Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SUCCESSIONI IN R

Parte 1

SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}$

<u>Def.</u> $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è detta SUCCESSIONE in $\mathbb{R}$

Si indica $\boxed{a_n = f(n)}$ detto TERMINE della

SUCCESSIONE $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}$

COSA SIGNIFICA CHE $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ HA LIMITE PER $n \to +\infty$?

UNICO PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER $\mathbb{N}$

DALLA USUALE DEF. DI LIMITE SI HA:

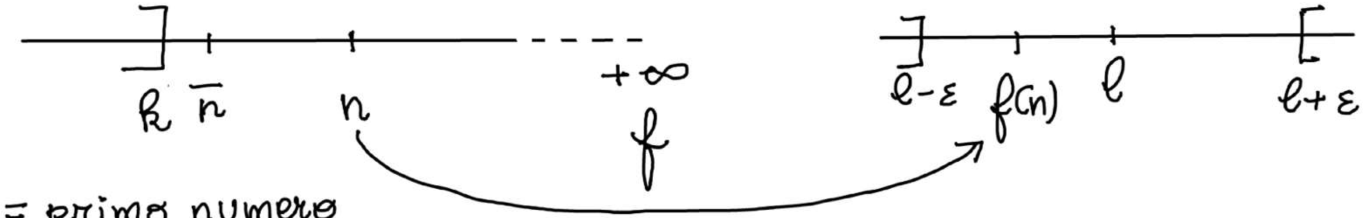
Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ha limite $\ell \in \mathbb{R}$ per $n \to +\infty$

$\Leftrightarrow$ $\forall U_\ell$ intorno di ℓ $\exists V_{+\infty}$ intorno di $+\infty$:

$$f(n) \in U_\ell \quad \forall n \in \mathbb{N} \cap V_{+\infty}$$

$\Leftrightarrow$ $\forall I_\ell =]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ $\exists I_{+\infty}^k =]k, +\infty[$ $(k>0)$:

$$f(n) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\quad \forall n \in \mathbb{N} \cap I_{+\infty}^k$$



$\overline{n}$ = primo numero naturale $> k$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \overline{n},\ n \in \mathbb{N},\ |x_n - \ell| < \varepsilon}$$

NB: useremo n, m o anche k, per indicare numeri naturali, senza specificarlo direttamente (sarà chiaro dal contesto)

NB:

$$(a_n)_n \text{ è } \begin{cases} \text{CONVERGENTE se } \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \\ \text{DIVERGENTE se } \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \{+\infty, -\infty, \infty\} \\ \text{INDETERMINATA (o IRREGOLARE) altrimenti} \end{cases}$$

Riassumendo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon>0 \ \underbrace{\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}}_{\text{SI DICE ANCHE "DEFINITIVAMENTE"}} \ |a_n - \ell| < \varepsilon$$

e analogamente

OPZIONALE (se vale $\forall k>0$ vale $\forall k$ e viceversa)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall k \ (>0) \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad a_n > k$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall k \ (<0) \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad a_n < k$$

OPZIONALE (se vale $\forall k<0$ vale $\forall k$ e viceversa)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \iff \forall k \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad |a_n| > k$$

NB: nella definizione di $\lim_{n \to +\infty} a_n$ si può scrivere $n > \bar{n}$ invece di $n \geq \bar{n}$ indifferentemente.

Ad esempio:

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell &\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \ |a_n - \ell| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \ |a_n - \ell| < \varepsilon \end{aligned}}$$

Per le successioni valgono gli "usuali" teoremi per funzioni a valori in $\mathbb{R}$

Unicità del limite

Il limite di una successione, se esiste, è unico.

