Correzione I° appello

① $a_n = n^3 + 11n$

Mostrare che è monotona

Prova che

$a_{n+1} > a_n$

$$\underbrace{(n+1)^3 + 11(n+1)}_{a_{n+1}} > \underbrace{n^3 + 11n}_{a_n}$$

$$\cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 + \cancel{11n} + 11 > \cancel{n^3} + \cancel{11n}$$

$3(n^2 + n + 4) > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$n^2 + n + 4 > 0$

$\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$

eq. ass. impossibile

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^3+11n = +\infty$$ → Quindi è illimitata superiormente

- a_n è multiplo di 6 $\forall n \in \mathbb{N}$?

Provo con principio di induzione

1) Base dell'induzione $n=0$

$a_0 = 0$ che è multiplo di 6

2) Passo dell'induzione:

Per ipotesi suppongo che l'enunciato sia vero per n, provo che è vero anche per $n+1$

$$a_{n+1} = (n+1)^3 + 11(n+1) \qquad a_n = n^3 + 11n$$

$$a_{n+1} = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11$$

$$= n^3 + 11n + 3(n^2 + n + 4)$$

$$= \underbrace{a_n}_{\text{è multiplo di 6 per ipotesi induttiva}} + 3\underbrace{(n^2 + n + 4)}_{n^2+n+4 \text{ è PARI}}$$

se n è PARI $\longrightarrow$ PARI

se n è DISPARI $\longrightarrow$ PARI

Quindi $3(n^2+n+4)$ è multiplo di 6

a_{n+1} è multiplo di 6

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{3^n - 2^n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+11n}{3^n-2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+11n}{3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+11n}{3^n} = 0$$

(2)

a) $$\lim_{n\to+\infty} (e-\pi)^n \cdot \underbrace{\frac{n}{1+n}}_{\to 1} \cdot (\sin n - \cos n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{(e-\pi)^n}_{\to 0} \cdot \underbrace{(\sin n - \cos n)}_{\text{LIMITATA}} = 0$$

$e-\pi \simeq 2{,}7-3{,}14$

$= -0{,}4\ldots$

$$|\sin n - \cos n| < 2$$

b) $\lim_{x \to 1^+} \ln(x) \cdot \ln(x-1)$

FORMA INDETERMINATA $0 \cdot \infty$

Procedo con sostituzione $t = x - 1 \iff t + 1 = x$

$$\lim_{t \to 0^+} \ln(t+1) \cdot \ln(t)$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \underbrace{\frac{\ln(t+1)}{t}}_{\to 1} \cdot t \cdot \ln(t) = 0$$

$$\boxed{\lim_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0 \quad (\alpha > 0)}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}\ln(x) \longrightarrow \text{F. INDET. } 0\cdot\infty \quad \boxed{\alpha>0}\,!$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}}$$

CON DE HOPITAL

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha\cdot x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot x^{\alpha+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) x^{\alpha} = 0$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}$

I° MODO

$$\boxed{e^{\ln x} = x}$$

$x+3-3=x$

$x \cdot 3 : 3 = x$

$\sqrt{x^2} = x$

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+\arctan x)} =$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(1+\arctan x)}{\arctan x}\cdot \arctan x} = e^{1} = e$$

$\frac{\ln(1+\arctan x)}{\arctan x} \to 1$

$\frac{1}{x}\cdot\arctan x \to 1$

II° MODO

FORMA INDET. 1^{∞}

$$\lim_{x\to 0}(1+\arctan x)^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\arctan x\right)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{\arctan x}{\arctan x}} \quad \frac{\arctan x}{x}\to 1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\arctan x\right)^{\frac{1}{\arctan x}}=e$$

③

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x(\sqrt{1+x}-1)} & x > 0 \\ a\,2^x + 3 & x \le 0 \end{cases}$$

Trovare a in modo che f(x) sia continua in 0

La continuità in 0 si ha quando

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$f(0) = a\,2^0 + 3 = a + 3$$ → uso l'espressione dove è compreso ($\le$) lo 0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x \cdot x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}}_{\to 2} = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$2 = a + 3 \iff \boxed{a = -1}$$

$P\left(3, \frac{\sin 9}{3}\right) \rightarrow$ Trovo retta tg in P

$$y - y_P = m(x - x_P) \implies y - y_P = f'(x_P)(x - x_P)$$

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \cos(x^2) \cdot x \cdot \left(\sqrt{1+x}-1\right) - \sin(x^2) \cdot \left[\left(\sqrt{1+x}-1\right) + \frac{x}{2\sqrt{1+x}}\right]}{x^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2}$$

$$f'(x_p = 3) = \frac{2 \cdot 9 \cos 9 \cdot 1 - \sin 9 \cdot \left[1 + \frac{3}{2 \cdot 2}\right]}{9 \cdot 1^2}$$

