTRALE}}{\Longrightarrow} L_A$ ($\in A$) DIAGONALIZZABILE ✓.

S E D?

- $S \Longleftrightarrow$ BASE $\mathcal{B}$ DI AUTOVALORI ($\mathcal{E}$ BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3$) $S = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$
- $D \Longleftrightarrow$ AUTOVALORI DI A (SULLA DIAGONALE HA GLI AUTOVALORI)

STEP 1: AUTOVALORI DI A?

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{SVOLGO 2ª RIGA}}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right).$$

AUTOVALORI $\Longleftrightarrow P_A(\lambda) = 0$.

$\leadsto P_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow (2-\lambda) = 0 \lor (2-\lambda)^2 - 1 = 0$.

- $(2-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 2$
- $(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow (2-\lambda)^2 = 1 \Longleftrightarrow 2-\lambda = \pm 1$ $\Longleftrightarrow \lambda = 2 \pm 1$.

$\Longrightarrow$ A HA AUTOVALORI $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

! HA TUTTI AUTOVALORI DISTINTI $\Rightarrow \forall i \ 1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i) = 1$ $\Rightarrow m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) \ \forall i \Rightarrow$ A È DIAGONALIZZABILE ///.

STEP 2: AUTOSPAZI DI A?

- $Aut(\lambda_1)$? ($\lambda_1 = 1$)

$$A - \lambda_1 I = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Aut(\lambda_1) = Ker(A - I) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x_1, 0, x_1) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} = <\underbrace{(1,0,1)}_{\text{PRIMO AUTOVETTORE DELLA BASE}}>$$

- $Aut(\lambda_2)$? ($\lambda_2 = 2$)

$$A - \lambda_2 I = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Aut(\lambda_2) = Ker(A - 2I) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} -x_1 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ (0, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} = <\underbrace{(0,1,0)}_{\text{SECONDO AUTOVETTORE DELLA BASE}}>. ✓$$

- $Aut(\lambda_3)$? ($\lambda_3 = 3$)

$$A - \lambda_3 I = A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Aut(\lambda_3) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} -x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x_1, 0, -x_1) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} = <\underbrace{(1,0,-1)}_{\text{TERZO AUTOVETTORE DELLA BASE}}>$$

STEP 3: CONCLUSIONE

$\{(1,0,1), (0,1,0), (1,0,-1)\}$ BASE DI AUTOVETTORI

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1° AUTOVETT, 2° AUTOVETT, 3° AUTOVETT

AUTOVALORE DI (1 0 1), AUTOVALORE DI (0 1 0), AUTOVALORE DI (1 0 -1)

INVERSA DI S?

UTILIZZIAMO IL METODO DI GAUSS:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to -\frac{1}{2} R_3]{}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_3]{}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

(I | S^{-1})

$$\Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} ///.$$

(b) FAR VEDERE CHE ESISTE UNA MATRICE M t.c. ${}^tMAM = D$

SE PRENDIAMO UNA BASE ORTONORMALE $\mathcal{B}'$ DI AUTOVETTORI, E CONSIDERIAMO $M = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}'}$, ABBIAMO M ORTOGONALE

$$\to D = \underbrace{M^{-1}}_{={}^tM} A M = {}^tM A M ///.$$

! VISTO CHE GLI AUTOSPAZI SONO ORTOGONALI, BASTA CALCOLARE $\frac{(1\,0\,1)}{\|(1\,0\,1)\|}, \frac{(0\,1\,0)}{\|(0\,1\,0)\|}, \frac{(1\,0\,-1)}{\|(1\,0\,-1)\|}$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(c) $b(x,y) = {}^tx A y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$.

b PRODOTTO SCALARE? FUNZIONE NORMA ASSOCIATA?

! A DIAGONALIZZABILE, CON TUTTI GLI AUTOVALORI STRETTAMENTE POSITIVI $\Rightarrow b$ PRODOTTO SCALARE ✓

ALTRIMENTI:

$$b(x,y) = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2x_1y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

- $b = \sum a_{ij} x_i y_j \to$ BILINEARE ✓.
- A SIMMETRICA $\to b$ SIMMETRICA ✓✓
- $b(x,x) \geq 0$? $b(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$?

$$b(x,x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3 =$$

$$= x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + (x_1 - x_3)^2 \geq 0 ✓.$$

$$b(x,x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = 0 ✓✓.$$

$\Rightarrow b$ PRODOTTO SCALARE ///.

- NORMA ASSOCIATA A b?

$$\|x\| = \sqrt{b(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + (x_1 - x_3)^2}.$$

(d) BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^3$ RISPETTO A b?

ORTONORMALIZZIAMO LA BASE CANONICA UTILIZZANDO IL PROCESSO DI GRAHAM-SCHMIDT:

- $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2 \cdot 0 + 0 + 1^2}} e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$

- $e_2' = e_2 - b(u_1, e_2) u_1$. $\quad b(u_1, e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} b(e_1, u_2)$

$b(e_1, e_2) = \left(\text{POSIZIONE } 1,2 \text{ DI } A\right) = 0$

$\to e_2' = e_2 - 0 \cdot u_1 = e_2$

$u_2 = \frac{1}{\|e_2'\|} e_2 = \frac{1}{\sqrt{0 + 2 \cdot 1^2 + 0}} e_2' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

- $e_3' = e_3 - \underbrace{b(e_3, u_1)}_{=(\text{POSIZIONE } 3,1 \text{ DI } A)} u_1 - \underbrace{b(e_3, u_2)}_{=(\text{POSIZIONE } 3,2 \text{ DI } A)} u_2 =$

$= (0,0,1) - u_1 - 0 \cdot u_2 = (0,0,1) - \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$= \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

$u_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|}. \quad \|e_3'\| = \sqrt{0^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow u_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$\Rightarrow$ BASE ORTONORMALE $\{u_1, u_2, u_3\}$ ///