Teorema della permanenza del segno

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} l > 0 \\ +\infty \end{cases} \Rightarrow \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad a_n > 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} l < 0 \\ -\infty \end{cases} \Rightarrow \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad a_n < 0$$

Per il calcolo dei limiti di successioni valgono teoremi analoghi a quelli per il calcolo dei limiti di funzioni

Ad esempio

1) $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1-1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$

poiché $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} 1 = 1$ SUCCESSIONE COSTANTE

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n+1 = +\infty$ TEOREMA SUL LIMITE DELLA SOMMA DI SUCCESSIONI

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ TEOR. LIMITE RECIPROCO DI UNA SUCCESSIONE

$\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ TEOR. LIMITE SOMMA DI SUCCESSIONI

$\times(-1)$: TEOR. LIMITE PRODOTTO DI SUCCESSIONI

Osserviamo che

$f(n)=\dfrac{n}{n+1}$ è la restrizione a $\mathbb{N}$ di

$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ e $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$

Se la successione $f(n) = a_n$ $n \in \mathbb{N}$ può essere vista come restrizione a $\mathbb{N}$ di una funzione definita su $E \subseteq \mathbb{R}$ con $+\infty$ come punto di accumulazione per E, si può usare il seguente risultato:

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F \subseteq E$, x_0 di accumulazione per F.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f|_F(x) = \ell$$

RESTRIZIONE DI f a $F \subseteq E$

NB: non vale in generale il viceversa

$$\lim_{x \to x_0} f|_F(x) = \ell \not\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Nell'esempio di prima

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \qquad E = \mathbb{R} - \{-1\} \qquad f : E \to \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \qquad \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(n) = \lim_{n \to +\infty} a_n = 1$$

2) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!-(n-1)!}$$

$$(n+1)!-(n-1)! = (n+1)\,n\,(n-1)! - (n-1)! =$$
$$= [(n+1)n-1](n-1)!$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n+1)!-(n-1)!} = \frac{n!}{[(n+1)n-1](n-1)!} = \frac{n}{(n+1)n-1} =$$

$$= \frac{n}{n^2+n-1} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

SUCCESSIONI LIMITATE

Se $\exists\, k \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}$	allora $(a_n)_n$ è
$a_n \leq k$	SUPERIORMENTE LIMITATA
$a_n \geq k$	INFERIORMENTE LIMITATA
$\lvert a_n \rvert \leq k$	LIMITATA

NB: equivalentemente $(a_n)_n$ (– / sup. / inf.) limitata
$\Leftrightarrow$ $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un insieme (– / sup. / inf.) limitato

Proposizione

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow (a_n)_n$ è limitata

Dim: Fissiamo $\varepsilon>0$. Allora $\exists \bar{n}: \forall n \geq \bar{n}\ |a_n - \ell| < \varepsilon$

Si ha quindi $|a_n| = |a_n - \ell + \ell| \leq |a_n - \ell| + |\ell| < \varepsilon + |\ell| \ \forall n \geq \bar{n}$

Sia $c = \max\{|a_i| : i = 1, \dots, \bar{n}-1\}$

Allora $|a_n| \leq \max \underbrace{\{c, \varepsilon + |\ell|\}}_{k} \Rightarrow (a_n)_n$ limitata

poichè $\exists k \in \mathbb{R} : |a_n| \leq k \ \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema del confronto

1) $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = l$$

2) $a_n \leq b_n$ definitivamente

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

Università degli Studi di Trieste

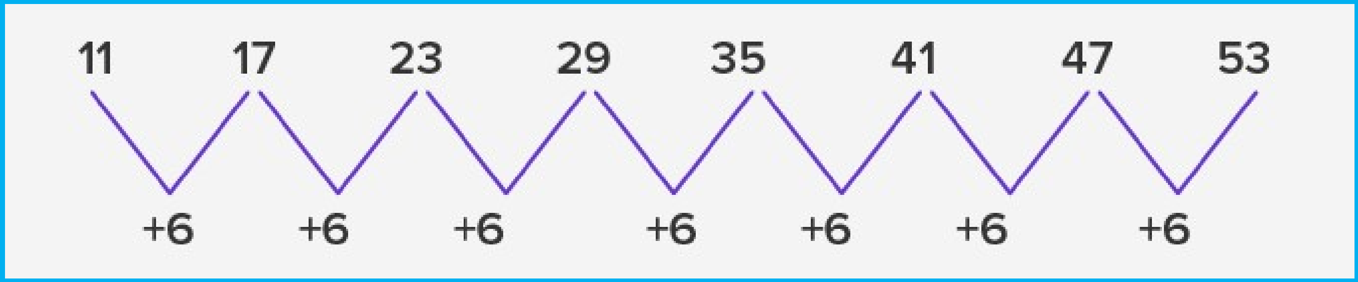
Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SUCCESSIONI IN R