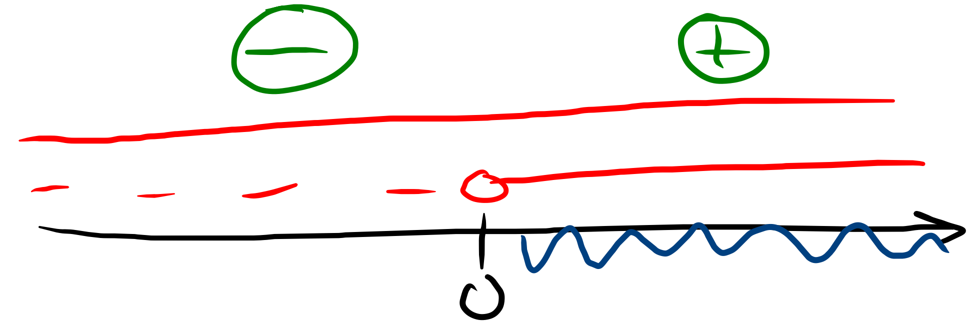
$$= \frac{18 \cos 9 - \frac{7}{4} \sin 9}{9} = 2 \cdot \cos 9 - \frac{7}{36} \sin 9$$

$$y - y_p = f'(x_p)(x - x_p)$$

$$y - \frac{\sin 9}{3} = \left[2\cos 9 - \frac{7}{36}\sin 9\right](x - 3)$$

$$y = \left[2\cos 9 - \frac{7}{36}\sin 9\right]x - 3\left[2\cos 9 - \frac{7}{36}\sin 9\right] + \frac{\sin 9}{3}$$

$$f(x) = \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)$$



Dominio $\begin{cases} x \neq 0 \\ x+\frac{1}{x} > 0 \end{cases}$ $\longrightarrow \frac{x^2+1}{x} > 0$

$N > 0 \quad x^2+1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$D > 0 \quad x > 0$

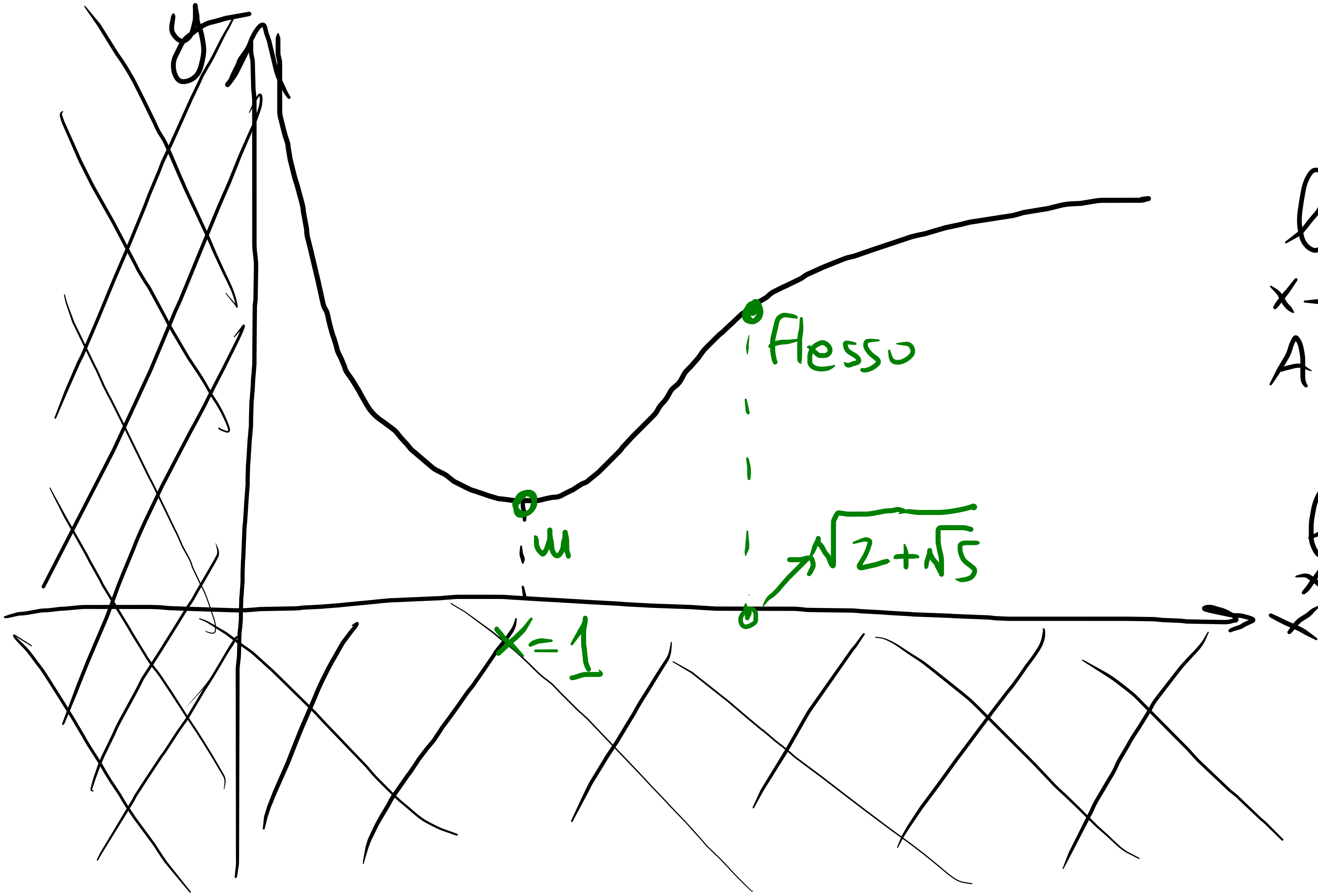
$\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$ $\quad D =]0 ; +\infty[$

