

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 3/6/2019

1. (a) (4 punti) Si rappresentino il dominio, il segno e l'insieme di livello zero della funzione

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^2 - 1} + 1} + 1}}{x^2 + xy} \sqrt{16 - x^2 - 4y^2}$$

- (b) (2 punti) Si studino i limiti di f in $(1, -1)$, $(4, 0)$, $(4/\sqrt{5}, -4/\sqrt{5})$.
(c) (1 punto) Si dimostri che f ha almeno un punto di minimo relativo ed un punto di massimo relativo. (Suggerimento: NON è necessario calcolare le derivate parziali di f . Si esamini piuttosto quanto svolto al punto (a)).
2. (a) (2 punti) Si calcoli la derivata direzionale della funzione $f(x, y) = x^2 + xy$ in $(1, 1)$ nella direzione del versore $(3/5, 4/5)$.
(b) (2 punti) Si enunci il teorema di Schwarz nel caso di una funzione in due variabili.
3. (a) (2 punti) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{2^n}$$

- (b) Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n + 1}{n^2(n + 1)^2}$$

- i. (2 punti) si determini il suo comportamento (carattere);
ii. (2 punti) qualora converga, se ne determini la somma.
4. (a) (4 punti) Si calcoli l'integrale di $f(x, y) = y^2$ sulla regione del piano

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + \frac{1}{2}|y| \leq 2\}.$$

- (b) (3 punti) Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si provi che

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

(Suggerimento: si integri la funzione $\varphi(x, y) = (f(x) - f(y))^2$ sul rettangolo $[a, b] \times [a, b]$.)

5. (a) (4 punti) Si determinino i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y - 4 \leq 0\}$.

- (b) (2 punti) Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 punto interno di A . Si enuncino le condizioni sufficienti di ottimo libero per x_0 .