Parte 2



SUCCESSIONI MONOTONE

Se, $\forall n \in \mathbb{N}$	allora $(a_n)_n$ è
$a_n \leq a_{n+1}$	CRESCENTE
$a_n < a_{n+1}$	STRETTAMENTE CRESCENTE
$a_n \geq a_{n+1}$	DECRESCENTE
$a_n > a_{n+1}$	STRETTAMENTE DECRESCENTE

$(a_n)_n$ MONOTÓNA

Teorema sul limite di successioni monotone

$(a_n)_n$ successione crescente

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\} = \begin{cases} l\in\mathbb{R} & \text{se } (a_n)_n \text{ limitata superiormente} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$(a_n)_n$ successione decrescente

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\} = \begin{cases} l\in\mathbb{R} & \text{se } (a_n)_n \text{ limitata inferiormente} \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Corollario

Sia $(a_n)_n$ monotona.

$(a_n)_n$ converge $\Leftrightarrow$ $(a_n)_n$ è limitata

Proposizione

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, $(b_n)_n$ limitata $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n b_n = 0$

Esempi

1) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Con la definizione:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

Prendendo $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$, $\bar{n} \in \mathbb{N}$, la condizione è vera

$\left(\varepsilon = \frac{1}{3}, \text{ prendo } \bar{n} \geq 4; \quad \varepsilon = \frac{1}{10}, \text{ prendo } \bar{n} \geq 11; \ \ldots \right)$

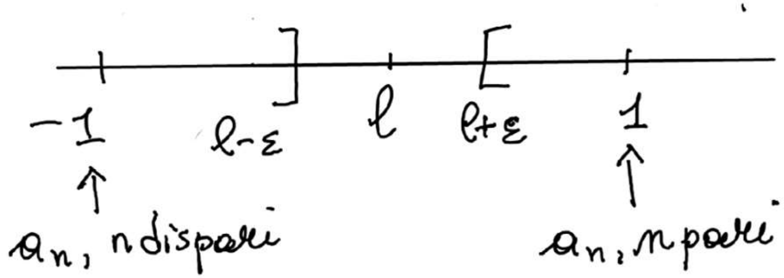
Con i teoremi "algebrici":

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ (teor. lim. funzione reciproca)

2) $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ $\qquad a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

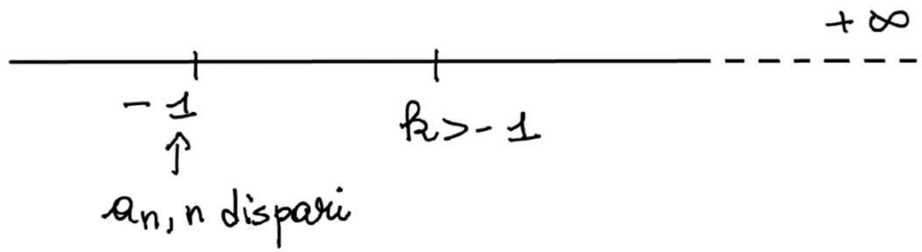
<u>Con la definizione:</u>

Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Preso $\varepsilon = \frac{1}{2}$, a_n non può appartenere definitivamente a $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$



Qui $\ell \in]-1,1[$.
Gli altri casi sono analoghi

Analogamente, per $k > -1$, a_n non può appartenere definitivamente a $]k, +\infty[$, quindi non può essere $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$



Analogamente, non può essere $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

Con le restrizioni

$P = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ insieme dei numeri pari

$D = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ insieme dei numeri dispari

$f|_P$ determina la successione $b_n = a_{2n} = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$f|_D$ determina la successione $c_n = a_{2n+1} = -1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} f|_P(n) = 1 \neq -1 = \lim_{n\to+\infty} f|_D(n)$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

Teorema (Caratterizzazione del limite di funzioni tramite successioni)

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per E. Allora,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$$

$$\Updownarrow$$

$\forall (x_n)_n \subseteq E \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$$

<u>Teorema</u> (Caratterizzazione della continuità di funzioni tramite successioni)

$f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$

f continua in x_0

$\Longleftrightarrow$ $\forall (x_n)_n \subseteq E$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Esempio

