

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 7/2/2020

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (4 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D , il segno e l'insieme di livello zero della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 4y^2 - 16}{(4x^2 + y^2 - 16)(x^2 + y^2 - 4)}$$

- (b) (1 punto) Si studi il limite di f in $(2, 0)$.
- (c) (2 punti) Si studi il limite di f in $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.
- (d) (1 punto) Si disegni la frontiera dell'insieme D .
- (e) (1 punto) Si spieghi cosa significa, secondo la definizione, che il punto $(0, 0)$ è interno all'insieme D .
2. (a) Sia data la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(xy)}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- i. (3 punti) Si verifichi se la funzione g è continua in $(0, 0)$.
- ii. (1 punto) Si verifichi se la funzione g abbia le due derivate parziali in $(0, 0)$ e, in caso affermativo, le si calcoli.
- iii. (1 punto) Si dica, giustificando la risposta, se la funzione g è differenziabile in $(0, 0)$.
3. (a) (3 punti) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n-2)}$$

- (b) Si consideri la successione di funzioni, definite nell'intervallo $[-1, 1]$, di termini

$$f_n(x) = \frac{n+2}{n+x^2}$$

con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

- i. (1 punto) Si studi la sua convergenza puntuale.
- ii. (3 punti) Si studi l'eventuale convergenza uniforme.

4. (a) (4 punti) Si calcoli l'integrale di

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

sul dominio del piano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 9, x > 0, y > 0\}$.

5. (a) (3 punti) Si determinino i punti di minimo e di massimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

su $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 3 = 0\}$.

- (b) (2 punti) Si provi che i punti degli assi coordinati sono punti di minimo (assoluto) per la funzione

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2y^2).$$