Ex3

martedì 1 febbraio 2022 16:45

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ (k+2)x + 2y + 4z = 2 \\ (1+2k)x + 3y + 2z = 1+2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k+2 & 2 & 4 \\ 1+2k & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ MATRICE DEI COEFFICIENTI}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ k+2 & 2 & 4 & 2 \\ 1+2k & 3 & 2 & 1+2k \end{array}\right) \text{ MATRICE COMPLETA}$$

PER QUALI K IL SISTEMA È COMPATIBILE?

IL SISTEMA È COMPATIBILE $\overset{\text{ROUCHÉ CAPELLI}}{\iff}$ IL RANGO DELLA MATRICE COMPLETA È UGUALE AL RANGO DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI.

UTILIZZIAMO L'ALGORITMO DI GAUSS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ k+2 & 2 & 4 & 2 \\ 1+2k & 3 & 2 & 1+2k \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - (1+2k)R_1]{R_2 \to R_2 - (k+2)R_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -k & -2k & -k \\ 0 & 2-2k & -4k & 0 \end{array}\right). \quad -k \text{ È IL PROSSIMO PIVOT} \iff -k \neq 0.$$

$$\boxed{k=0} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBILE, } rg(A|b) = rg(A) = 2.$$

$$\boxed{k \neq 0}$$

$$\xrightarrow{} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2-2k & -4k & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - (2-2k)R_2}$$

$R_2 \to -\frac{1}{k}R_2$

NON POTEVO FARLO SE $k=0$!

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2k-2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBILE, $rg(A) = rg(A|b) = 3$.

SPAZI DELLE SOLUZIONI?

$\boxed{k=0}$

$$rg(A) = rg(A|b) = 2$$

$$\Rightarrow \dim\begin{pmatrix}\text{SPAZIO} \\ \text{DELLE} \\ \text{SOLUZIONI}\end{pmatrix} \underset{\text{ROUCHÉ CAPELLI}}{=} \underset{\text{RANGO MASSIMO DI }(A|b)}{3} - \underset{\text{RANGO DI }(A|b)}{2} = 1$$

$\Rightarrow$ LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI È UNA RETTA AFFINE (SPAZIO AFFINE DI DIMENSIONE 1) DI $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 0 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\text{SPAZIO} \\ \text{DELLE} \\ \text{SOLUZIONI}\end{pmatrix} = \{(1-2z, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= (1,0,0) + \{(-2z, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= (1,0,0) + \langle(-2,0,1)\rangle.$$

$\boxed{k \neq 0}$

$$rg(A) = rg(A|b) = 3$$

$$\Rightarrow \dim\begin{pmatrix}\text{SPAZIO} \\ \text{DELLE} \\ \text{SOLUZIONI}\end{pmatrix} \underset{\text{ROUCHÉ CAPELLI}}{=} \underset{\text{RANGO MASSIMO DI } A|b}{3} - \underset{\text{RANGO DI } A|b}{3} = 0$$

$\Rightarrow$ LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI È UN SINGOLO PUNTO DI $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y + 2z = 1 \\ -4z = 2k-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 1 \\ z = \frac{1-k}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - 2z = k \\ z = \frac{1-k}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ L'UNICA SOLUZIONE (K È FISSATO!!) È $\left\{\left(0, k, \frac{1-k}{2}\right)\right\}$. ✓✓