Dimostrare che $\nexists \lim_{x \to 0^+} \cos \frac{1}{x}$

Siano $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ e $b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

due successioni

$f(x) = \cos \frac{1}{x}$ è definita su $\mathbb{R} - \{0\}$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 0$, $a_n > 0$, $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1$ $\lim_{n \to +\infty} f(b_n) = \lim_{n \to +\infty} -1 = -1$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0^+} f(x)$

Successione (progressione) geometrica

$a_n = q^n \qquad q \in \mathbb{R} \qquad n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 0 & \text{se } |q| < 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ \nexists & \text{se } q = -1 \\ \infty & \text{se } q < -1 \end{cases}$$

Dim: 1) Se $q>1$, q^n è crescente e illimitata

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

2) Se $q=1$, q^n è costante $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = 1$

3) Se $0<q<1$, $\frac{1}{q}>1$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{q^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$

per il caso 1). Segue $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

4) Se $q=0$, $q^n=0 \ \forall n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

5) Se $-1<q<0$, $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$ con $0<|q|<1$ e

$\lim_{n\to+\infty} |q|^n = \lim_{n\to+\infty} -|q|^n = 0$ per il caso 3)

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

6) Se $q=-1$, $q^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} q^n$

7) Se $q<-1$, $q^{2n} = (-q)^{2n}$ con $-q>1$

e $q^{2n+1} = -(|q|)^{2n+1}$ con $|q|>1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^{2n} = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} q^{2n+1} = -\infty$ per il caso 1)

Si dimostra allora facilmente che $\lim_{n\to+\infty} q^n = \infty$

Università degli Studi di Trieste

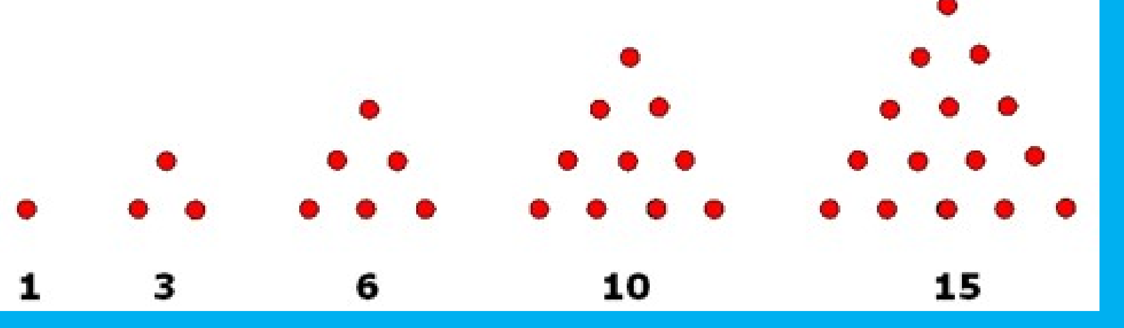
Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SUCCESSIONI IN R

Parte 3



<u>Teorema</u> (Criterio del rapporto)

Sia $(a_n)_n$ con $a_n > 0 \ \forall n$ (è sufficiente $a_n > 0$ definitivamente)

a) $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

b) $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con $\ell > 1$ o $\ell = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

Dim: a) Sia $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R}$ ($\ell \geq 0$ poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad \ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq \bar{n}$ si ha $a_{n+1} < (\ell+\varepsilon)\, a_n$

$$a_n < (\ell+\varepsilon)\, a_{n-1} < (\ell+\varepsilon)^2 a_{n-2} < \dots < (\ell+\varepsilon)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$$

$$\Rightarrow \quad a_n < (\ell+\varepsilon)^n \cdot \boxed{\frac{a_{\bar{n}}}{(\ell+\varepsilon)^{\bar{n}}}}$$

← è un numero reale che non dipende da n

Se quindi prendo $\varepsilon > 0$ tale che $\ell + \varepsilon < 1$ (esiste poiché $\ell < 1$ per ipotesi nel caso a))

$$\lim_{n\to+\infty} (\ell+\varepsilon)^n \frac{a_{\bar{n}}}{(\ell+\varepsilon)^{\bar{n}}} = 0$$

→ SUCCESSIONE GEOMETRICA con $q = \ell + \varepsilon \in \,]0,1[$

$\Rightarrow$ poiché $\quad 0 < a_n < (\ell+\varepsilon)^n \dfrac{a_{\bar{n}}}{(\ell+\varepsilon)^{\bar{n}}} \to 0$

si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ (per confronto)

b) Sia $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$

Allora $\forall k>0 \ \exists \ \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > k$

