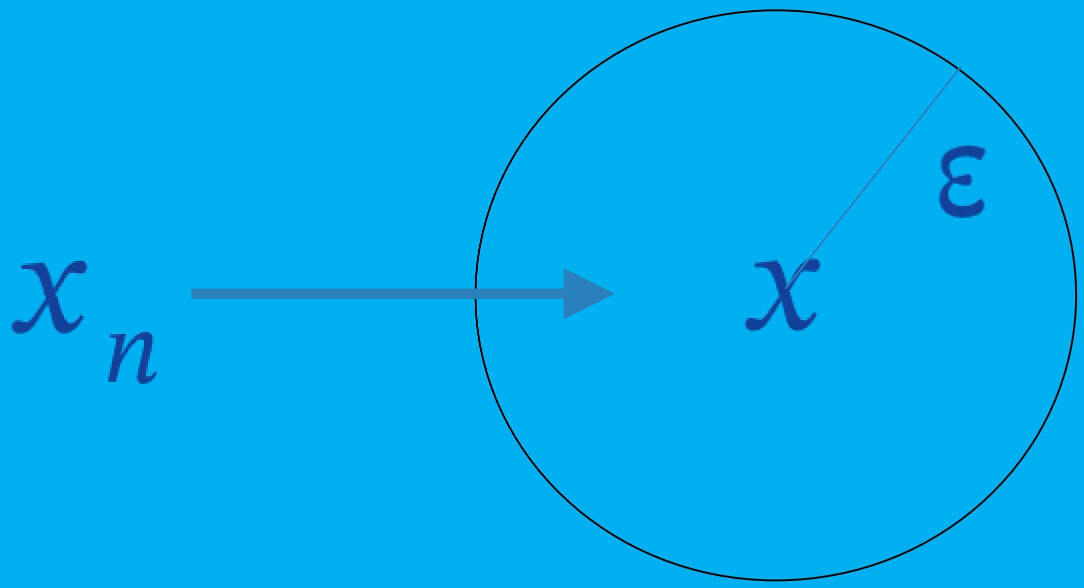
Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SUCCESSIONI IN R^m
Parte 1



Successione in $\mathbb{R}^m$

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m \qquad f(n) = x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m)$$

con $(x_n^i)_n$ successioni in $\mathbb{R}$ $\forall i = 1, \dots, m$

<u>Def.:</u> $\lim_{n \to +\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}^m \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad \| x_n - \ell \| < \varepsilon$

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \infty \iff \forall k > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \ \| x_n \| > k \iff \lim_{n \to +\infty} \| x_n \| = +\infty$$

<u>Proposizione</u>

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \ell = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m \iff \lim_{n \to +\infty} x_n^i = \ell_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, m$$

Proposizione

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}^m \Rightarrow (x_n)_n \text{ limitata}$$

Dim: Sia $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n^i = \ell_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, m \Rightarrow (x_n^i)_n \text{ limitata } \forall i = 1, \dots, m$$

$$\Rightarrow \exists\, k_i > 0 \ (i = 1, \dots, m) : |x_n^i| < k_i \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \|x_n\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_n^i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_n^i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{m} k_i^2} = \|k\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dove $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{R}^m$ e $\|k\| \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x_n \in B(0, \|k\|) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Proposizione **CARATTERIZZAZIONE DERIVATO CON SUCCESSIONI**

$E \subseteq \mathbb{R}^m$, $\bar{x}$ di accumulazione per $E \iff \exists (x_n)_n : x_n \in E, x_n \neq \bar{x} \ \forall n$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$

Dim: $\boxed{\Rightarrow}$ $\bar{x}$ è di accumulazione per E

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \ x_n \in B(\bar{x}, \frac{1}{n}) \cap E - \{\bar{x}\}$

Dimostriamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$. Preso $\varepsilon > 0$ e $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$ si ha

$n \geq \bar{n} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \iff \varepsilon > \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \in B(\bar{x}, \frac{1}{n}) \subseteq B(\bar{x}, \varepsilon)$ cioè
$\|x_n - \bar{x}\| < \varepsilon$. Quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $(x_n)_n$ come nell'ipotesi. Preso $\varepsilon > 0$, $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$ si ha $\|x_n - \bar{x}\| < \varepsilon$
$\Rightarrow x_n \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap E - \{\bar{x}\} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{x}$ di accumulazione per E. $\square$

NB: un analogo risultato vale per $\bar{x} = \infty$.

Proposizione $\boxed{\text{CARATTERIZZAZIONE CHIUSURA CON SUCCESSIONI}}$

$E \subseteq \mathbb{R}^m$, $\overline{x} \in \overline{E} \iff \exists (x_n)_n : x_n \in E \ \forall n \in \mathbb{N} \ \lim_{n \to +\infty} x_n = \overline{x}$

Dim: $\boxed{\Rightarrow}$ Sia E' il derivato di E e ricordiamo che $\overline{E} = E \cup E'$.