Positività $\ln\left|x+\frac{1}{x}\right| > 0 \longrightarrow x+\frac{1}{x} > 1 \longrightarrow$ Positivo in $x>0$

$\frac{x^2-x+1}{x} \geq 0$

$N \geq 0 \quad x^2-x+1 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$D > 0 \quad x > 0$



$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left|x+\frac{1}{x}\right| = \infty$$

ASINTOTO VERTICALE in $x=0$

$$\lim_{x\to \infty} \ln\left(x+\frac{1}{x}\right) = \infty$$

Intersezione asse y $\rightarrow$ non è da calcolare perché $x=0$ fuori dominio

Intersezione asse x $\rightarrow$ $\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)=0 \iff x+\frac{1}{x}=1 \quad x^2-x+1=0 \rightarrow$ imposs.

ASINTOTO OBLIQUO

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2}{x^2+9}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2x^3+5x}{x^3+9x} = 2$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \frac{2x^3+5x^2}{x^2+9} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x^3}+5x^2-\cancel{2x^3}-18x}{x^2+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-18x}{x^2+9} = 5$$

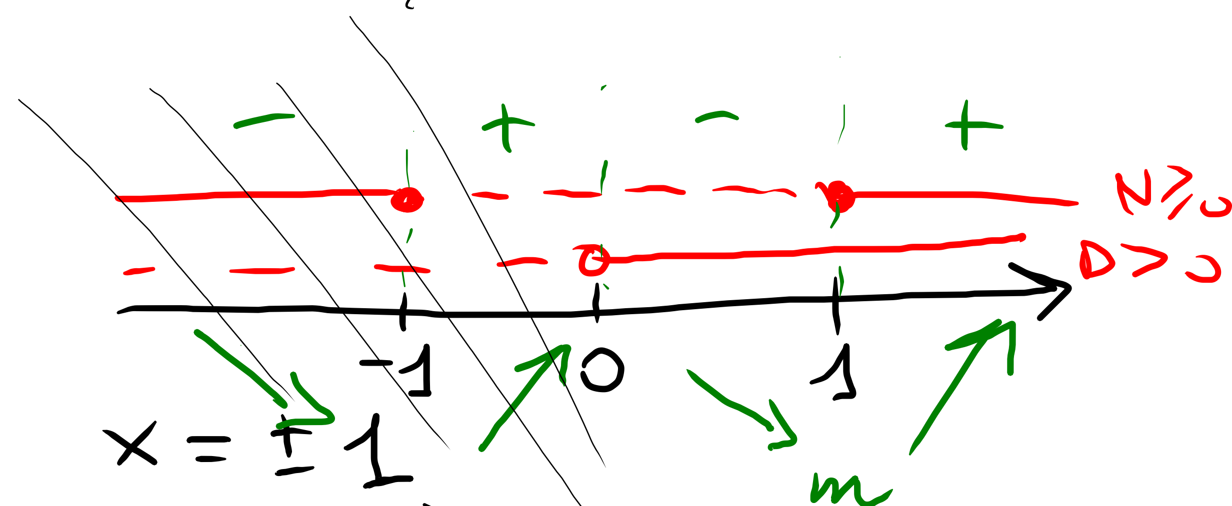
Quindi ASINTOTO OBLIQUO

$$y = 2x+5$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{x}} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{derivata dell'argomento}}$$

$$= \frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{\cancel{x}}} = \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x}$$

FUORI DOMINIO



$f'(x)=0 \iff x^2-1=0 \qquad x=\pm 1 \Rightarrow x=1$ perché $x=-1$ fuori dominio

$f'(x)\geq 0 \qquad \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}\geq 0 \qquad N\geq 0 \quad x^2-1\geq 0$

$D>0 \quad x\underbrace{(x^2+1)}_{\text{sempre positivo}}>0 \Rightarrow x>0$

$$f''(x) = \frac{2x\left(x^2+1\right)x - \left[\left(x^2+1\right) + x \cdot 2x\right]\left(x^2-1\right)}{x^2\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^4} + 2x^2 - \left[x^4 - 1 + \cancel{2x^4} - 2x^2\right]}{x^2\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{-x^4 + 4x^2 + 1}{x^2\left(x^2+1\right)^2}$$

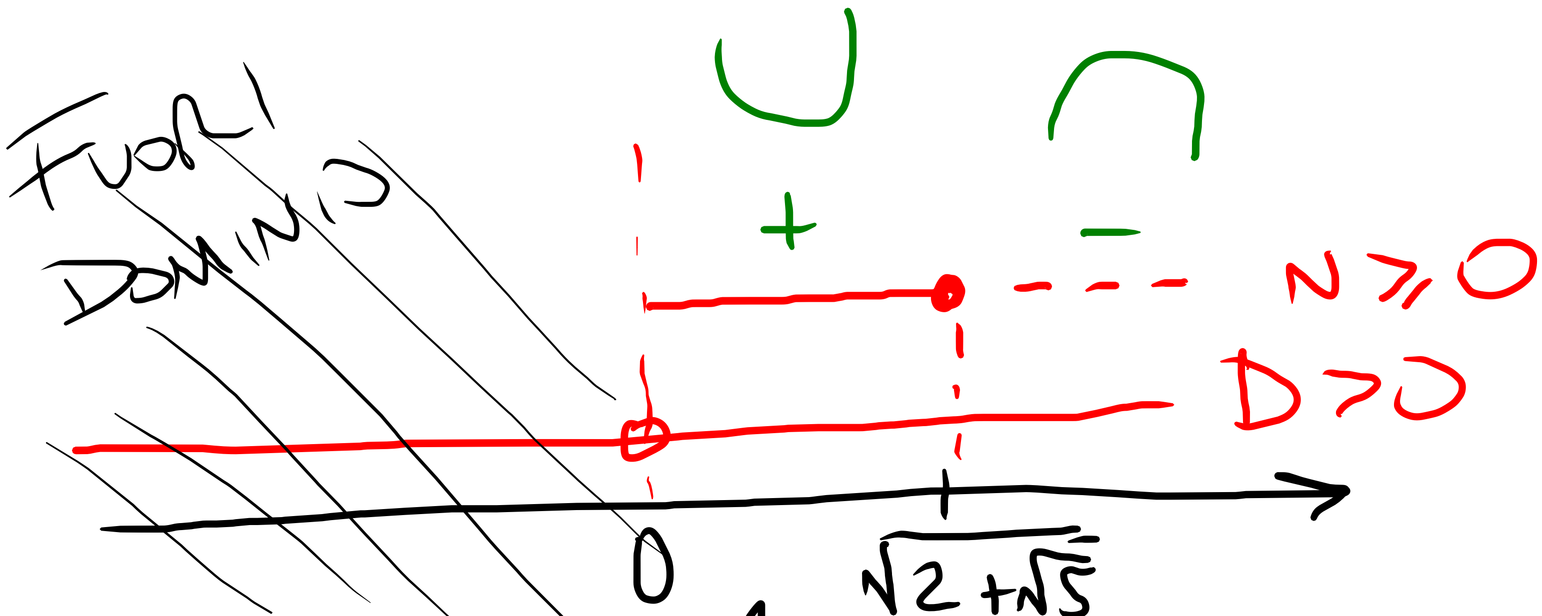
$$f''(x) = 0 \iff -x^4 + 4x^2 + 1 = 0$$

$$t = x^2$$

$$-t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{-2} = +2 \pm \sqrt{5}$$

$$x = \begin{cases} +\sqrt{2+\sqrt{5}} \longrightarrow \text{FLESSO DISCENDENTE} \\ -\sqrt{2+\sqrt{5}} \quad (\text{fuori dominio}) \end{cases}$$



$f''(x) \geq 0 \qquad -x^4+4x+1 \geq 0$

$$x^2(x^2+1)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In questo caso dominio coincide con insieme derivabile.