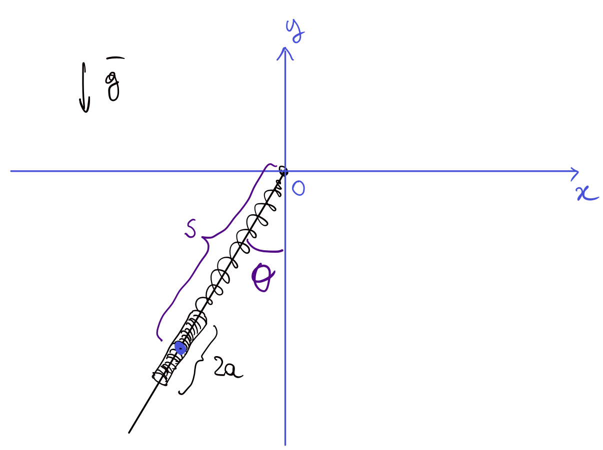
Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 27.09.2021

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2020/2021

Esercizio 1

1. Dare la definizione di funzionale [1pt].
2. Dare la definizione di variazione di un funzionale [1pt].
3. Calcolare la variazione del funzionale $F[u] = \ln(1 + u(0))$ [1pt].
4. Dato un sistema Lagrangiano a n gradi di libertà, definire il funzionale azione S [1pt].
5. Enunciare e dimostrare il "Principio di minima azione" di Hamilton [6pt].
6. Usare il "Principio di minima azione" per dimostrare che Lagrangiane che differiscono per un termine $\varphi(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_k}(\vec{q}, t)\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t}(\vec{q}, t)$ danno le stesse equazioni di Lagrange [2pt].
7. *Facoltativo: Il funzionale che esprime la lunghezza di una curva $y = u(x)$ nel piano è $F[u] = \int_a^b \sqrt{1 + u'(x)}dx$. Dimostrare che la retta rende stazionario tale funzionale. [1pt].*

Esercizio 2



Si consideri una barra omogenea di massa m e lunghezze $2a$ (e spessore trascurabile), vincolata a scorrere (come in figura) su una semiretta di massa trascurabile. Una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k ha un estremo legato all'origine degli asse e l'altro a un estremo della barra. Sul sistema agisce la forza di gravità.

1. Scrivere la Lagrangiana L del sistema, usando come coordinate libere l'angolo θ in figura e la distanza s del centro di massa della barra dall'origine O. [1,5pt].

2. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema [1,5pt].

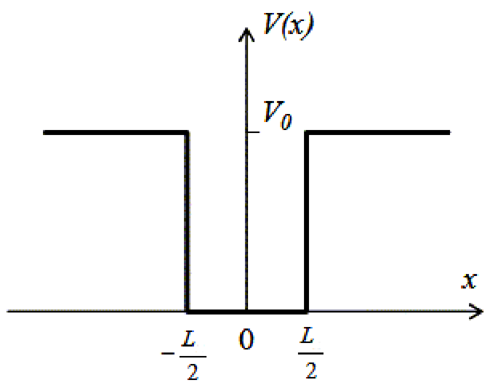
3. Dare la definizione di coordinata ciclica. Nel problema in esame, ci sono coordinate ciclicle? Se sì scrivere le relative costanti del moto [1pt].

4. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità [4pt].

5. Calcolare la Lagrangiana linearizzata attorno al punto di equilibrio stabile, le relative equazioni di Lagrange e la soluzione generale di tali equazioni [2pt].

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica in una buca di potenziale di altezza finita V_0 e larghezza L, come in figura.



1. Si risolva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo nelle tre regioni a potenziale costante per $0 < E < V_0$ [2pt].

2. Scrivere le condizioni di raccordo [1pt].

3. Ricavare l'espressione che vincola i valori dello spettro dell'energia [3pt].

4. Dimostrare che il numero di autovalori è finito [2pt].

5. *Facoltativo: Si trovi lo spettro (energia negativa) della buca di potenziale a delta di Dirac, prendendo il limite opportuno della buca di potenziale finita [1pt].*