Geometria 1

II appello d'esame

Anno accademico 2021-2022

14/2/2022

1) Si consideri la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

   (a) Calcolare $\det A$.

   (b) Dire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice diagonale D simile ad A e una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = D$.

2) Sia A una matrice $n \times n$ diagonalizzabile il cui unico autovalore è 1. Dimostrare che A è la matrice identica.

3) Siano $U, W \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali così definiti: U è generato dai vettori
$$u_1 = (1, 2, 0, -2),\ u_2 = (0, 1, -1, 2),\ u_3 = (0, 0, 1, -1);$$
   W è il sottospazio di equazioni
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = x_2 + 2x_3 = 3x_3 - x_4 = 0.$$

   (a) Trovare basi per U e per W.

   (b) Dire qual è la posizione reciproca di U e W, trovando in particolare $U + W$ e $U \cap W$.

   (c) Trovare una base ortonormale di W per il prodotto scalare canonico e prolungarla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

4) Siano dati i vettori di $\mathbb{Q}^3$
$$v_1 = (1, 0, 1), \qquad v_2 = (0, 1, -1), \qquad v_3 = (0, 0, 2)$$
$$w_1 = (3, 1, 0), \qquad w_2 = (-1, 0, 2), \qquad w_3 = (2, 1, 2).$$

   (a) Verificare che v_1, v_2, v_3 formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{Q}^3$.

   (b) Dimostrare che esiste un unico endomorfismo $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ tale che $f(v_i) = w_i$ $\forall\, i$.

   (c) Trovare il nucleo e l'immagine di f.

   (d) Scrivere le matrici $M_{\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{E}}(f)$ rispetto a $\mathcal{B}$ e rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.