Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 17.09.18

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2017/2018

Esercizio 1

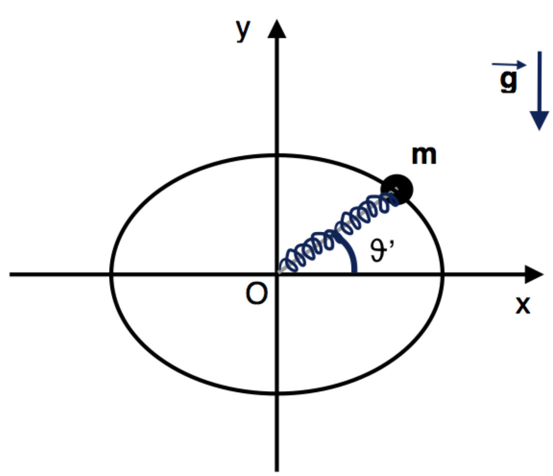
1. Dare la definizione di funzionale [1pt].
2. Dare la definizione di variazione di un funzionale [1pt].
3. Dato un sistema Lagrangiano a n gradi di libertà, definire il funzionale azione S [1pt].
4. Enunciare il "Principio di minima azione" di Hamilton [3pt].
5. Dimostrare il 'Principio di minima azione" di Hamilton [4pt].
6. *Facoltativo: Il funzionale che esprime la lunghezza di una curva $y = u(x)$ nel piano è $F[u] = \int_a^b \sqrt{1 + u'(x)}dx$. Dimostrare che la retta rende stazionario tale funzionale. [2pt].*

Esercizio 2

Si consideri il sistema meccanico illustrato in figura: una massa puntiforme m è vincolata a scorrere lungo l'ellisse, parametrizzata da $\vartheta \in [0, 2\pi[$ nel seguente modo

$$x = a\cos\vartheta\,, \qquad y = b\sin\vartheta \qquad a > b > 0,$$

e giacente nel piano xy verticale (l'angolo ϑ' in figura è legato alla coordinata ϑ dalla relazione $\tan\vartheta' = \frac{b}{a}\tan\vartheta$). Una molla, di costante elastica k e di lunghezza a riposo nulla, lega il corpo di massa m all'origine degli assi O. Sul sistema agisce la forza di gravità.



1. Scrivere la Lagrangiana L del sistema, usando come coordinata libera θ [2pt].

2. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema [2pt].

3. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità [4pt].

4. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno al punto $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ [2pt].

   [Suggerimento: fare il cambio di variabili $\vartheta = \varphi - \frac{\pi}{2}$ e usare le relazioni

   $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\varphi$ e $\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi$].

5. *Facoltativo: sotto quale scelta speciale dei paramentri a, b, g c'è un nuovo integrale del moto? Quale? [1pt]*

Esercizio 3

Si consideri l'oscillatore armonico quantistico unidimensionale, con potenziale $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

1. Scrivere, per tale sistema, l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per la funzione d'onda $\psi(x)$ ed energia E [1pt].

2. Ridefinire $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q$, $\psi\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q\right) = \varphi(q)$, $E = \lambda\hbar\omega$ e scrivere l'equazione di Schrödinger in funzione di φ e λ [2pt].

Si prenda $\varphi(q) = \theta(q)e^{-q^2/2}$ e $\theta(q) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2s+r}$ con $a_0 \neq 0$.

3. Per quali valori di r la funzione d'onda è una funzione pari? [1pt]

4. Calcolare le serie che definiscono $\frac{d\theta}{dq}$ e $\frac{d^2\theta}{dq^2}$ [1pt].

Inserendo $\varphi(q)$ nell'equazione trovata al punto 2, si trova la seguente equazione per θ

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2} + 2q\frac{d}{dq} + 1 - 2\lambda\right)\theta(q) = 0$$

5. Dimostrare che la soluzione è data da $a_{s+1} = \frac{4s+2r+1-2\lambda}{(2s+r+2)(2s+r+1)}a_s$ e $r(r-1) = 0$ [3pt].

6. Determinare lo spettro dell'energia (e in particolare il valore minimo) [2pt].

7. *Facoltativo: Trovare il valor minimo dell'energia dal principio di indeterminazione di Heisenberg ($\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$) [2pt]*