Università degli Studi di Trieste

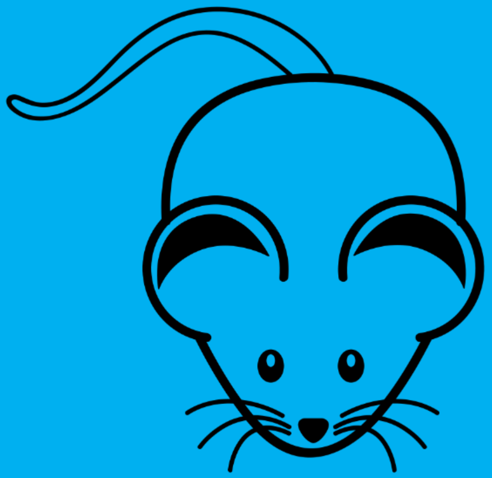
Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

TOPOLOGIA IN R^n

Parte 1



$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \dots, n \}$$

PRODOTTO SCALARE IN $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad x = (x_1, \dots, x_n), \ y = (y_1, \dots, y_n)$$

<u>PROPRIETÀ</u> $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R},$

1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

3) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

4) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

Dalle precedenti proprietà si ricava

$$\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

(NB: usare la proprietà 2))

Le proprietà 1), 2), 3), 4) definiscono un prodotto scalare.

X sp. vettoriale su $\mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ soddisfa 1), 2), 3), 4)

$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ è un PRODOTTO SCALARE e X è detto PRE-HILBERTIANO.

NORMA IN $\mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}} \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

PROPRIETÀ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disequaglianza triangolare)

Vale anche la proprietà

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$$

Dim: $\|x\| = \|(x-y)+y\| \le \|x-y\| + \|y\|$

DISEG. TRIANGOLARE

$\|y\| = \|(y-x)+x\| \le \|y-x\| + \|x\|$

$\|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\,\|x-y\| = \|x-y\|$

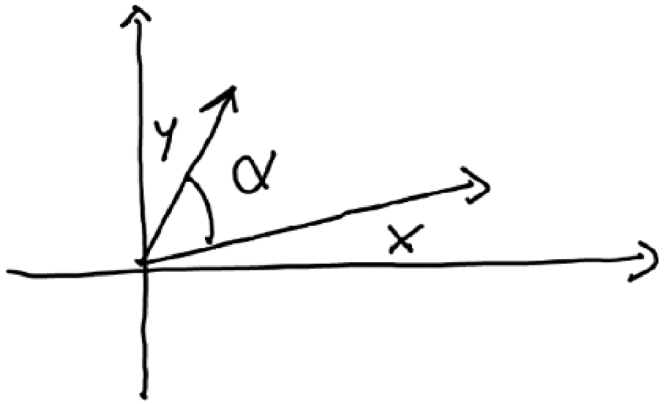
PROPR. 2)

$\Rightarrow -\|x-y\| \le \|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$

$\Rightarrow \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x-y\|$

Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

$x, y \in \mathbb{R}^n \qquad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$



$$\cos\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \in [-1, 1]$$

Le proprietà 1), 2), 3) definiscono la nozione di NORMA

X sp. vettoriale su $\mathbb{R}$ $\quad \|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfa 1), 2), 3)

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|$ è una NORMA su X e X è detto NORMATO

NB: OGNI SPAZIO DOTATO DI PRODOTTO SCALARE È AUTOMATICAMENTE NORMATO CON LA NORMA

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

(MA NON È VERO IL VICEVERSA)

DISTANZA IN $\mathbb{R}^n$

$$d(x,y) = \| x-y \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2} \qquad x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n)$$

DISTANZA EUCLIDEA

PROPRIETÀ $\quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$

1) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

LE PROPRIETÀ 1), 2), 3) DEFINISCONO LA NOZIONE DI DISTANZA

X INSIEME $\quad d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ SODDISFA 1), 2), 3)

$\Rightarrow$ d È UNA DISTANZA (O METRICA) SU X E X È UNO SPAZIO METRICO

NB: X normato $\Rightarrow$ X metrico con la distanza
$d(x,y) = \|x-y\|$
(ma non viceversa)

Esempi

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$ ← NORMA EUCLIDEA

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \max\{|x_i|,\ i=1,\dots,n\}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

sono tre esempi di norme in $\mathbb{R}^n$

Queste norme inducono le distanze

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$ ← DISTANZA EUCLIDEA

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i|, i=1,\dots,n\}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

SALVO DIVERSA INDICAZIONE $\|\cdot\|$ e $d(\cdot,\cdot)$ INDICHERANNO LA NORMA E LA DISTANZA EUCLIDEA

Dimostriamo che

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

è una distanza in $\mathbb{R}^n$

1) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geq 0$ poiché $|x_i - y_i| \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n$

$d_1(x,y) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \iff |x_i - y_i| = 0 \ \forall i = 1, \dots, n$

$\iff x_i = y_i \ \forall i = 1, \dots, n \iff x = y$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

2) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

3) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + |z_i - y_i| =$

$= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = d_1(x,z) + d(z,y)$

$\forall \; x,y,z \in \mathbb{R}^n$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

TOPOLOGIA IN R^n

Parte 2

TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^n$

<u>Def.</u>: Dati $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$

$S(x, r) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) = r \}$ è detto SFERA di centro x e raggio r

$B(x, r) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r \}$ è detto INTORNO SFERICO o PALLA di centro x e raggio r

