

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 10/09/2019

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (4 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D , il segno e l'insieme di livello zero della funzione

$$f(x, y) = \frac{\ln(x^2 - y^2)}{\ln(x^2 + y^2 - e) - 1}$$

- (b) (1 punto) Si studi il limite di f in $\left(\sqrt{\frac{1+e}{2}}, \sqrt{\frac{e-1}{2}}\right)$.
- (c) (1 punto) Si disegni la frontiera dell'insieme D .
- (d) (1 punto) Si dica se l'insieme D è chiuso, giustificando la risposta.
- (e) (2 punti) Si dimostri che la funzione f non ha punti nè di massimo nè di minimo assoluto.
2. (a) (3 punti) Sia data la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(2x-2y)}{x-y} & \text{se } x - y \neq 0 \\ 2 & \text{se } x - y = 0 \end{cases}$$

Si determini l'insieme dei punti di \mathbb{R}^2 in cui g è continua.

- (b) (2 punti) Si studi la derivabilità parziale di $h(x, y) = \ln(|x|) + |y|$ in $(1, 0)$.
3. (a) (2 punti) Si studi il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{(n^2)}$$

- (b) Sia data, per $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, la successione di funzioni, definite nell'intervallo $]0, 1]$, di termini

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- i. (2 punti) si studi la sua convergenza puntuale;
- ii. (2 punti) si studi l'eventuale convergenza uniforme.
4. (a) (3 punti) Si calcoli l'integrale di $f(x, y) = \text{sen}(y^2)$ sul triangolo del piano di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.
- (b) (1 punto) Si dia la definizione di insieme misurabile rispetto Peano-Jordan.

5. (a) (4 punti) Si determinino i punti di minimo e di massimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$$

su $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + (y + 1)^2 \leq 16\}$.

- (b) Si svolga uno solo a scelta dei seguenti due esercizi:

- i. (2 punti) Si determinino gli estremi inferiore e superiore dell'insieme

$$A = \{\ln(1 + x^2y^2) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- ii. (2 punti) Si dimostri che l'insieme

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_2 \leq r\}$$

è convesso.