$\Rightarrow \quad a_n \geq k\, a_{n-1} \geq k^2 a_{n-2} \geq \ldots\ldots \geq k^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}} \quad \forall n \geq \bar{n}$

Preso $k>1$ ho quindi

$$a_n \geq k^n \cdot \boxed{\frac{a_{\bar{n}}}{k^{\bar{n}}}} \quad \text{con} \lim_{n\to+\infty} k^n = +\infty$$

<- SUCCESSIONE GEOMETRICA $k>1$

-> numero reale che non dipende da n

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \text{ (per confronto)}$$

Se invece $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R},\ \ell>1$, preso $\varepsilon>0$ tale che $\ell-\varepsilon>1$,

$$\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad a_n > (\ell-\varepsilon) a_{n-1} > \dots > (\ell-\varepsilon)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}} = (\ell-\varepsilon)^n \cdot \frac{a_{\bar{n}}}{(\ell-\varepsilon)^{\bar{n}}}$$

$+\infty$ PER CONFRONTO

SUCCESSIONE GEOMETRICA CON $q=\ell-\varepsilon>1$

$+\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

Teorema (Criterio della radice)

Sia $(a_n)_n$ con $a_n > 0 \ \forall n$ (anche solo definitivamente)

a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in \mathbb{R}$ con $\ell < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con $\ell > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Dim: a) Sia $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in \mathbb{R}$, $\ell < 1$

Preso $\varepsilon > 0$ tale che $\ell + \varepsilon < 1$, $\exists\, \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \ \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$,

cioè $0 < a_n < (\ell+\varepsilon)^n \longrightarrow 0$ (SUCC. GEOM. CON $\ell + \varepsilon \in]0,1[$)

$\downarrow$

0 PER CONFRONTO

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

b) Sia $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$

$\Rightarrow$ Preso $k>1$, $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$ $\quad a_n \geq k^n \longrightarrow +\infty$ SUCC. GEOM. $k>1$

$a_n \downarrow +\infty$ PER CONFRONTO

Se invece $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1$

$\Rightarrow$ Preso $\varepsilon > 0$ tale che $\ell - \varepsilon > 1$, $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$

$a_n > (\ell-\varepsilon)^n \longrightarrow +\infty$ SUCC. GEOM. CON $q = \ell - \varepsilon > 1$

$a_n \downarrow +\infty$ PER CONFRONTO

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ in entrambi i casi.

Esempi

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!}$ $\qquad a_n = \frac{b^n}{n!}$ $\qquad$ con $b > 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{b^n} = \frac{b}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$$

CRITERIO DEL RAPPORTO

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ $\qquad a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \, \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{\underbrace{(2n+2)}_{2(n+1)}(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2} \to \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0$$ CRITERIO DEL RAPPORTO

Def.: Sia $(a_n)_n$ una successione
Si dice SOTTOSUCCESSIONE di $(a_n)_n$ una successione $b_n = a_{k_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, dove k_n è una successione strettamente crescente di numeri naturali

Esempi 1) Ogni successione è sottosuccessione di se stessa ($k_n = n$)

2) Se, fissato $n_0 \in \mathbb{N}$, $k_n = n + n_0$, ho una sottosuccessione ottenuta togliendo alla successione i primi n_0 termini

a_n: $2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad \underbrace{2^3 \quad 2^4 \quad 2^5 \quad \dots}_{n_0 = 3 \quad k_n = n+3}$

b_n: $b_0 = 2^3 \quad b_1 = 2^4 \quad b_2 = 2^5 \quad \dots \quad b_n = 2^{n+3} = a_{n+3}$

3) $k_n = 2n$ $\quad$ $b_n = a_{2n}$ sottosuccessione dei termini in posizione pari

$a_n = (-1)^n$ $\quad$ $b_n = (-1)^{2n} = 1 \ \forall n$

4) $k_n = 2n+1$ $\quad$ $b_n = a_{2n+1}$ sottosuccessione dei termini in posizione dispari

$a_n = (-1)^n$ $\quad$ $b_n = (-1)^{2n+1} = -1$

Lemma

Sia $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente (e dunque iniettiva)