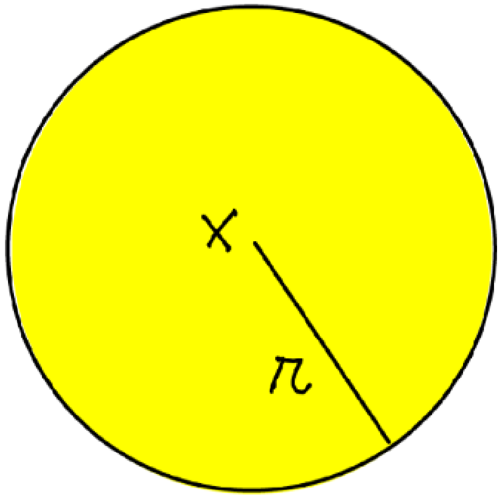
$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$ distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$

$n = 1$

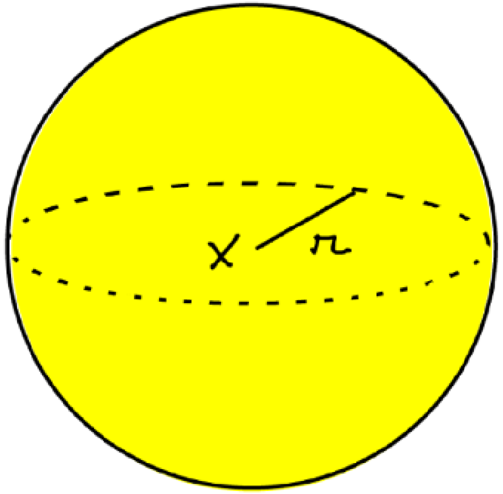
$$d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$$

$$B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < r \} =]x-r, x+r[$$

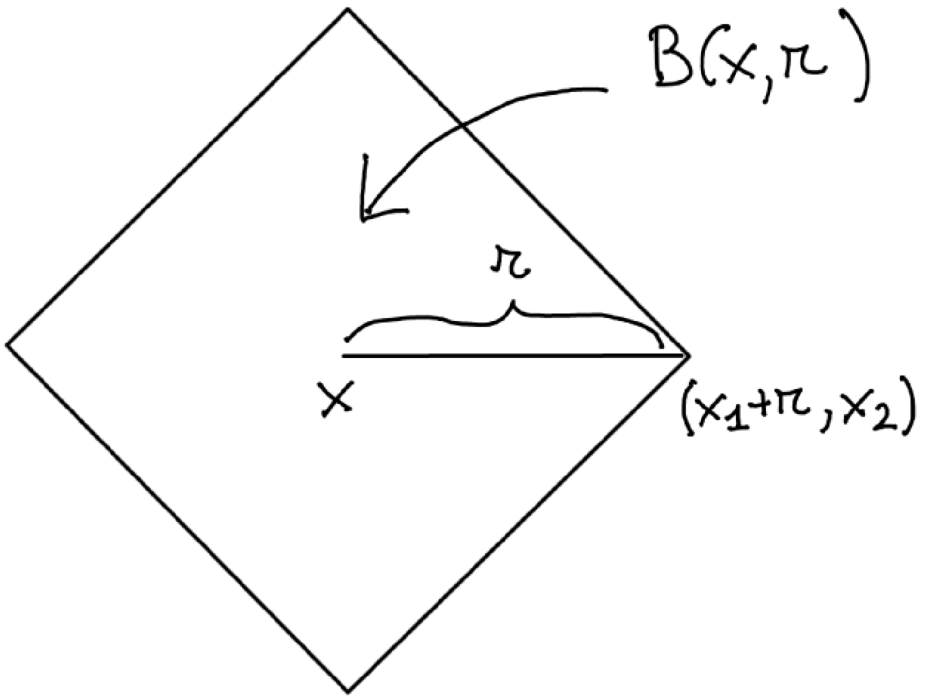
$n=2$



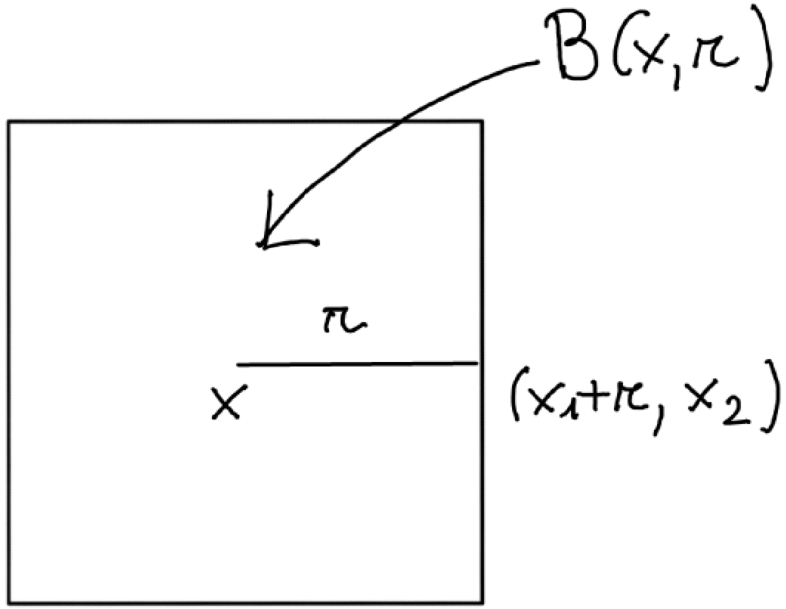
$n=3$



$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \qquad\qquad d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1, \dots, n\}$$



