

Esame di Analisi matematica I: esercizi
A.a. 2021-2022, sessione invernale, III appello
Corso prof. Cuccagna

COGNOME _____ NOME _____

N. Matricola _____ Anno di corso _____

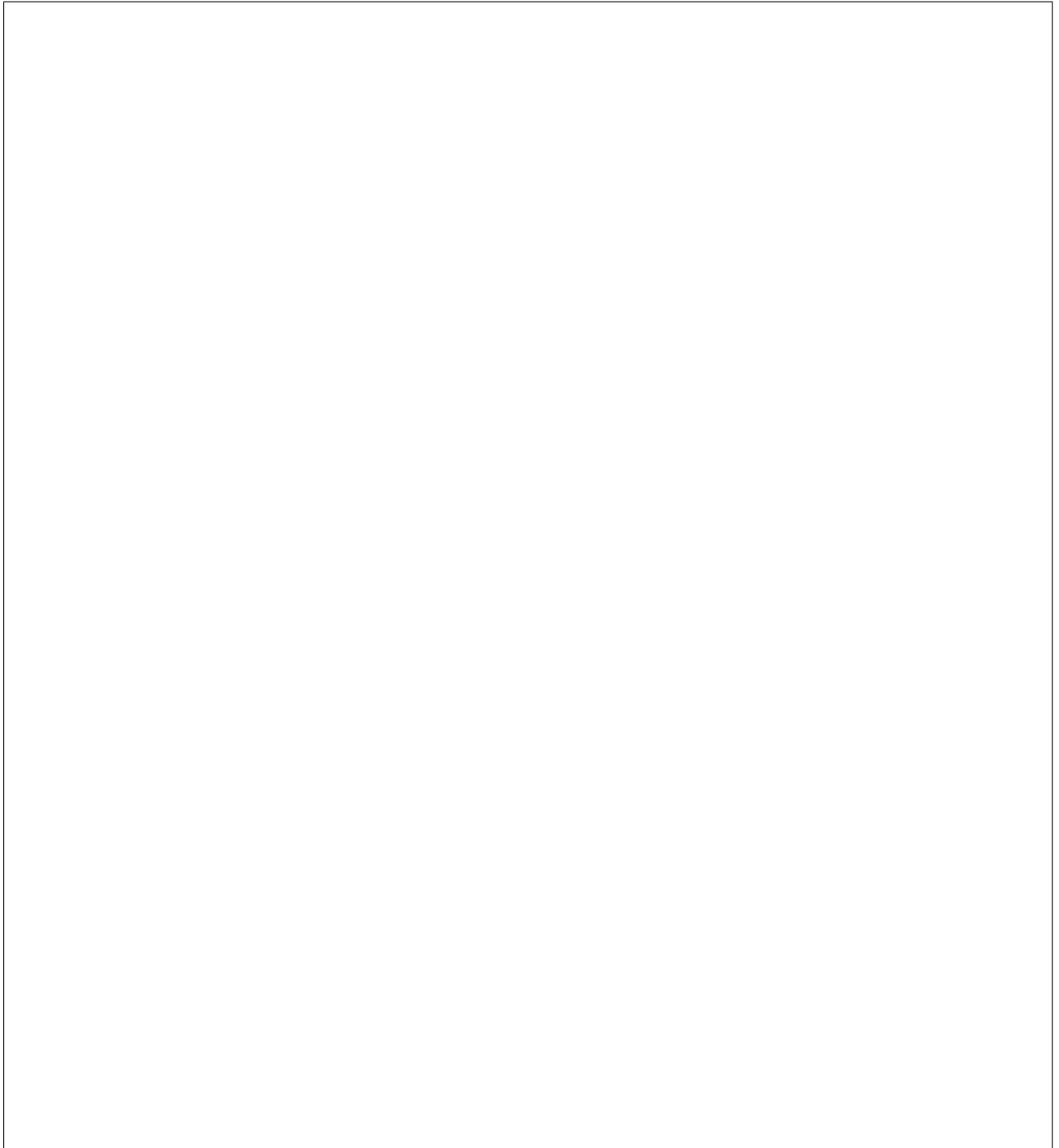
ESERCIZIO N. 1. Per $[t] \in \mathbb{Z}$ la parte intera di t , definita da $[t] \leq t < [t] + 1$, si consideri il limite

$$L := \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\tanh(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \int_1^x [t]^{-1/2} dt}.$$

(i) Si dimostri che esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che $\int_1^x [t]^{-1/2} dt = 2\sqrt{x} + C + o(1)$ quando $x \rightarrow +\infty$.

(ii) Si calcoli il valore di L .

ESERCIZIO N. 2. Risolvere la disuguaglianza $\operatorname{Im} \left(\frac{z^2}{1-z} \right) > 0$, anche tracciando nel piano l'insieme delle soluzioni.



COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3. Studiare la funzione

$$f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t^2}} \frac{1-t^2}{1+t^2} dt$$

- si calcolino $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$;
- si calcoli $f'(x)$ e si trovino eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti;
- si stabilisca dove $f(x)$ e' concava e dove e' convessa;
- si stabilisca se esistono rette asintotiche e si tracci il grafico .

ESERCIZIO N. 4.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12-x^2}{16} & \text{se } x \in [-4, 2]; \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \in]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[. \end{cases}$$

(i) Si stabilisca, motivando la risposta, se la funzione f è integrabile (in senso generalizzato) e se è primitivabile su \mathbb{R} .

(ii) Si determini la primitiva F di f che verifica $F(0) = 0$.

(iii) Si determini il massimo numero naturale n per cui è definito il polinomio di Taylor di ordine n di F nel punto $x_0 = 2$. Si calcoli tale polinomio.