$\Rightarrow k(n) \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dim: Sia per assurdo $k(\bar{n}) < \bar{n}$ per un qualche $\bar{n} \in \mathbb{N}$

Allora $\forall m < \bar{n}$, $k(m) < k(\bar{n}) < \bar{n}$

k strettamente crescente

$$\Rightarrow \underbrace{k(\{0, 1, \dots, \bar{n}-1\})}_{\text{HA } \bar{n} \text{ ELEMENTI DISTINTI PERCHÈ } k \text{ INIETTIVA}} \subseteq \underbrace{\{0, 1, \dots, k(\bar{n})-1\}}_{\text{HA } k(\bar{n}) \text{ ELEMENTI}}$$

$\Rightarrow \bar{n} \leq k(\bar{n}) < \bar{n}$ Assurdo.

Teorema

Sia $(a_n)_n$ successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$
e sia b_n una sua sottosuccessione.
Allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$

Dim: Sia $b_n = a_{k_n}$ con $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k(n) = k_n$ strett. crescente
Supponiamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$. Preso $\varepsilon > 0$, $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}\ |a_n - \ell| < \varepsilon$

k str. cresc. $\Rightarrow$ per il Lemma precedente $k(n) = k_n \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall n \geq \bar{n} \quad |b_n - \ell| = |a_{k_n} - \ell| < \varepsilon$ poiché $k_n \geq n \geq \bar{n}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$

La dimostrazione nel caso $\ell \in \{+\infty, -\infty, \infty\}$ è analoga.

NB: non vale il viceversa! Se b_n sottosuccessione di a_n

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell \not\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$$

Si ha tuttavia

<u>Teorema</u>

Sia $(a_n)_n$ successione

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\} \iff$ ogni sottosuccessione estratta da $(a_n)_n$ ha una sottosuccessione con limite ℓ.

Inoltre, se da una successione $(a_n)_n$ estraggo due o più sottosuccessioni (in numero FINITO) con lo stesso limite l e complessivamente "ricostruiscono" $(a_n)_n$, allora $(a_n)_n$ ha limite l.

Esempio

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{1}{\ln(n)} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Teorema

Ogni successione in $\mathbb{R}$ ha una sottosuccessione monotona

Dim: Sia $(a_n)_n$ la successione. Definiamo

$$G = \{ n \in \mathbb{N} \mid a_m < a_n \ \forall m > n \}$$

G è l'insieme degli indici n tali che a_n è maggiore di tutti i termini successivi

Distinguiamo due casi:

a) $G = \{n \in \mathbb{N} \mid a_m < a_n \ \forall m > n\}$ è finito (eventualmente vuoto)

G finito (e non vuoto) $\Rightarrow \exists \max G$

Definiamo $n_0 = 1 + \max G$ (se G è vuoto, poniamo $n_0 = 1$)

Ovviamente $n_0 \notin G$ (poiché $n_0 > \max G$) e dunque

$\exists k_1 > n_0 : a_{k_1} \geq a_{n_0}$ ← DALLA DEFINIZIONE DI G

Analogamente, poiché $k_1 > n_0 > \max G$, si ha che

$\exists k_2 > k_1 : a_{k_2} \geq a_{k_1}$ ← $k_{n+1} > k_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Continuando così si costruisce una sottosuccessione

$b_n = a_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$, di $(a_n)_n$ crescente.

b) Sia $G = \{n \in \mathbb{N} : a_m < a_n \ \forall m > n\}$ infinito

Ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ha minimo. Quindi poniamo

$k_0 = \min G$, $k_1 = \min G \setminus \{k_0\}$, $k_2 = \min G \setminus \{k_0, k_1\}$, ...

$k_n = \min G \setminus \{k_0, k_1, ..., k_{n-1}\}$, ... $\leftarrow$ $k_{n+1} > k_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Si ottiene una sottosuccessione $b_n = a_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$, di $(a_n)_n$ tale che $b_{n+1} = a_{k_{n+1}} < b_n = a_{k_n}$ $\leftarrow$ DALLA DEFINIZIONE DI G

cioè decrescente

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_n	10	8	7	5	4	1	2	1	2	1	2	...

$G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ è finito, $\max G = 4$, $n_0 = 5$

$b_n = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ è sottosuccessione crescente

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_n	3	1	2	0	1	-1	0	-2	-1	-3	-2	...

