**Corso di GEOMETRIA - Prova scritta**
**A.A. 2021/2022 - 15 febbraio 2022**
**Prof. Valentina Beorchia**

| Cognome | Nome |
|---|---|
| BEORCHIA | VALENTINA |

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di prodotto scalare in uno spazio vettoriale reale.

Si enunci e si dimostri la Diseguaglianza di Cauchy - Schwarz.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A$

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rg}\,\tilde{A} = 2 = \mathrm{rg}\,A = \dim \mathrm{Im} f$

base di $\mathrm{Im} f$ : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim \ker f = 3 - \dim \mathrm{Im} f = 3 - 2 = 1$ ; equazioni di $\ker f$ : $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

base di $\ker f$ : $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

(c) **(2 punti)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione e una base dell'immagine $f(r)$ della retta vettoriale $r$ di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x_1 & = t \\ x_2 & = 2t \\ x_3 & = -t \end{cases}$$

$f\left(\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} t - 4t \\ 2t - t \\ 2t - 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ t \\ -2t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim f(r) = 1$, e una sua base è $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

(d) **(2 punti)** Si dica se il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ è compatibile e, in caso affermativo, si trovi la sua generica soluzione.

La matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\tilde{A} | \tilde{b})$$

$\mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,(A|b) = 2 \Rightarrow$ per RC il sistema è compatibile, e la generica soluzione dipende da $n - \mathrm{rg}\,A = 3 - 2 = 1$ parametro. Il SL equivalente associato a $(\tilde{A}|\tilde{b})$ è:

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ ; pongo $x_3 = c$; ottengo $x_2 = 2 - c$, $x_1 = 3 - 2c$ ; la generica soluzione è: $S = \begin{pmatrix} 3 - 2c \\ 2 - c \\ c \end{pmatrix}$

(3) Si consideri la matrice simmetrica
$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

$$p_B(x) = \det(B - x \cdot I_3) = \det\begin{pmatrix} -4-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & 3 \\ 0 & 3 & 3-x \end{pmatrix}$$

$$= (-4-x)\cdot\left((3-x)^2 - 9\right) = -(4+x)(x^2-6x) = -x(4+x)(x-6)$$

$$Sp(L_B) = \{0, -4, 6\}$$

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per $L_B$.

$V_0 = \ker L_B$, eq. $\begin{cases} -4x = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$, base $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, base normalizzata $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$

$\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$V_{-4} = \ker(L_B + 4\,Id) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, eq. $\begin{cases} 7y + 3z = 0 \\ 3y + 7z = 0 \end{cases}$, base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, è un versore

$V_6 = \ker(L_B - 6\,Id) = \ker\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, eq. $\begin{cases} -10x = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$, base $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, base normalizzata $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$

$\Longrightarrow$ una base ortonormale di autovettori è data da:

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$$

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id) = {}^t M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id)$$

perché la matrice è ortogonale

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino il piano $H$ e la retta $s_a$ dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$(*)\quad H: \; x - y + z = 13 \qquad s_a: \begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= at \\ z &= 1-2t \end{cases} \quad (**)$$

Si determini il valore $\bar{a} \in \mathbb{R}$ di $a$ per cui $H$ ed $s_{\bar{a}}$ risultano paralleli.
Per gli altri valori di $a$, si determini il punto di intersezione $H \cap s_a$.

Giacitura $W_H$ di $H$ : $x - y + z = 0$; giacitura $W_{s_a}$ di $s_a$ : $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

$s_a \,//\, H \iff W_{s_a} \subseteq W_H \iff$ il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -2 \end{pmatrix}$ soddisfa $x - y + z = 0 \iff$

$$2 - a - 2 = 0 \iff a = 0$$

$\Rightarrow \boxed{\bar{a} = 0}$, la retta $s_0$ : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 0 \\ z = 1-2t \end{cases}$ è $//$ ad $H$

Infine: se $a \neq 0$, il punto $P_a := s_a \cap H$ deve soddisfare sia $(*)$ che $(**)$:

$(1+2t) - at + (1-2t) = 13$

$2 - at = 13$, $\quad at = -11$, $\quad t = -\frac{11}{a}$

$\Rightarrow P_a = \left(1 - \frac{22}{a}, \; -11, \; 1 + \frac{22}{a}\right)$.

• **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana del piano $L$ contenente la retta $q$ di equazioni

$$q: \begin{cases} x + y &= 2 \\ x - z &= -3 \end{cases}$$

e ortogonale alla retta

$$r: \begin{cases} x = & 1-2t \\ y = & 2-t \\ z = & 1+t \end{cases}$$

Il generico piano contenente la retta $q$ è dato dal fascio di piani

$\alpha(x + y - 2) + \beta(x - z + 3) = 0$, cioè

$(\alpha+\beta)x + \alpha y - \beta z + (-2\alpha + 3\beta) = 0$. $(\star)$

La generica giacitura ha equazione $(\alpha+\beta)x + \alpha y - \beta z = 0$

Un piano del fascio è $\perp$ ad $r \iff$ il vettore $\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$ è proporzionale al vettore di direzione $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $r$; essendo l'equazione $(\star)$ determinata a meno di un fattore di proporzionalità, posso richiedere $\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \end{cases}$

$\Longrightarrow L : \boxed{-2x - y + z - 1 = 0}$