$n = 2$



$n = 2$

Def. Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è INTORNO di x_0

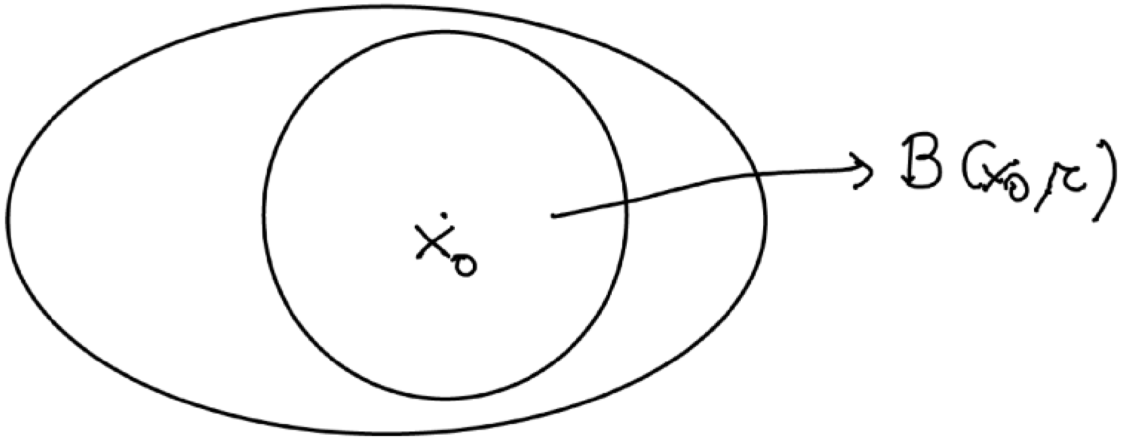
$$\Leftrightarrow \exists B(x_0, r) : B(x_0, r) \subseteq U$$

(NB: scriveremo $U_{x_0}, V_{x_0}, \dots$ per indicare un intorno di x_0)

Esempio

L'area racchiusa dall'ellisse (compresa o meno l'ellisse stessa) è un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}^2$

NB: $\forall r > 0$ $B(x_0, r)$ è intorno di x_0



PROPRIETÀ DEGLI INTORNI

1) U_{x_0} intorno di $x_0 \Rightarrow x_0 \in U_{x_0}$

OVVIA: $\exists B(x_0,r)$: $x_0 \in B(x_0,r) \subseteq U_{x_0}$

2) U_{x_0}, V_{x_0} intorni di $x_0 \Rightarrow U_{x_0} \cap V_{x_0}$ intorno di x_0

Dim: $\exists B(x_0,r_1) \subseteq U_{x_0}$, $B(x_0,r_2) \subseteq V_{x_0}$

Sia $r = \min\{r_1, r_2\}$

$\Rightarrow B(x_0,r) \subseteq U_{x_0} \cap V_{x_0}$

3) $\forall y_0 \in B(x_0, r)\ \exists\ B(y_0, r_1) \subseteq B(x_0, r)$

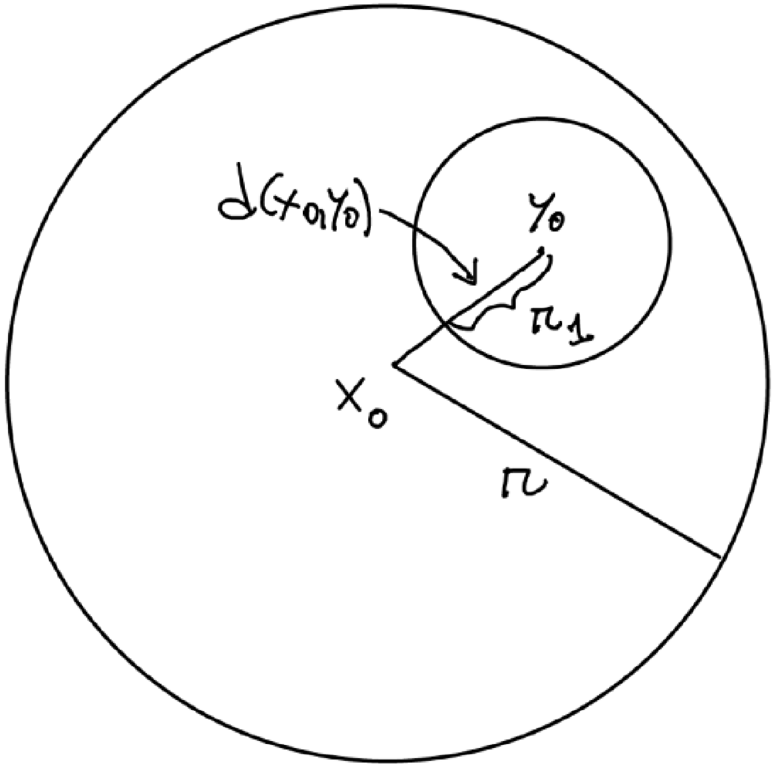
<u>Dim:</u> Sia $r_1 : 0 < r_1 < r - d(x_0, y_0)$ $\Leftarrow$ È POSITIVO PERCHÉ $y_0 \in B(x_0, r)$

$\Rightarrow \forall y \in B(y_0, r_1),\ d(x_0, y) \leq d(x_0, y_0) + d(y_0, y) <$