$G = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è infinito

$b_n = a_{2n}$ è sottosuccessione decrescente

Corollario

Ogni successione di numeri reali limitata ha una sottosuccessione convergente

Dim: Sia $(a_n)_n$ successione limitata

$\Rightarrow \exists (b_n)_n$ sottosuccessione monotona di $(a_n)_n$

$(a_n)_n$ limitata $\Rightarrow (b_n)_n$ limitata

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty} b_n \in \mathbb{R}$ (perché $(b_n)_n$ monotona e limitata)

Successioni definite per ricorrenza - un esempio

Mostrare che la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{cases}$$

è ben definita e studiarne il limite

Verifichiamo che $2+a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

Per induzione: $\quad n=1 \Rightarrow 2+a_n = 2 \geq 0$

Sia $2+a_n \geq 0$. Allora $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \geq 0$

e dunque $\quad 2+a_{n+1} = 2+\sqrt{2+a_n} \geq 0$

$\Rightarrow 2+a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$

Dimostriamo che la successione è crescente

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq 1 \iff \sqrt{2+a_n} \geq a_n \quad \forall n \geq 1$$

Per induzione:

Se $n=1$ si ha $a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2} > 0 = a_1$

Sia $a_{n+1} \geq a_n$ e proviamo che $a_{n+2} \geq a_{n+1}$

$$a_{n+2} \geq a_{n+1} \iff \sqrt{2+a_{n+1}} \geq \sqrt{2+a_n} \iff 2+a_{n+1} \geq 2+a_n$$

$$\iff a_{n+1} \geq a_n$$

$\Rightarrow (a_n)_n$ è crescente.

Quindi $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \text{se } (a_n)_n \text{ è limitata} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ allora anche la sottosuccessione $b_n = a_{n+1}$ ha lo stesso limite e quindi

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{2+a_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \sqrt{2+\ell} \end{array}$$

cioè $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, che ha soluzioni 2 e -1.

$a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Rightarrow$ scarto $\ell = -1$

$\Rightarrow$ Il limite di $(a_n)_n$ è $+\infty$ o 2.

Tale limite è $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$, poiché $(a_n)_n$ è crescente.

Verifichiamo se $a_n \leq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Per induzione:

$a_1 = 0 \leq 2$

Sia $a_n \leq 2$ e proviamo che $a_{n+1} \leq 2$

$a_{n+1} \leq 2 \iff \sqrt{2+a_n} \leq 2 \iff 2 + a_n \leq 4 \iff a_n \leq 2$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} = 2$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SUCCESSIONI IN R

Parte 4

3, 9, 27, 81, 243, … ?

Teorema

Ogni successione ha una sottosuccessione monotona

Corollario

Ogni successione limitata ha una sottosuccessione convergente.

Dim.: Sia $(a_n)_n$ una successione limitata. Per il teorema precedente questa ha una sottosuccessione monotona e necessariamente limitata. Per il teorema sulla convergenza delle successioni monotone, questa sottosuccessione converge. $\square$

SUCCESSIONI DI CAUCHY

Def.: $(a_n)_n$ è di Cauchy (o fondamentale)
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}: \forall n,m \geq \bar{n}\quad |a_n - a_m| < \varepsilon$

Proposizione

$(a_n)_n$ è di Cauchy $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ è limitata.

Dim: Sia $(a_n)_n$ di Cauchy. Fissata $\varepsilon>0$, $\exists\ \bar{n}: \forall n,m \geq \bar{n}$
$|a_n - a_m| < \varepsilon$. Poniamo $m=\bar{n}$. Dunque
$|a_n| = |a_n - a_{\bar{n}} + a_{\bar{n}}| \leq |a_n - a_{\bar{n}}| + |a_{\bar{n}}| < \varepsilon + |a_{\bar{n}}|\quad \forall n \geq \bar{n}$
$\Rightarrow |a_n| \leq \max\{\max\{|a_i| : i < \bar{n}\}, \varepsilon + |a_{\bar{n}}|\}\quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Teorema (CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY)

$(a_n)_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $(a_n)_n$ è di Cauchy

Dim: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$. Allora

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad |a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow$ si ha, $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall n, m \geq \bar{n}$

$$|a_n - a_m| = |a_n - \ell + \ell - a_m| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $(a_n)_n$ è di Cauchy. $\square$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $(a_n)_n$ di Cauchy.