Se $\overline{x} \in E$, allora posto $x_n = \overline{x}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha ovviamente $\lim_{n \to +\infty} x_n = \overline{x}$.

Se invece $\overline{x} \in E'$ il risultato segue dalla Proposizione precedente.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $(x_n)_n$ come nell'ipotesi. Allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}$ si ha $\|x_n - \overline{x}\| < \varepsilon$.

Quindi $\forall B(\overline{x}, \varepsilon)$ si ha $x_n \in B(\overline{x}, \varepsilon) \cap E$ e dunque $B(\overline{x}, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$

$\Rightarrow \overline{x} \in \overline{E}$ $\square$

Proposizione $\boxed{\text{CARATTERIZZAZIONE DEI CHIUSI CON SUCCESSIONI}}$

$E \subseteq \mathbb{R}^m$ è chiuso $\Longleftrightarrow$ $\forall (x_n)_n : x_n \in E \; \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \to +\infty} x_n = \overline{x}$, si ha $\overline{x} \in E$.

Dim: $\boxed{\Rightarrow}$ E chiuso $\Rightarrow E = \overline{E}$. Presa $(x_n)_n : x_n \in E \; \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \to +\infty} x_n = \overline{x}$, per la Proposizione precedente (nel verso $\boxed{\Leftarrow}$) si ha $\overline{x} \in \overline{E} = E$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ricordiamo che E chiuso $\Longleftrightarrow$ $E = \overline{E}$.

Poiché $E \subseteq \overline{E}$, prendiamo $\overline{x} \in \overline{E}$ e dimostriamo che $\overline{x} \in E$.

Sia $\overline{x} \in \overline{E}$. Per la Proposizione precedente $\exists (x_n)_n : x_n \in E \; \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \to +\infty} x_n = \overline{x}$. Per l'ipotesi si ha quindi $\overline{x} \in E$. Dunque $E = \overline{E}$ $\square$

SUCCESSIONI E COMPATTEZZA

$E \subseteq \mathbb{R}^m$ compatto $\Leftrightarrow$ E chiuso e limitato (Teor. di Heine-Borel)

<u>Def.</u>: $K \subseteq \mathbb{R}^m$ è compatto per successioni $\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_n : x_n \in K \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\exists (x_{k_n})_n : \exists \lim_{n \to +\infty} x_{k_n} = \overline{x} \in K$$

SI DICE ANCHE SEQUENZIALMENTE COMPATTO

<u>Teorema</u>

$K \subseteq \mathbb{R}^m$ è compatto $\Leftrightarrow$ K è compatto per successioni

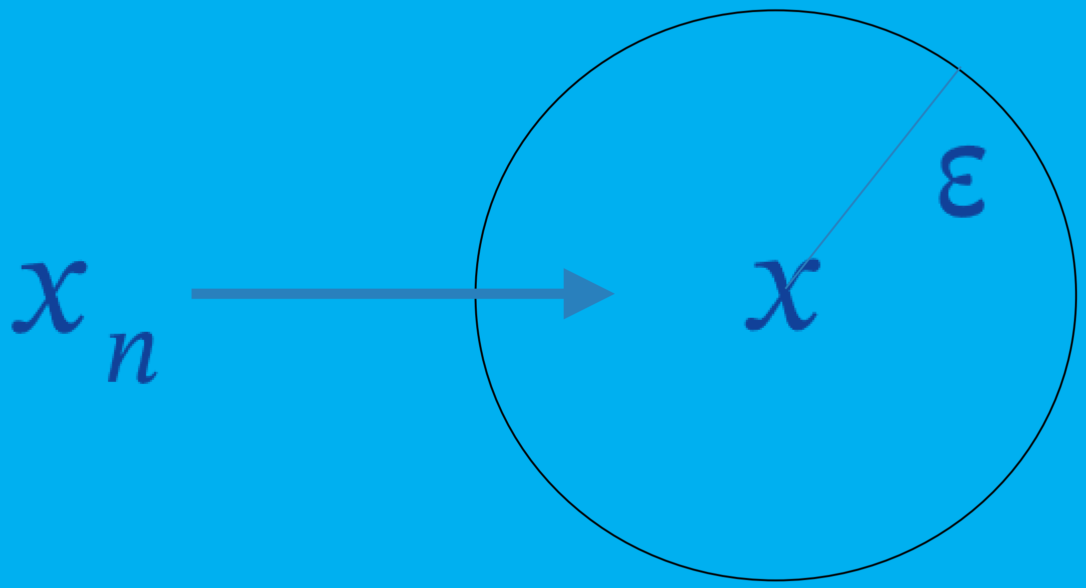
Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SUCCESSIONI IN R^m
Parte 2



SUCCESSIONI E COMPATTEZZA

$E \subseteq \mathbb{R}^m$ compatto $\Leftrightarrow$ E chiuso e limitato (Teor. di Heine-Borel)

<u>Def.</u>: $K \subseteq \mathbb{R}^m$ è compatto per successioni $\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_n : x_n \in K \; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\exists (x_{k_n})_n : \exists \lim_{n \to +\infty} x_{k_n} = \overline{x} \in K$$

SI DICE ANCHE SEQUENZIALMENTE COMPATTO

<u>Teorema</u>

$K \subseteq \mathbb{R}^m$ è compatto $\Leftrightarrow$ K è compatto per successioni

Dim: $\boxed{\Rightarrow}$ Sia $(x_n)_n$ successione in K.

K limitato $\Rightarrow \exists (x_{k_n})_n$ sottosuccessione: $\lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = \bar{x}$.

K chiuso $\Rightarrow \bar{x} \in K$

$\boxed{\Leftarrow}$ a) K è limitato. Infatti, sia per assurdo K illimitato.

Allora $\neg\,(\exists k>0 : \|x\| \le k \ \forall x \in K)$, cioè:

$\forall k>0 \ \exists x_k \in K : \|x_k\| > k$.

NEGHIAMO LA DEFINIZIONE DI INSIEME LIMITATO

Ponendo $k = n \in \mathbb{N}$ si ottiene: $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in K : \|x_n\| > n$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty$ (confronto con $a_n = n$) $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = \infty$

$\forall$ sottosuccessione $(x_{k_n})_n$ di $(x_n)_n$ sarà $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = \infty$. Assurdo.

b) <u>K è chiuso</u>.

Sia $\overline{x} \in \overline{K}$. Allora $\exists (x_n)_n$ in K: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \overline{x}$

K sequenzialmente compatto $\Rightarrow \exists$ una sottosuccessione $(x_{k_n})_n$:
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = \overline{y} \in K$.

Ma (x_{k_n}) sottosuccessione di $(x_n)_n \Rightarrow \overline{x} = \overline{y} \in K$

$\Rightarrow \overline{K} \subseteq K$ e poiché $K \subseteq \overline{K}$ si ha $K = \overline{K}$, cioè K è chiuso. $\square$

SUCCESSIONI DI CAUCHY IN $\mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{N})$

<u>Def.:</u> $(x_n)_n$ successione in $\mathbb{R}^p$ è di Cauchy (o fondamentale)

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n, m \geq \bar{n} \quad \underbrace{\|x_n - x_m\|}_{=\, d(x_n, x_m)} < \varepsilon.$$

$\boxed{d(x_n, x_m) \text{ DISTANZA TRA } x_n \text{ e } x_m}$

<u>Teorema</u>

Sia $(x_n)_n$ successione in $\mathbb{R}^p$

$(x_n)_n$ è convergente $\Leftrightarrow$ $(x_n)_n$ è di Cauchy

<u>Dim:</u> Analoga a quella per successioni in $\mathbb{R}$.

Ricordiamo la definizione di distanza

Def.: $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\boxed{(X \text{ insieme})}$

1) $d(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \in X$ e $d(x,y)=0 \iff x=y$

2) $d(x,y) = d(y,x) \ \forall x,y \in X$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \ \forall x,y,z \in X$

è una $\boxed{\text{DISTANZA}}$

Def.: (X,d) con d distanza su X è uno SPAZIO METRICO

(X,d) sp. metrico $\quad f: \mathbb{N} \to X \quad f(n) = x_n \quad (x_n)_n$ successione in X

$(x_n)_n$ converge a $x \in X \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad d(x_n, x) < \varepsilon$

$(x_n)_n$ è di Cauchy $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} : \forall n, m \geq \bar{n} \; d(x_n, x_m) < \varepsilon$

IN $\mathbb{R}^n$ CONVERGENZA $\iff$ CRITERIO DI CAUCHY

COSA SUCCEDE IN GENERALE NEGLI SPAZI METRICI ?

<u>Def.:</u> Sia (X,d) spazio metrico

X è completo $\iff$ ogni successione di Cauchy in X converge

$$\boxed{\mathbb{R}^n \text{ è completo}}$$

Esistono spazi metrici non completi? $\boxed{\text{SÌ}}$

Sia $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ successione in $\mathbb{Q}$

$(x_n)_n$ è di Cauchy in $\mathbb{Q}$?

$\lim_{n\to+\infty} x_n = e \in \mathbb{R} \Rightarrow (x_n)_n$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n} : \forall n,m \geq \bar{n} \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)_n$ è di Cauchy in $\mathbb{Q}$ e non converge in $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ perchè il limite e è unico in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{Q} \text{ non è completo}}$