$< d(x_0, y_0) + r_1 <$

$< d(x_0, y_0) + r - d(x_0, y_0) =$

$= r$



$$\Rightarrow \forall\, y \in B(y_0, r_1),\ y \in B(x_0, r)$$

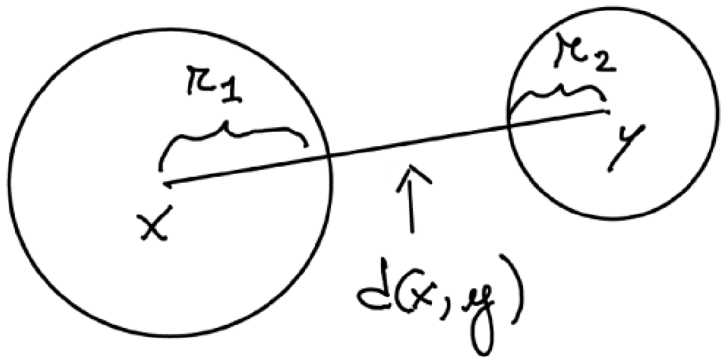
cioè $\quad B(y_0, r_1) \subseteq B(x_0, r)$

4) $x \neq y \Rightarrow \exists\ B(x,r_1),\ B(y,r_2) : B(x,r_1) \cap B(y,r_2) = \emptyset$

Dim: Basta prendere $r_1, r_2 < \dfrac{d(x,y)}{2}$

Se per assurdo fosse $z \in B(x,r_1) \cap B(y,r_2)$, si avrebbe

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r_1 + r_2 < 2\,\frac{d(x,y)}{2} = d(x,y)$$



QUESTA PROPRIETÀ È DETTA "SEPARAZIONE DI HAUSDORFF"

Def.: Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 è INTERNO AD $E \iff$

$\iff \exists\, B(x_0, r) \subseteq E$

$\iff \exists$ un intorno U_{x_0} di x_0: $U_{x_0} \subseteq E$

SEGUE DAL FATTO CHE $\forall\, U_{x_0}$ INTORNO DI x_0 $\exists\, B(x_0, r) \subseteq U_{x_0}$

Def.: Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 è ESTERNO ad E

$\iff x_0$ è interno a E^c (complementare di E)

Def.: Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 è DI FRONTIERA PER E

$\iff x_0$ non è né interno né esterno ad E

Notazione $\qquad E \subseteq \mathbb{R}^n$

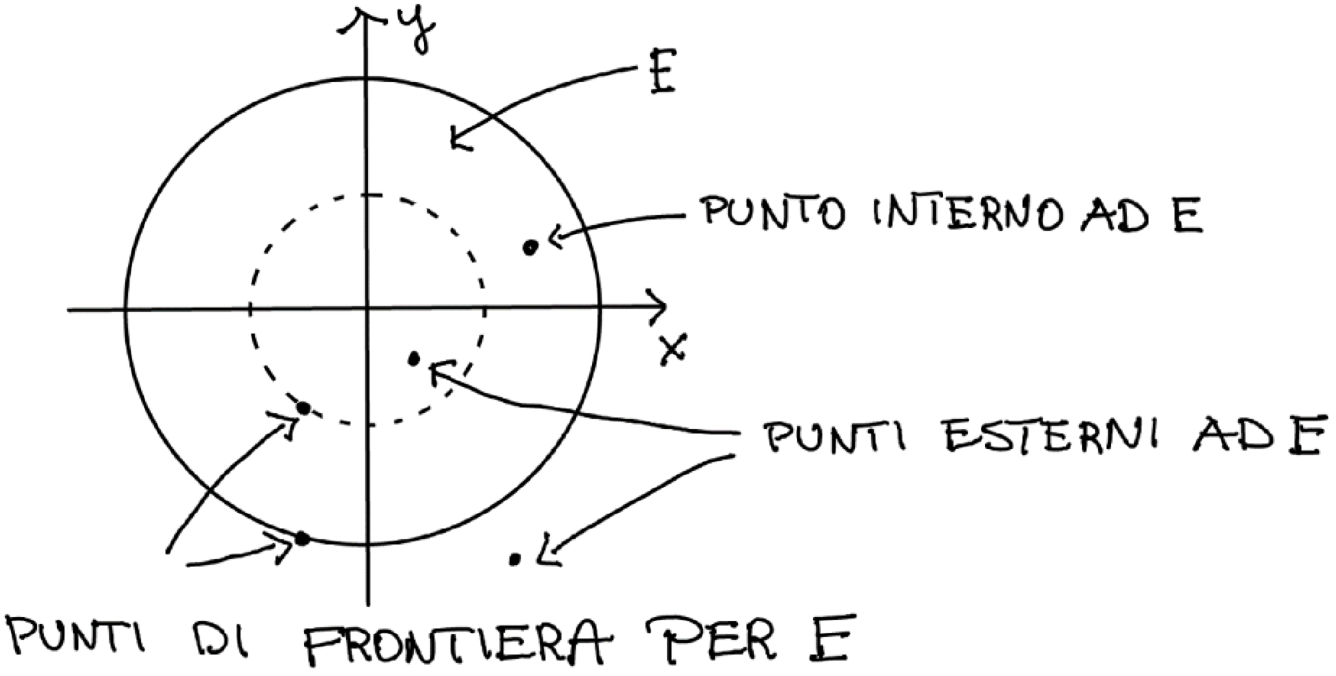
$\mathring{E}$ PARTE INTERNA DI E = insieme dei punti interni ad E

$\mathring{E^c}$ PARTE ESTERNA DI E = insieme dei punti esterni ad E

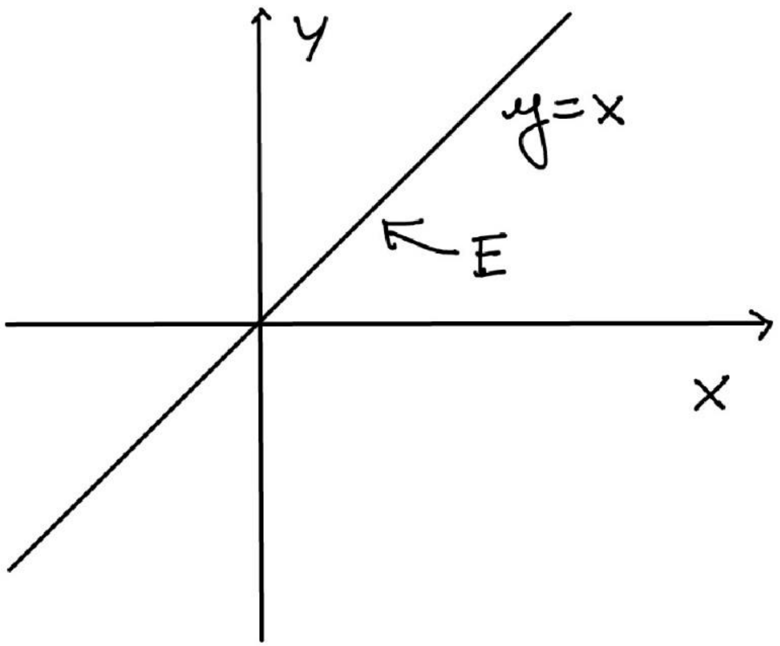
∂E o $\mathcal{F}r(E)$ FRONTIERA DI E = insieme dei punti di frontiera di E

Esempi

1) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$



2) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$



$\mathring{E} = \emptyset$ (NON CI SONO PUNTI INTERNI)

$\mathring{E^c} = E^c$ (TUTTI E SOLO I PUNTI DI E^c SONO ESTERNI)

$\mathcal{F}r(E) = E$ (E COINCIDE CON LA SUA FRONTIERA)

Proposizione

$x_0 \in \mathcal{Fr}(E) \iff \forall\, U_{x_0}$ intorno di x_0, $U_{x_0} \cap E \neq \emptyset$ e $U_{x_0} \cap E^c \neq \emptyset$.

Dim:

$x_0 \in \mathcal{Fr}(E) \iff x_0 \notin \mathring{E}$ e $x_0 \notin \mathring{E^c}$

$\iff \neg\,(\exists\, U_{x_0}$ intorno di $x_0 : U_{x_0} \subseteq E)$ e $\neg\,(\exists\, U_{x_0}$ int. di $x_0 : U_{x_0} \subseteq E^c)$

$\iff \forall\, U_{x_0}$ intorno di x_0, $U_{x_0} \cap E^c \neq \emptyset$ e $U_{x_0} \cap E \neq \emptyset$

Def.: x_0 è ADERENTE ad E

$$\Leftrightarrow \forall U_{x_0} \text{ intorno di } x_0, \; U_{x_0} \cap E \neq \emptyset$$

L'insieme dei punti aderenti ad E si dice CHIUSURA di E e si indica con $\overline{E}$

NB: è sempre $\mathring{E} \subseteq E \subseteq \overline{E}$

Esempi

1) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 \leq 4\} \Rightarrow \overline{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

2) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\} \Rightarrow \overline{E} = E$

Def.: x_0 è DI ACCUMULAZIONE PER E

$\iff \forall\, U_{x_0}$ intorno di x_0, $U_{x_0} \cap E - \{x_0\} \neq \emptyset$

a) L'insieme dei punti di accumulazione di E è detto DERIVATO di E

b) $x_0 \in E$ è detto ISOLATO se non è di accumulazione per E

c) Ogni $x_0 \in \mathring{E}$ è di accumulazione per E

d) Se x_0 è di accumulazione per E allora $x_0 \in \overline{A}$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

TOPOLOGIA IN R^n

Parte 3

Def.: E è APERTO $\Leftrightarrow$ $E = \overset{\circ}{E}$

$\Leftrightarrow \forall x \in E \ \exists \ U_x$ intorno di x: $U_x \subseteq E$

$\Leftrightarrow \forall x \in E \ \exists \ B(x, r) \subseteq E$

E è CHIUSO $\Leftrightarrow$ E^c è aperto

NB: $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ contemporaneamente aperti e chiusi

Esempi

1) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 \leq 4\}$ non è né aperto né chiuso

$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 < 4\}$ è aperto e $E_1 = \mathring{E}$

$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ è chiuso e $E_2 = \overline{E}$

2) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$ è chiuso (E^c è aperto)

3) $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \{x\}$ è chiuso

Infatti, $\forall\, y \neq x$, preso $r \in \mathbb{R} : 0 < r < d(x,y)$, si ha $x \notin B(y,r)$, dunque $B(y,r) \subseteq \{x\}^c$, cioè $\{x\}^c$ è aperto. Ne segue che $\{x\}$ è chiuso

PROPRIETÀ DI APERTI E CHIUSI

1) $\{A_i\}_{i\in I}$ famiglia di aperti (anche infinita)

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ è aperto

<u>Dim:</u> Sia $x\in \bigcup_{i\in I} A_i$. Allora $\exists A_{\bar{\iota}} : x\in A_{\bar{\iota}}$.

$A_{\bar{\iota}}$ aperto $\Rightarrow \exists B(x,r)\subseteq A_{\bar{\iota}} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ è aperto

2) $\{A_i\}_{i\in I}$ famiglia finita di aperti $\Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ è aperto

Dim: Sia $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Allora $x \in A_i \ \forall i \in I$

$\Rightarrow \exists\, B(x, r_i) \subseteq A_i \ \forall i \in I$

Preso $r = \min\{r_i \mid i \in I\}$, sarà $r > 0$

e $B(x,r) \subseteq B(x,r_i) \subseteq A_i \ \forall i \in I$

$\Rightarrow B(x,r) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ aperto

$\boxed{\text{QUI SERVE IL FATTO CHE LA FAMIGLIA SIA FINITA SE FOSSE INFINITA POTREBBE ESSERE } r=0}$

3) $\{C_i\}_{i\in I}$ famiglia finita di chiusi $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} C_i$ chiuso

4) $\{C_i\}_{i\in I}$ famiglia (anche infinita) di chiusi $\Rightarrow \bigcap_{i\in I} C_i$ chiuso

Dim: 3) e 4) si dimostrano ponendo $A_i = C_i^c \ \forall i\in I$, per cui $\{A_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di aperti.

Si applicano 1) e 2) a $\{A_i\}_{i\in I}$, osservando che

$$\left.\begin{aligned} \bigcup_{i\in I} C_i &= \bigcup_{i\in I} A_i^c = \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c \\ \bigcap_{i\in I} C_i &= \bigcap_{i\in I} A_i^c = \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c \end{aligned}\right\} \text{LEGGI DI DE MORGAN}$$

Usando 3) si può dimostrare che i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}^n$ sono chiusi.

Infatti, sia $E = \{x_1, ..., x_m\} = \bigcup_{i=1}^{m} \{x_i\}$

$\{x_i\}$ chiuso $\forall\, i = 1, ..., m$

$\Rightarrow$ per 3) E è chiuso perché unione finita di chiusi

Proposizione

$$\overline{E}^c = \mathring{E^c}$$ (il complementare della chiusura di un insieme coincide con la sua parte esterna)

Dim: $x \in \overline{E}^c \iff x$ non è aderente ad E

$\iff \exists\, U_x$ intorno di x : $U_x \cap E = \emptyset$

$\iff \exists\, U_x$ intorno di x : $U_x \subseteq E^c$

$\iff x \in \mathring{E^c}$

Proposizione

E chiuso $\Longleftrightarrow E = \overline{E}$

Dim: $E = \overline{E} \Longleftrightarrow E^c = \overline{E}^c \Longleftrightarrow E^c = \overset{\circ}{E^c} \Longleftrightarrow E^c$ aperto

$\Longleftrightarrow E$ chiuso

Si dimostra facilmente anche che, $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\overline{\overline{E}} = \overline{E} \quad \text{e} \quad \overset{\circ\circ}{E} = \overset{\circ}{E}$$

$\Rightarrow \overline{E}$ chiusura è chiuso, $\overset{\circ}{E}$ è aperto.

Proposizione

1) E chiuso $\Leftrightarrow$ 2) $\mathrm{Fr}(E) \subseteq E \Leftrightarrow$ 3) Ogni punto di accumulazione di E appartiene a E

Dim: $\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Siano E chiuso, $x \in \mathrm{Fr}(E)$.

Allora $\forall U_x$ intorno di x, $U_x \cap E \neq \emptyset$ e $U_x \cap E^c \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall U_x$ intorno di x, $U_x \cap E \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \overline{E} = E$ (perché E è chiuso).

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Siano $\mathrm{Fr}(E) \subseteq E$ e x di accumulazione per E

Allora $\forall\, U_x$ intorno di x, $U_x \cap E - \{x\} \neq \emptyset$.
Se fosse $x \notin E$, allora $x \in E^c$ e quindi $U_x \cap E^c \supseteq \{x\}$,
da cui $U_x \cap E^c \neq \emptyset$. Poiché anche $\emptyset \neq U_x \cap E - \{x\} \subseteq U_x \cap E$,
$x \in \mathrm{Fr}(E) \subseteq E$. Assurdo. Quindi $x \in E$.

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Sia E tale che ogni <u>suo</u> punto di accumulazione appartiene a E.
Dimostriamo che $\overline{E} \subseteq E$. Sia $x \in \overline{E}$ e per assurdo $x \notin E$.
Allora $\forall\, U_x$ intorno di x, $U_x \cap E - \{x\} = U_x \cap E \neq \emptyset$
Quindi x è di accumulazione ma $x \notin E$. Assurdo. Quindi $x \in E$.

Proposizione

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\iff E \cap \mathcal{F}r(E) = \emptyset$

Dim: $\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}r(E) = \overline{E} \cap \overline{E^c} \\ \mathcal{F}r(E^c) = \overline{E^c} \cap \overline{(E^c)^c} = \overline{E^c} \cap \overline{E} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{F}r(E) = \mathcal{F}r(E^c)$

E aperto $\iff E^c$ chiuso $\iff \mathcal{F}r(E^c) = \mathcal{F}r(E) \subseteq E^c$

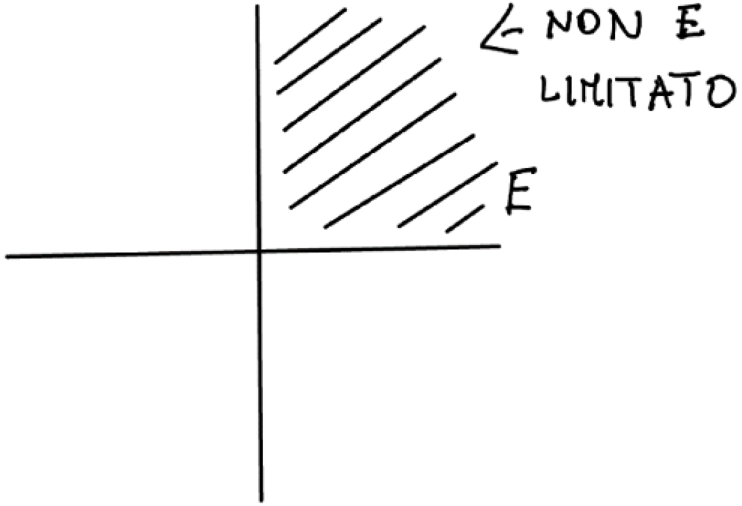
$\iff \mathcal{F}r(E) \cap E = \emptyset$

$\square$

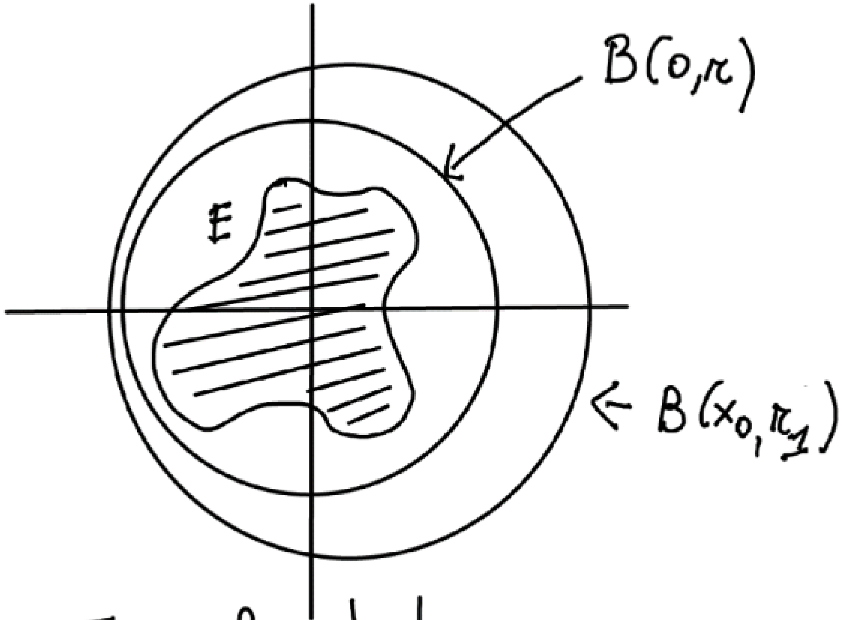
__Def.__: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è LIMITATO $\Leftrightarrow \exists\, r>0 : E \subseteq B(0,r)$

In maniera equivalente si può dire che E è limitato $\Leftrightarrow \exists\, r>0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n : E \subseteq B(x_0, r)$

__Esempi__



$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$



E è limitato

Def.: Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dice DIAMETRO di E

$$\mathrm{diam}(E) = \sup\{\|x-y\| : x, y \in E\}$$

Si può dimostrare che E è limitato $\Leftrightarrow$ $\mathrm{diam}(E) \in \mathbb{R}$.

Esempi

$E = B(x_0, r) \Rightarrow \mathrm{diam}(E) = 2r$

E quadrato di lato $\ell \Rightarrow \mathrm{diam}(E) = \ell\sqrt{2}$

$E = \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathrm{diam}(E) = +\infty$

Teorema (di Bolzano-Weierstrass)

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e infinito $\Rightarrow \exists$ almeno un punto di accumulazione per E

Def.: Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di aperti tale che $E \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ è detta COPERTURA di E

Def.: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è COMPATTO $\Leftrightarrow$ da ogni sua copertura è possibile estrarre una famiglia FINITA di aperti che sia una copertura di E.

__Teorema__ (di Heine-Borel)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. E è compatto $\Leftrightarrow$ E è chiuso e limitato.

__Esempi__

1) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ non è compatto, non essendo limitato. Infatti:

$$\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n-\varepsilon, n+\varepsilon[\quad \text{con } \varepsilon \in]0,1[$$

ma se togliamo anche un solo $]\bar{n}-\varepsilon, \bar{n}+\varepsilon[$ dalla copertura, non abbiamo più una copertura di $\mathbb{N}$.

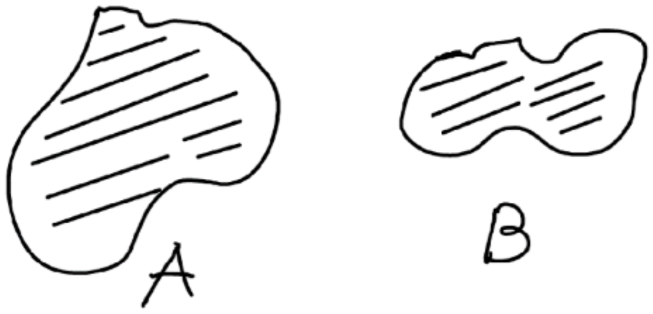
Anche $\mathbb{R}^n$ non è compatto

2) Gli insiemi finiti in $\mathbb{R}^n$ sono compatti

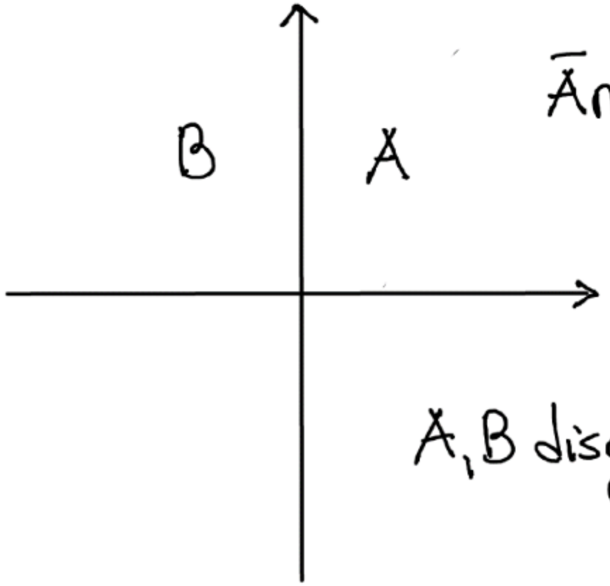
Segue immediatamente dalla definizione di compattezza o osservando che gli insiemi finiti sono ovviamente limitati e, come già visto, chiusi.

Def.: Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$.

A, B sono SEPARATI $\iff \overline{A} \cap B = \emptyset$, $A \cap \overline{B} = \emptyset$



A, B sono disgiunti e separati



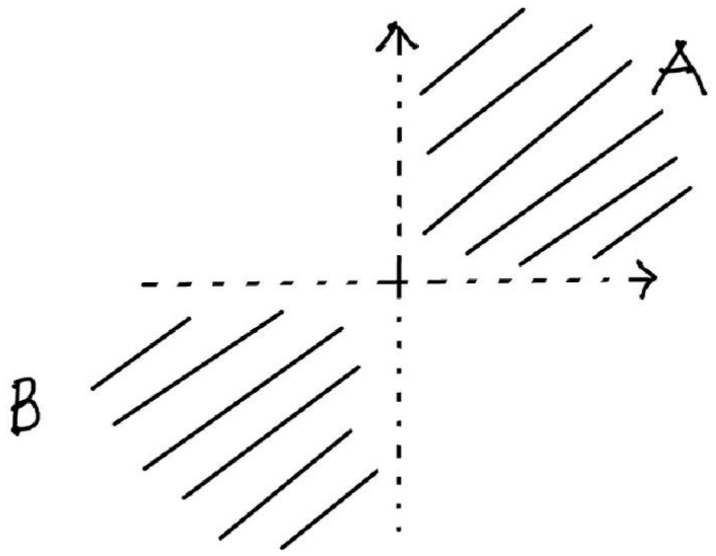
$\overline{A} \cap B = \{(0,y) \mid y \geq 0\}$
$\neq \emptyset$

A, B disgiunti non separati

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \geq 0\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \geq 0\}$

Def.: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è CONNESSO $\Leftrightarrow$ E non si può rappresentare come unione di due insiemi non vuoti e separati.

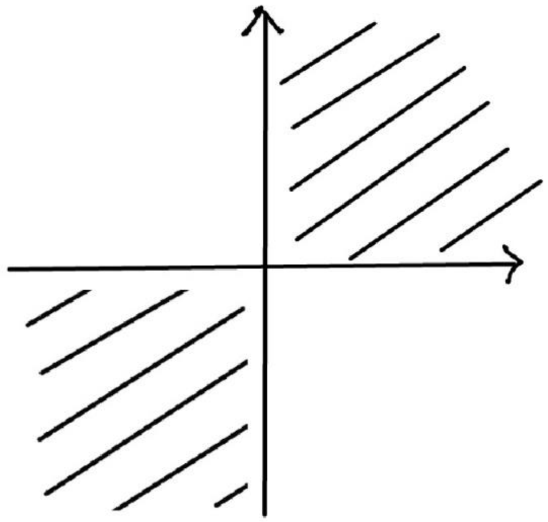


$E = \{(x,y) \mid xy > 0\}$

non è connesso

A e B separati

$A \cup B = E$



$E = \{(x,y) \mid xy \geq 0\}$

è connesso

Def.: Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, si dice RETTA passante per x e y l'insieme

$$\{\lambda x + \mu y \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu = 1\}.$$

Si dice SEGMENTO congiungente x e y, indicato con $[x, y]$, l'insieme combinazione lineare convessa di x e y

$$[x, y] = \{\lambda x + \mu y \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1\}$$

Si dice SPEZZATA POLIGONALE congiungente x e y l'unione di un numero finito di segmenti del tipo $[x, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_m, y]$ con $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$

<u>Def</u>: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è CONNESSO PER SEGMENTI (O PER POLIGONALI) $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in E$ $\exists$ una spezzata poligonale congiungente x e y contenuta in E.

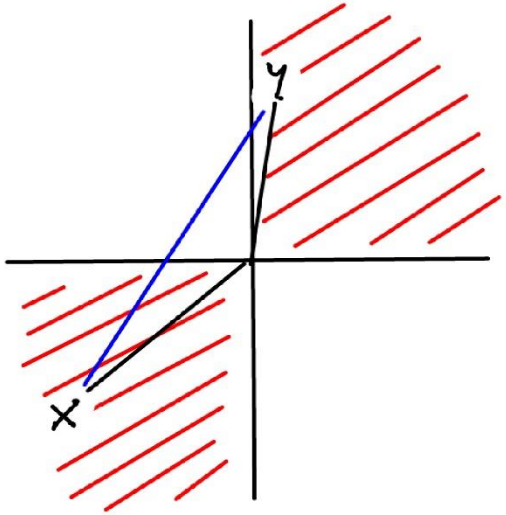
Def.: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è CONVESSO $\iff \forall\, x, y \in E,\ [x, y] \subseteq E$

Si può dimostrare quanto segue

1) E convesso $\Rightarrow$ E connesso per segmenti $\Rightarrow$ E connesso
2) Se E è aperto, E connesso $\iff$ E connesso per segmenti
3) $E \subseteq \mathbb{R}$ convesso $\iff$ E è un intervallo
4) $E \subseteq \mathbb{R}$ connesso $\iff$ E è un intervallo

Esempio

$E = \{(x,y) \mid xy \geq 0\}$ è connesso per poligonali, ma non è convesso



Posso unire x e y con una poligonale, passando per $(0,0)$, ma non con un segmento, rimanendo in E.