$\Rightarrow$ $(a_n)_n$ è limitata

$\Rightarrow$ $\exists$ una sottosuccessione $(a_{k_n})_n$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell \in \mathbb{R}$$

Sia $\varepsilon > 0$.

$(a_n)_n$ di Cauchy $\Rightarrow \exists\, \overline{n}_1 : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq \overline{n}_1$

$(a_{k_n})_n$ converge a $\ell \Rightarrow \exists\, \overline{n}_2 : |a_{k_n} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq \overline{n}_2$

Siano $\overline{n} = \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\}$

$n \geq \overline{n}$

$m = k_n \geq n$

NB: $k(n) = k_n$

$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

strettamente crescente

$\Rightarrow k(n) \geq n \quad \forall n$

Risulta allora

$$m = k_n \geq n \geq \bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$$

$$n \geq \bar{n} \Rightarrow m = k_n \geq n \geq \bar{n}_1 \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geq \bar{n} \Rightarrow n \geq \bar{n}_2 \Rightarrow |a_{k_n} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui

$$|a_n - \ell| = |a_n - a_m + a_m - \ell| \leq |a_n - a_m| + |a_m - \ell| =$$

$$= |a_n - a_m| + |a_{k_n} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Quindi la successione $(a_n)_n$ converge a ℓ. $\square$

IL VANTAGGIO DEL CRITERIO DI CAUCHY È CHE NON FA INTERVENIRE DIRETTAMENTE IL LIMITE

Esercizi

a) Si provi che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\ell|$. Vale il viceversa?

Dobbiamo dimostrare che: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}\ \ ||a_n| - |\ell|| < \varepsilon$

Ricordiamo che per le norme vale la diseguaglianza

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$$

Applicando tale diseguaglianza alla norma valore assoluto in $\mathbb{R}$

si ha $\quad ||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell|$

Poiché $\lim_{\to+\infty} a_n = \ell$ si ha che $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}\ \ |a_n - \ell| < \varepsilon$

Quindi si ha $\ ||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell| < \varepsilon\ \ \forall n \geq \bar{n}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\ell|$

In alternativa si può impiegare la continuità del valore assoluto

$f(x) = |x|$ è continua

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n \to +\infty} |a_n| = f(\ell) = |\ell|$$

per la caratterizzazione della continuità di funzioni tramite successioni

Vale il viceversa? In generale, no.

Controesempio:

CONTROESEMPIO: un esempio che mostra che una proprietà non vale

$$a_n = (-1)^n$$

$$\Rightarrow |a_n| = |(-1)^n| = 1 \longrightarrow 1 \text{ per } n \to +\infty$$

ma $\nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$

b) Sia $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$, $b_n = (-1)^n a_n$

Studiare l'esistenza del limite di b_n al variare di $\ell \in \mathbb{R}$.

Consideriamo le 2 sottosuccessioni di $(a_n)_n$ con indici pari e dispari: $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_{2n} = \lim_{n \to +\infty} a_{2n+1} = \ell$$

Ma allora

$$\lim_{n\to+\infty} b_{2n} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \ell$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} -a_{2n+1} = -\ell$$

$\Rightarrow (b_n)_n$ ha limite $\Leftrightarrow \ell = -\ell \Leftrightarrow \ell = 0$

NB: si è usato il fatto che se una successione ha limite ogni sua sottosuccessione ha lo stesso limite

c) Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora $\exists\, n \in \mathbb{N} : n > x$

Ragioniamo per assurdo. Sia $n \leq x \ \forall n \in \mathbb{N}$

Allora $a_n = n \ (n \in \mathbb{N})$ è una successione crescente e superiormente limitata (da x)

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} n = \ell \in \mathbb{R}$$

PER ASSURDO: nego la tesi e cerco una contraddizione

Si ha ovviamente $a_{n+1} = a_n + 1$

$$\underset{\ell}{\underset{\downarrow}{a_{n+1}}} = \underset{\ell}{\underset{\downarrow}{a_n}} + 1 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow \ell = \ell + 1$. Assurdo.

Si tratta della PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE