Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CONTINUITA' DI FUNZIONI $R^n \to R^m$

Parte quinta

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

CONTINUITÀ E CONNESSIONE

<u>Lemma</u>

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso $\Leftrightarrow$ gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi in E sono $\emptyset$ ed E

Quindi: E connesso, $A \subseteq E$, A aperto e chiuso in E

$\Rightarrow A = \emptyset$ o $A = E$

Teorema

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua, E connesso $\Rightarrow f(E)$ connesso.

Dim: Sia, per assurdo, $f(E)$ non connesso.

$\Rightarrow$ per il Lemma precedente $\exists\, A \subseteq f(E)$, $A \neq \emptyset$, $A \neq f(E)$, aperto e chiuso in $f(E)$.

$\Rightarrow A = F_1 \cap f(E) = F_2 \cap f(E)$ con F_1 aperto in $\mathbb{R}^m$, F_2 chiuso in $\mathbb{R}^m$.

$\Rightarrow f^{-1}(A) = f^{-1}(F_1 \cap f(E)) = \{x \in E \mid f(x) \in F_1 \cap f(E)\} =$

$= \{x \in E \mid f(x) \in F_1\} = f^{-1}(F_1)$ aperto in E perché controimmagine di un aperto in $\mathbb{R}^m$ ed f è continua.

Analogamente

$f^{-1}(A) = f^{-1}(F_2 \cap f(E)) = f^{-1}(F_2)$ chiuso in E perché controimmagine di un chiuso in $\mathbb{R}^m$ e f è continua.

$\Rightarrow f^{-1}(A)$ è aperto e chiuso in E.

Inoltre: $f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\} \neq \emptyset$, altrimenti $f(x) \in A^c \ \forall x \in E$

$\Longrightarrow A \subseteq f(E) \subseteq A^c \Longrightarrow A = \emptyset$ in contraddizione con $A \neq \emptyset$

$f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\} \neq E$, altrimenti $f(x) \in A \ \forall x \in E$

$\Longrightarrow A \subseteq f(E) \subseteq A \Rightarrow f(E) = A$ in contraddizione con $A \neq f(E)$.

$\Longrightarrow$ Per il Lemma precedente E non è connesso: contraddizione. $\square$

COMPATTEZZA, CONTINUITÀ E INIETTIVITÀ

Teorema

$f : K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ iniettiva e continua, K compatto

$\Rightarrow f^{-1} : f(K) \to K$ è continua

Teorema

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva, I intervallo

$\Rightarrow f^{-1} : f(I) \to I$ è continua

Inoltre, I aperto (chiuso) $\Rightarrow f(I)$ aperto (chiuso)

PRINCIPALI RISULTATI

Sia $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua

1) K compatto $\Rightarrow$ $f(K)$ compatto

2) K compatto $\Rightarrow$ $\exists \max f(K), \min f(K)$

3) K compatto $\Rightarrow$ f uniformemente continua

4) K connesso $\Rightarrow$ $f(K)$ connesso

Inoltre

5) Caratterizzazione continuità con controimmagini di aperti/chiusi

6) Caratterizzazione alternativa degli insiemi connessi

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CONTINUITA' DI FUNZIONI $R^n \rightarrow R^m$

Parte sesta

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

PRINCIPALI RISULTATI

Sia $f: K \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua

1) K compatto $\Rightarrow f(K)$ compatto

2) K compatto $\Rightarrow \exists \max f(K), \min f(K)$

3) K compatto $\Rightarrow f$ uniformemente continua

4) K connesso $\Rightarrow f(K)$ connesso

Inoltre

5) Caratterizzazione continuità con controimmagini di aperti/chiusi

6) Caratterizzazione alternativa degli insiemi connessi

Teorema (degli zeri)

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, E connesso

$x, y \in E$ tali che $f(x) \cdot f(y) < 0$ $\quad \Rightarrow \exists\, z \in E : f(z) = 0$

Dim: E connesso, f continua $\Rightarrow f(E) \subseteq \mathbb{R}$ connesso $\Rightarrow f(E)$ intervallo

(in $\mathbb{R}$ un insieme è connesso $\Leftrightarrow$ è un intervallo)

$\Rightarrow$ supponendo $f(x) < f(y)$ si ha $0 \in\,]f(x), f(y)[\, \subseteq f(E)$

$\Rightarrow 0 \in f(E) \Rightarrow \exists\, z \in E : f(z) = 0.$ $\square$

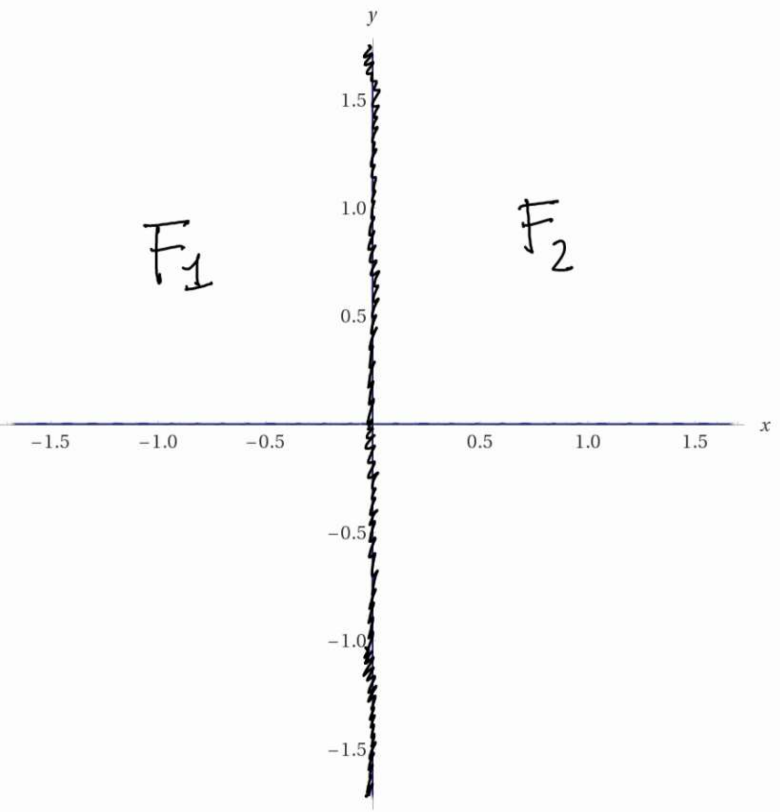
Il Teorema degli zeri può essere impiegato per rappresentare il dominio di una funzione in due variabili

Esempio: Si rappresenti il dominio della funzione

$f(x,y) = \sqrt{x(x^2+y^2-1)}$ $\qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(x^2+y^2-1) \geq 0\}$

Siano $f_1(x,y) = x$, $f_2(x,y) = x^2+y^2-1$

Entrambe sono CONTINUE



$x = 0$

Restano individuati 2 insiemi connessi

$F_1 = \{(x,y) \mid x<0\}$, $F_2=\{(x,y)\mid x>0\}$

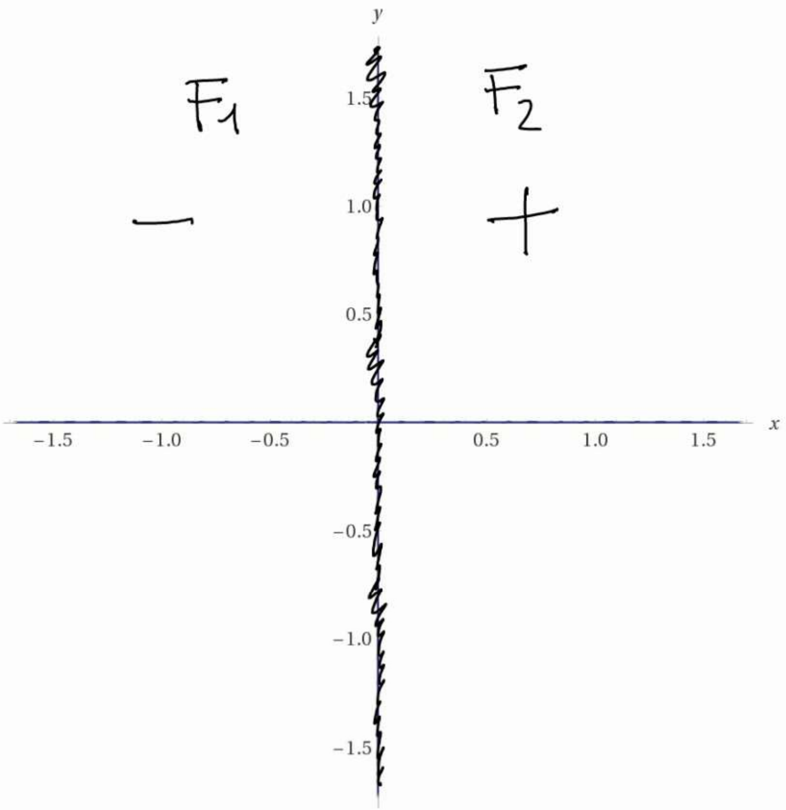
Supponiamo che $\exists\ (\bar{x}_1,\bar{y}_1), (\bar{x}_2,\bar{y}_2) \in F_1$ tali che $f_1(\bar{x}_1,\bar{y}_1)>0$, $f_1(\bar{x}_2,\bar{y}_2)<0$.

$\Rightarrow \exists\ (z_1,z_2)\in F_1$ tale che $f_1(z_1,z_2)=z_1=0$

Ma $F_1=\{(x,y)\mid x<0\}$ $\Rightarrow$ CONTRADDIZIONE

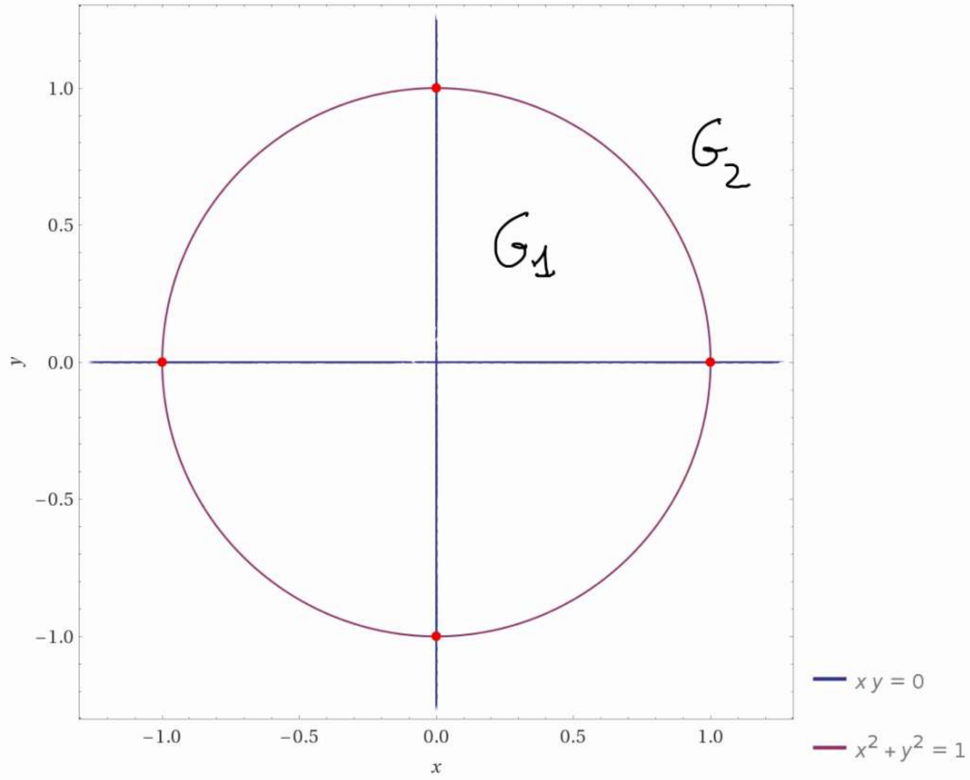
$\Rightarrow$ BASTA VALUTARE f_1 IN UN SOLO PUNTO DI F_1 PER AVERE IL SEGNO DI f_1 in tutto F_1. Idem per F_2.

$f_1(-3,0) = -3 < 0 \quad f_1(3,0) = 3 > 0$ <- VALUTO IN DUE PUNTI



$\Rightarrow$ f negativa in F_1, positiva in F_2

NB: VISTA LA SEMPLICITÀ DELLA FUNZIONE OVVIAMENTE ERA IMMEDIATO RAPPRESENTARE IL SEGNO DI f_1



La circonferenza di equazione

$f_2(x,y) = x^2+y^2-1=0$ individua

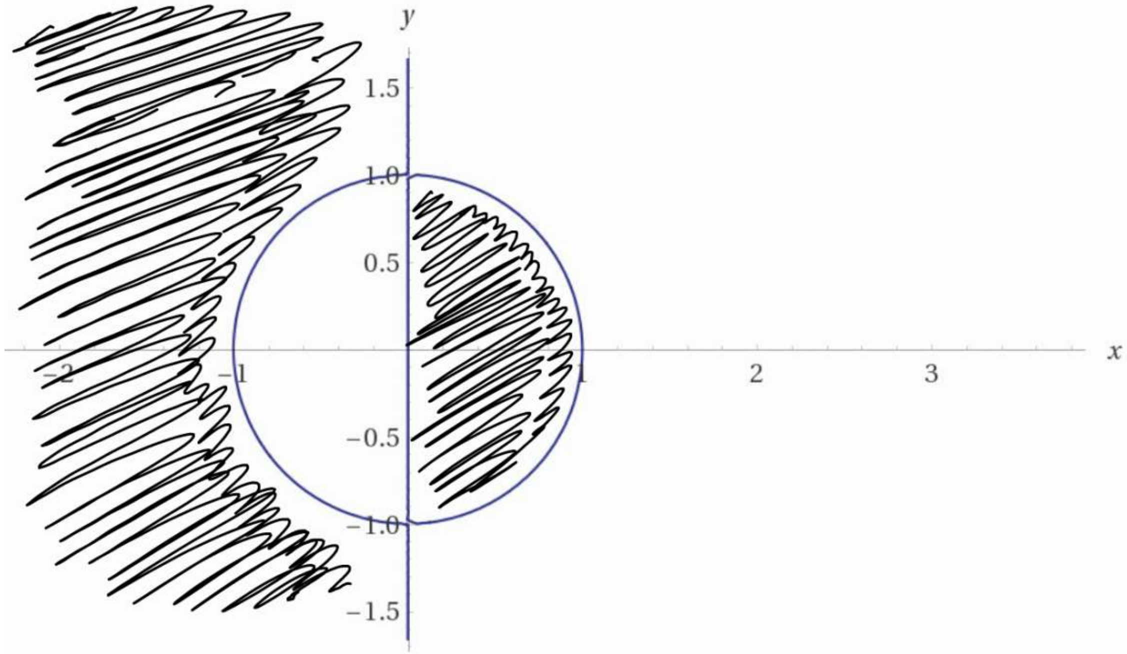
due zone connesse G_1, G_2

$\Rightarrow$ scelgo due punti, uno in

G_1 e uno in G_2:

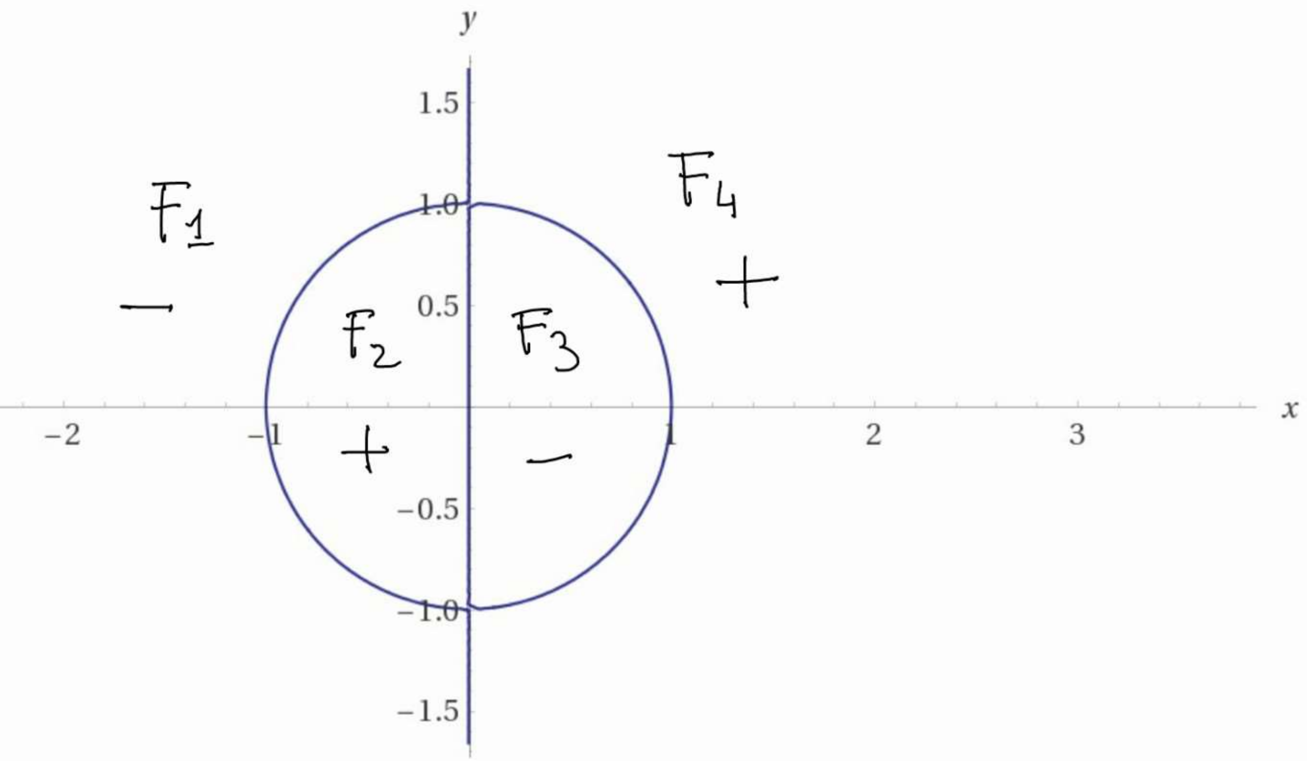
$f_2(0,0) = -1 < 0, \quad f_2(2,0) = 3 > 0$

$\Rightarrow$ f_2 è positiva in G_2, negativa in G_1



= NON FA PARTE DEL DOMINIO

Combinando i segni si può reappresentare il dominio di f



In alternativa si può usare direttamente

$$f_3(x,y) = x(x^2+y^2-1)$$

$f_3(x,y)=0$ determina 4 zone connesse

f_3 è continua

$f_3(3,0)=24>0$, $f_3(-3,0)=-24<0$, $f_3(\frac{1}{2},0)=-\frac{3}{8}<0$, $f_3(-\frac{1}{2},0)=\frac{3}{8}>0$

$\Rightarrow$ le zone a segno positivo costituiscono il dominio, assieme ai punti sulla circonferenza

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito

Appello del 7/2/2020

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (4 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno e l'insieme di livello zero della funzione

$$f(x,y)=\frac{x^2+4y^2-16}{(4x^2+y^2-16)(x^2+y^2-4)}$$

   (b) (1 punto) Si studi il limite di f in $(2,0)$.

   (c) (2 punti) Si studi il limite di f in $\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

   (d) (1 punto) Si disegni la frontiera dell'insieme D.

   (e) (1 punto) Si spieghi cosa significa, secondo la definizione, che il punto $(0,0)$ è interno all'insieme D.

2. (a) Sia data la funzione

Studiare dominio, segno, linea di livello zero e frontiera del dominio di

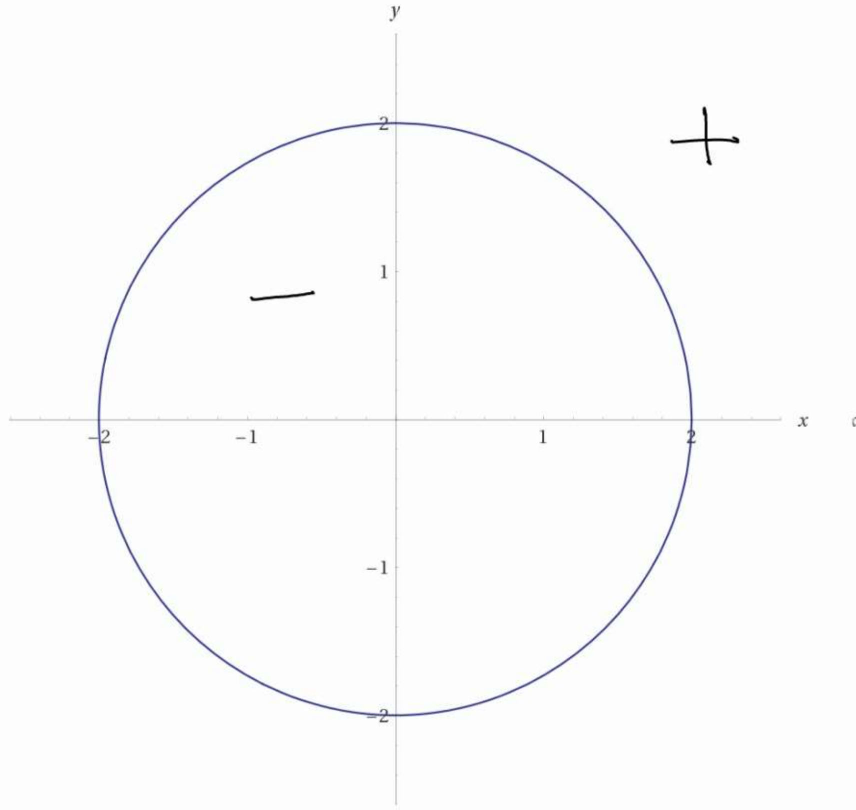
$$f(x,y) = \frac{x^2+4y^2-16}{(4x^2+y^2-16)\,(x^2+y^2-4)}$$

$$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2+y^2-16 \neq 0,\ x^2+y^2-4 \neq 0 \}$$

$$f_1(x,y) = x^2+y^2-4$$

l.l.0: $x^2+y^2=4$ circonferenza

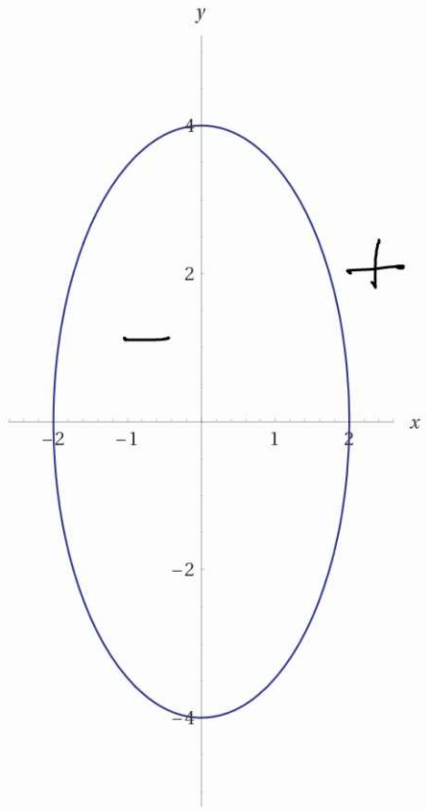
$$\left.\begin{aligned} f_1(0,0) &= -4 < 0 \\ f_1(3,0) &= 5 > 0 \end{aligned}\right\} \text{ 2 zone}$$



$f_2(x,y) = 4x^2+y^2-16$

l.l 0 : $4x^2+y^2=16$ ellisse

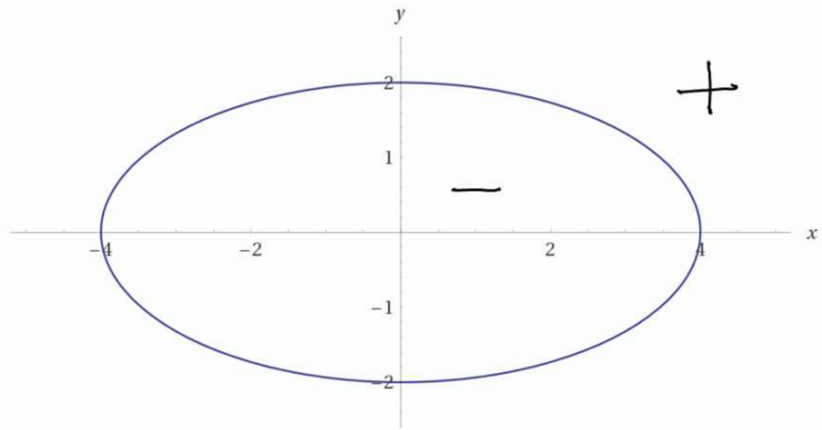
$$\left.\begin{array}{l} f_2(0,0) = -16<0 \\ f_2(3,0) = 20>0 \end{array}\right\} \text{2 zone}$$

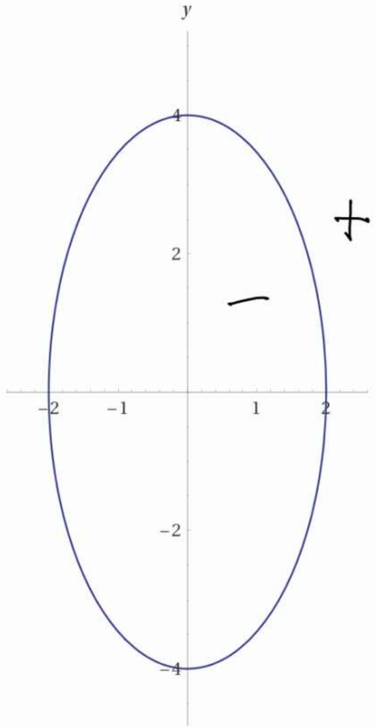


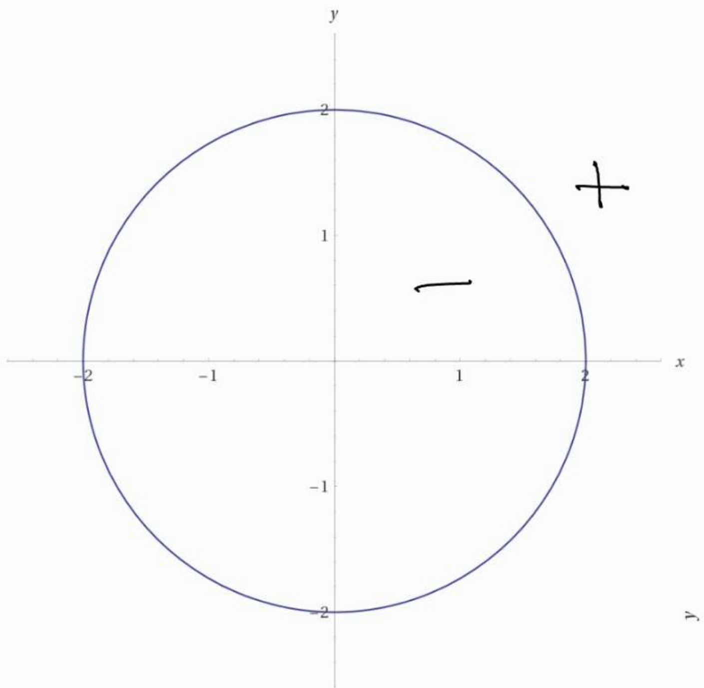
$$f_3(x,y) = x^2 + 4y^2 - 16$$

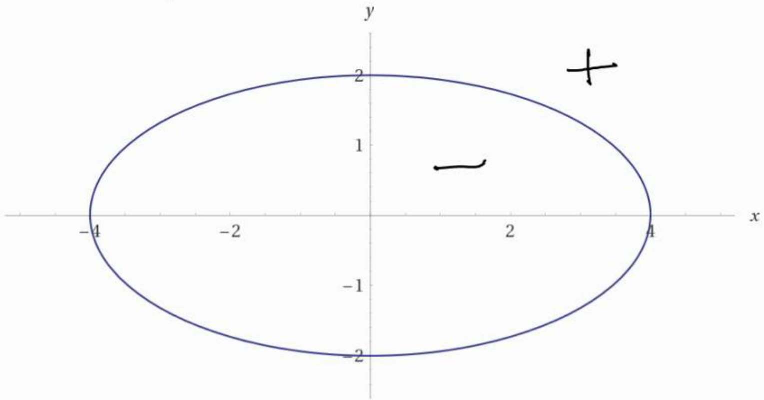
l.l.0: $x^2 + 4y^2 = 16$ ellisse

$$\left.\begin{array}{l} f_3(0,0) = -16 < 0 \\ f_3(5,0) = 9 > 0 \end{array}\right\} \text{2 zone}$$

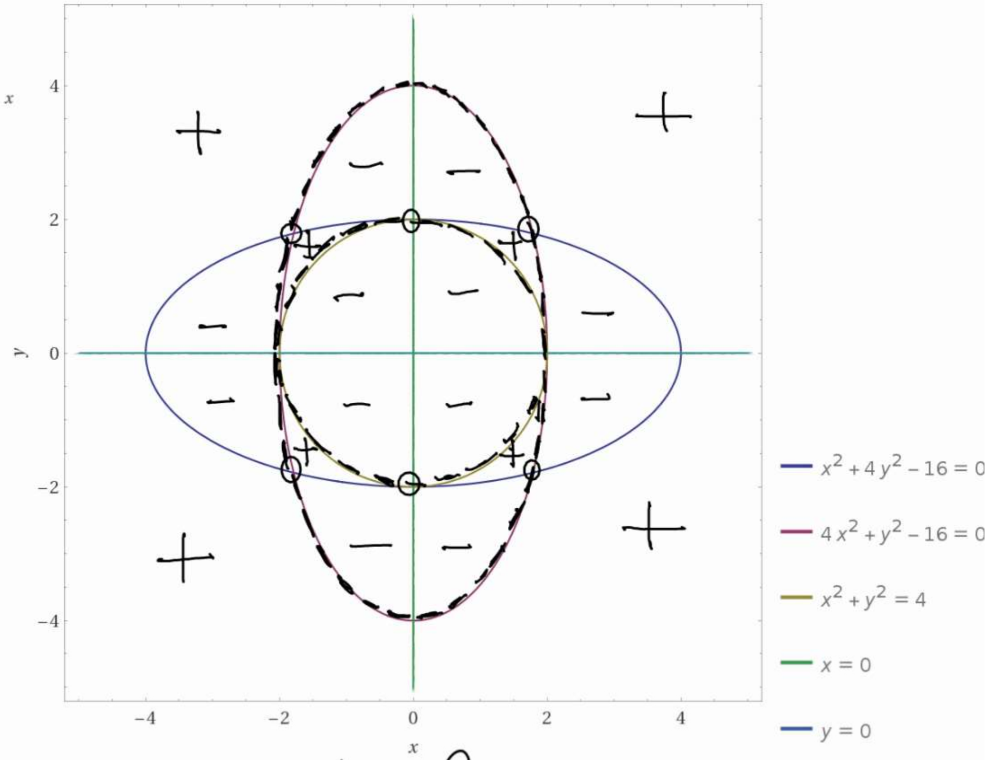




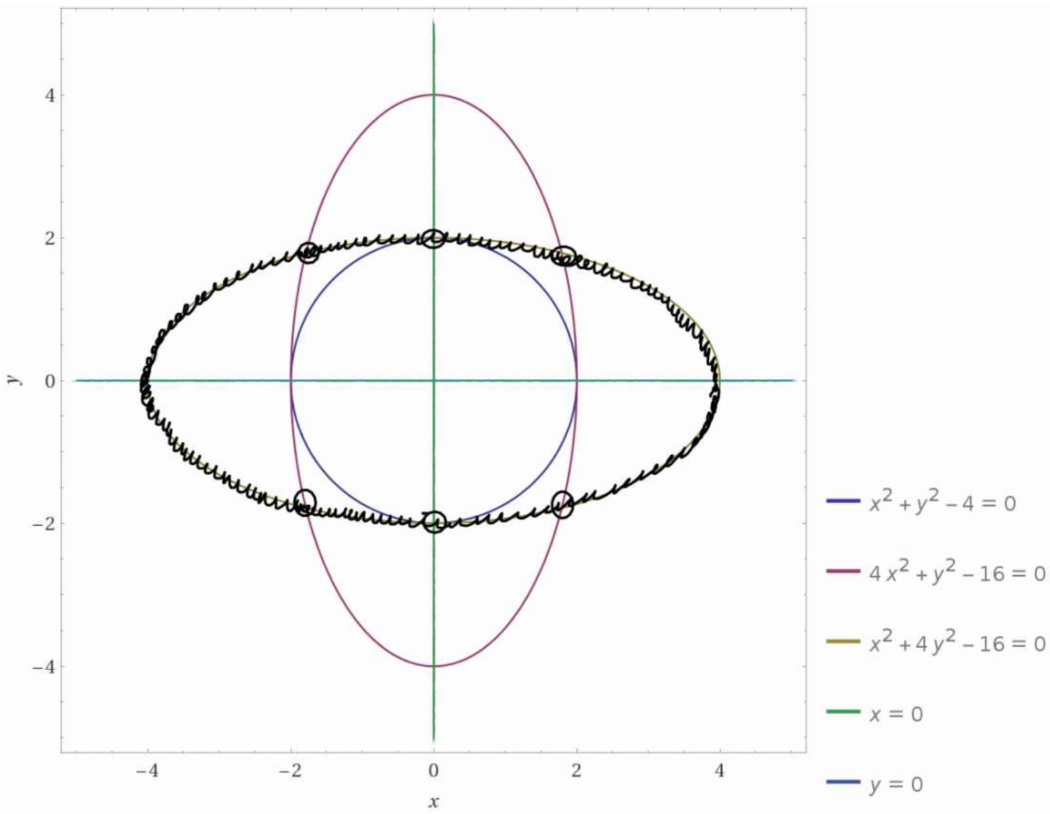


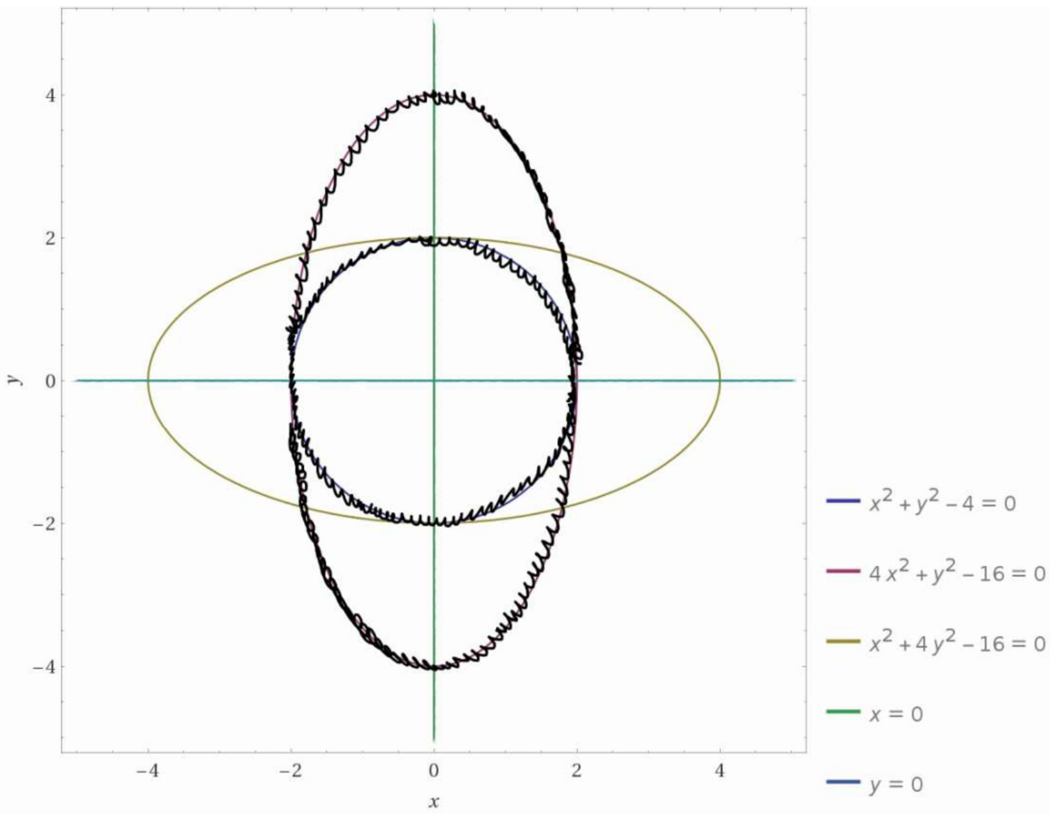


- - - o $\notin$ al dominio



Insieme di definizione e segno di f





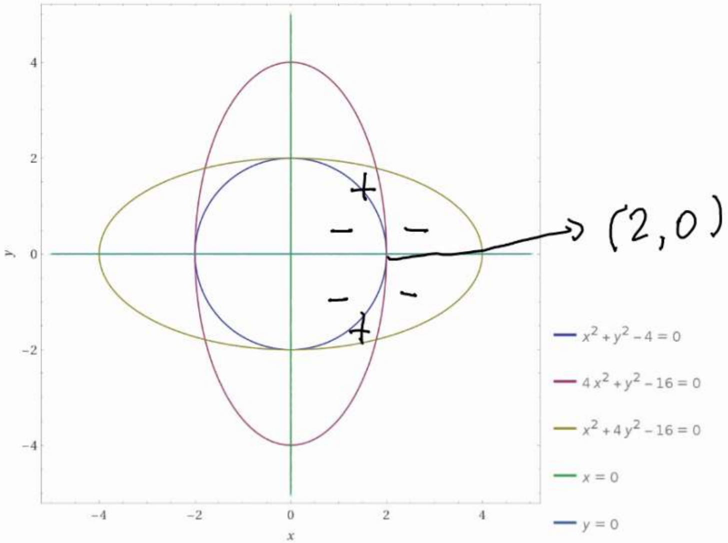
linea di livello zero

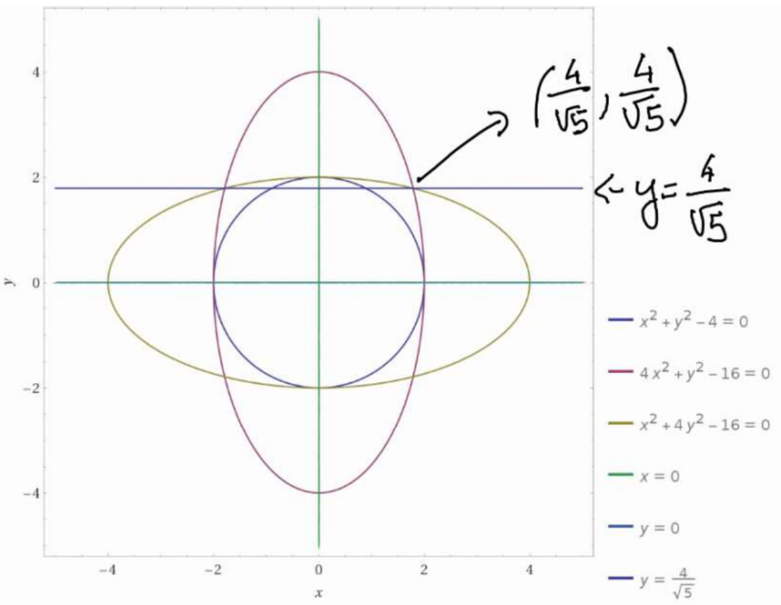
o punto escluso dalla C.C.O

frontiera del dominio

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\overbrace{x^2+4y^2-16}^{\to\, -12}}{\underbrace{(4x^2+y^2-16)}_{\to\, 0}\,\underbrace{(x^2+y^2-4)}_{\to\, 0}} = \infty$$

Non si può assegnare un segno a $+\infty$, perché IN OGNI intorno di $(2,0)$ esistono punti in cui $f(x,y)>0$ e punti in cui $f(x,y)<0$.





$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{4}{\sqrt5},\frac{4}{\sqrt5}\right)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to\left(\frac{4}{\sqrt5},\frac{4}{\sqrt5}\right)} \frac{\underbrace{x^2+4y^2-16}_{\to 0}}{\underbrace{(4x^2+y^2-16)}_{0}\underbrace{(x^2+y^2-4)}_{\frac{12}{5}}}$$

$\Rightarrow$ FORMA INDETERMINATA

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{4}{\sqrt5},\frac{4}{\sqrt5}\right)} \frac{x^2+4y^2-16}{4x^2+y^2-16}\Bigg|_{y=\frac{4}{\sqrt5}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{4}{\sqrt5}} \frac{5x^2-16}{20x^2-64} = \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to\left(\frac{4}{\sqrt5},\frac{4}{\sqrt5}\right)} f\Big|_{y=\frac{4}{\sqrt5}}(x,y) = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{12} = \frac{5}{48}$$

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{4}{\sqrt5},\frac{4}{\sqrt5}\right)} f(x,y)\Big|_{x^2+4y^2-16} = 0 \qquad \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to\left(\frac{4}{\sqrt5},\frac{4}{\sqrt5}\right)} f(x,y)$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CONTINUITA' DI FUNZIONI $R^n \rightarrow R^m$

Parte settima

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

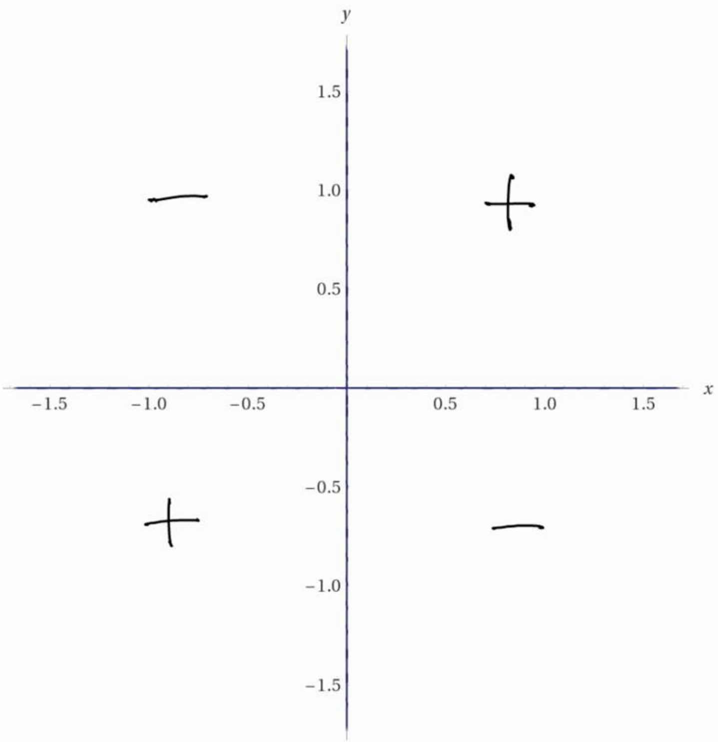
$$f(x,y) = \frac{y \ln(x^2)}{\ln(xy)} \sqrt{4x^2+9y^2-1}$$

(Dal testo della prova scritta dell' 11/1/2018 semplificato un po')

Dominio, segno, linea di livello zero di f e frontiera del dominio + alcuni limiti

Dominio di f: $E = \{(x,y) \mid x^2>0,\ xy>0,\ xy \neq 1,\ 4x^2+9y^2-1 \geq 0\} =$

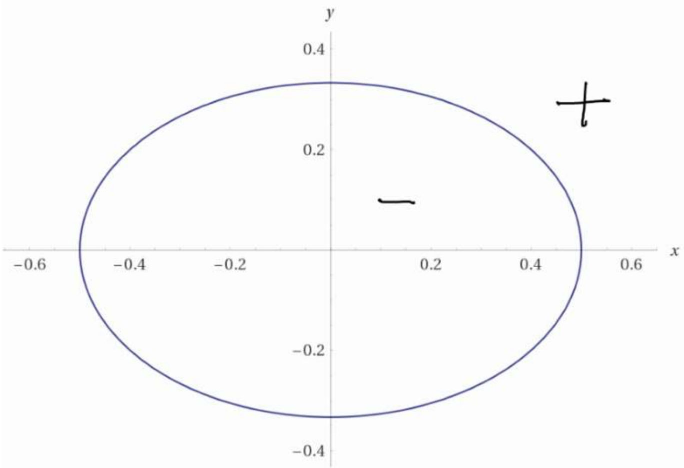
$= \{(x,y) \mid xy>0,\ xy \neq 1,\ 4x^2+9y^2-1 \geq 0\}$



$xy > 0 \iff x>0, y>0 \;\lor\; x<0, y<0$

$\Rightarrow$ lo studio del segno di $f_1(x,y) = xy$ è immediato. Inoltre

$f_1(x,y) = 0 \iff x = 0 \;\lor\; y = 0$



$f_2(x,y) = 4x^2+9y^2-1$ continua

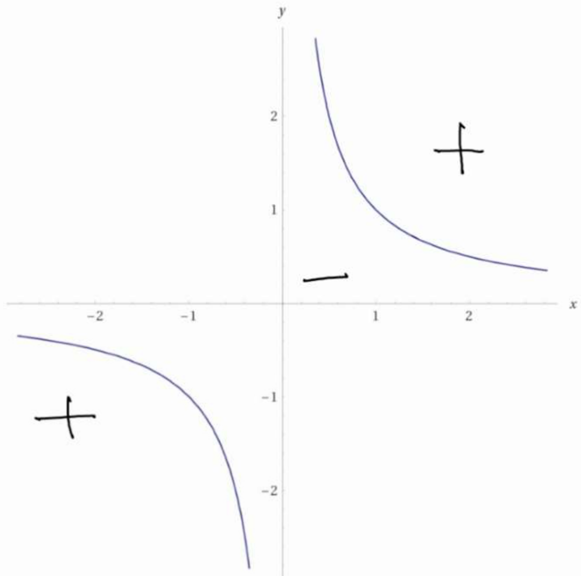
← l.l.0 : $4x^2+9y^2=1$ ellisse

$f_2(0,0) = -1 < 0$ $\quad f_2(1,0) = 3 > 0$

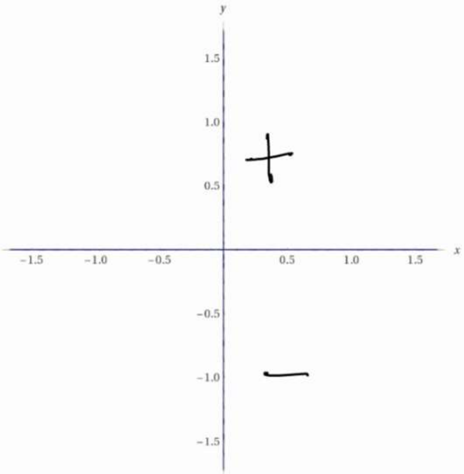
$f_3(x,y) = xy - 1$ continua

l.l.0 : $xy = 1$ iperbole

$f_3(0,0) = -1 < 0$, $f_3(2,1) = f_3(-2,-1) = 1 > 0$



NB: ci serve il segno di f_3 per studiare
il segno di f: $\ln(xy) > 0 \iff xy - 1 > 0$



Per studiare il segno di f ci serve ancora il segno di $f_4(x,y) = y$ e di $f_5(x,y) = \ln(x^2)$

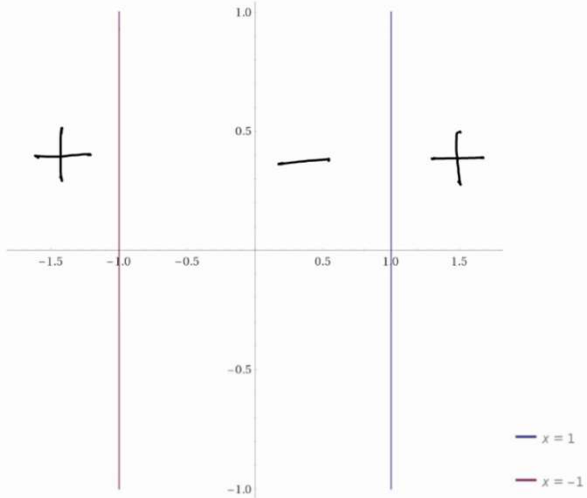
Il primo è immediato, come in figura a sinistra.

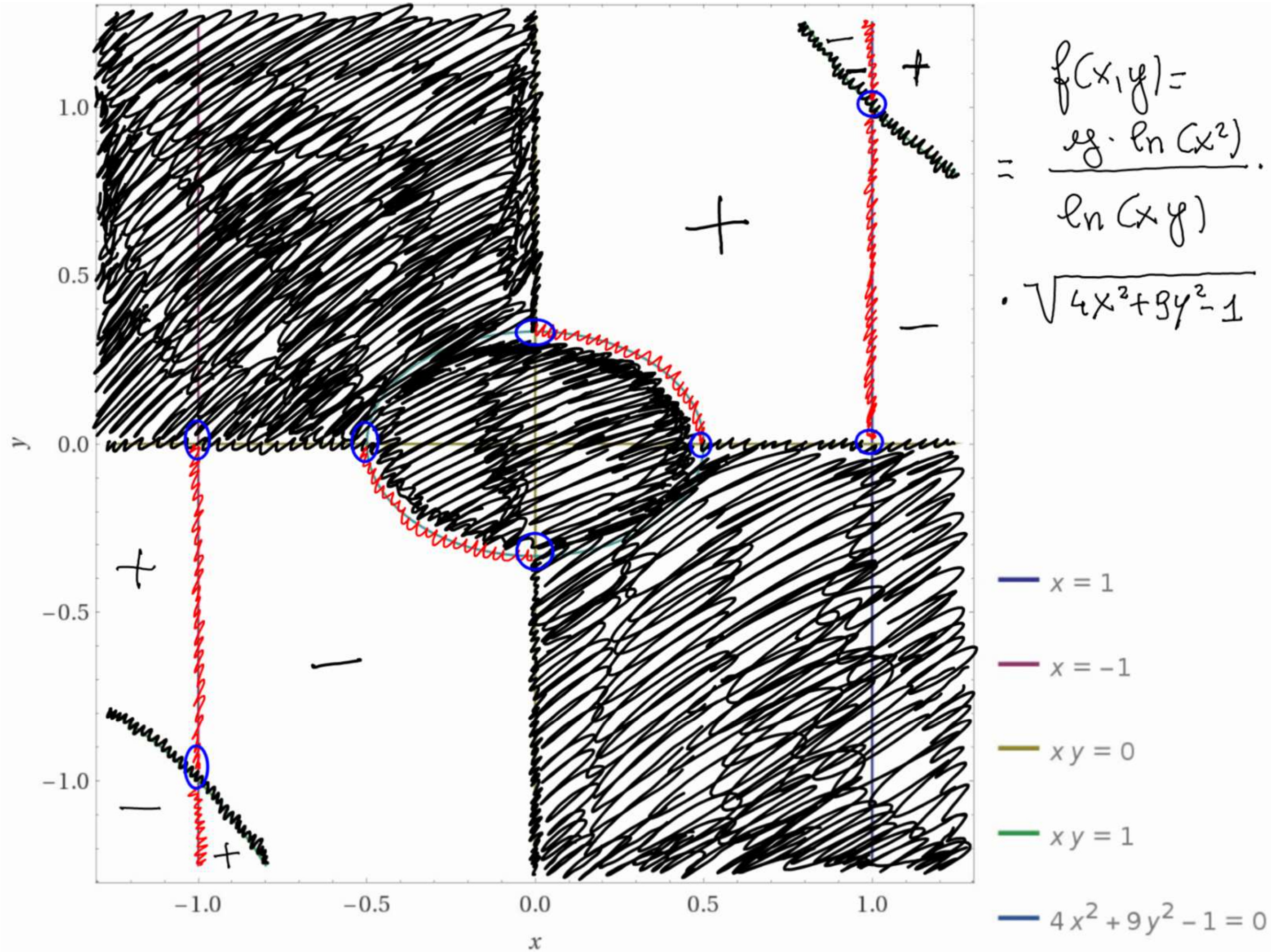
Per il secondo si ha

$\ln(x^2) > 0 \iff x^2 > 1 \iff$

$x > 1 \vee x < -1$, come in figura

a destra





$$f(x,y) = \frac{y \cdot \ln(x^2)}{\ln(xy)} \cdot \sqrt{4x^2+9y^2-1}$$

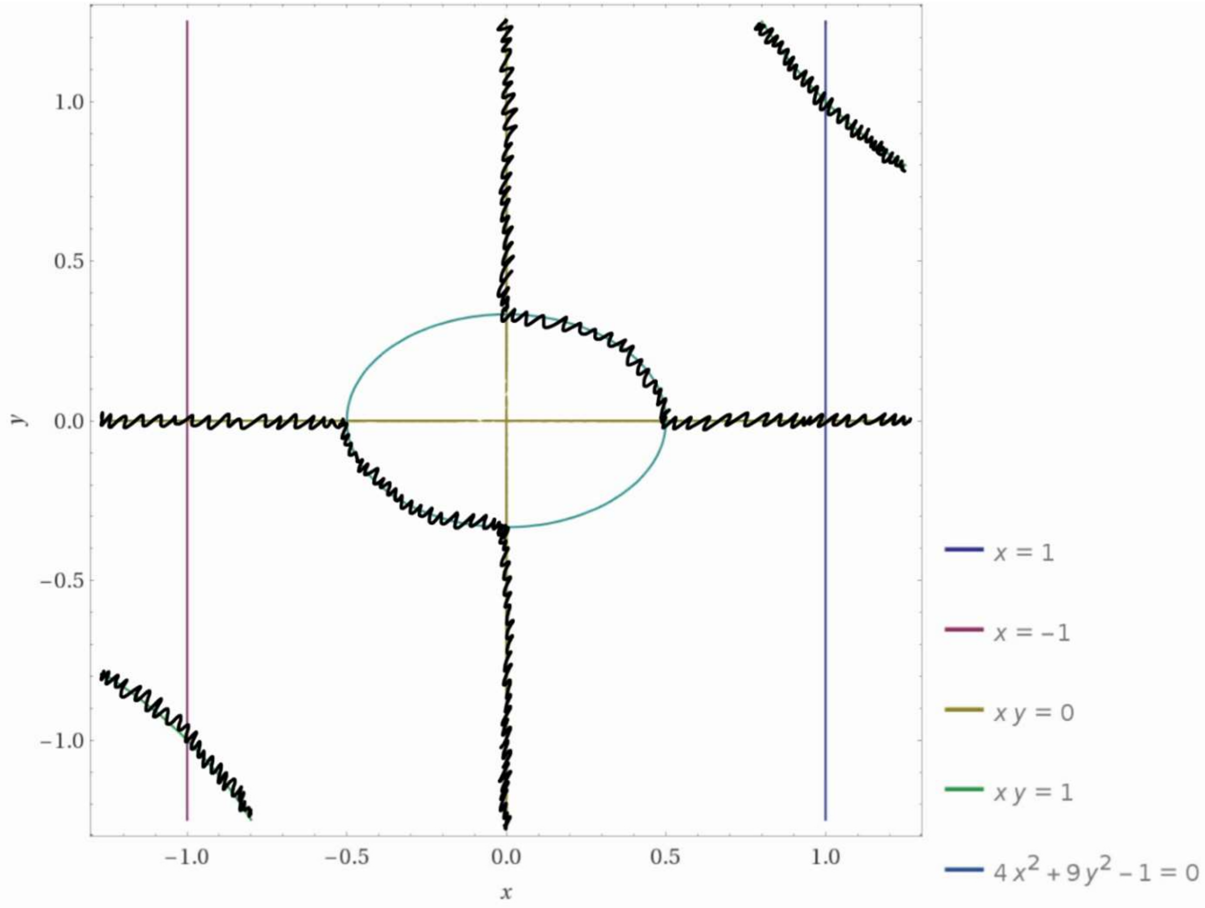
DOMINIO, SEGNO

LINEA DI LIVELLO ZERO

= NON APPARTIENE AL DOMINIO

= PUNTO CHE NON APPARTIENE AL DOMINIO (QUINDI NEANCHE ALLA LINEA DI LIVELLO ZERO)

LINEA DI LIVELLO ZERO



FRONTIERA DEL DOMINIO indicata con ~~~

Alcuni limiti per $f(x,y) = \dfrac{y \ln(x^2)}{\ln(xy)} \sqrt{4x^2+9y^2-1}$

a) $\lim_{(x,y)\to(\frac{1}{2},0)} f(x,y) = 0$: $\quad y \to 0 \quad \ln(x^2) \to \frac{1}{4}$

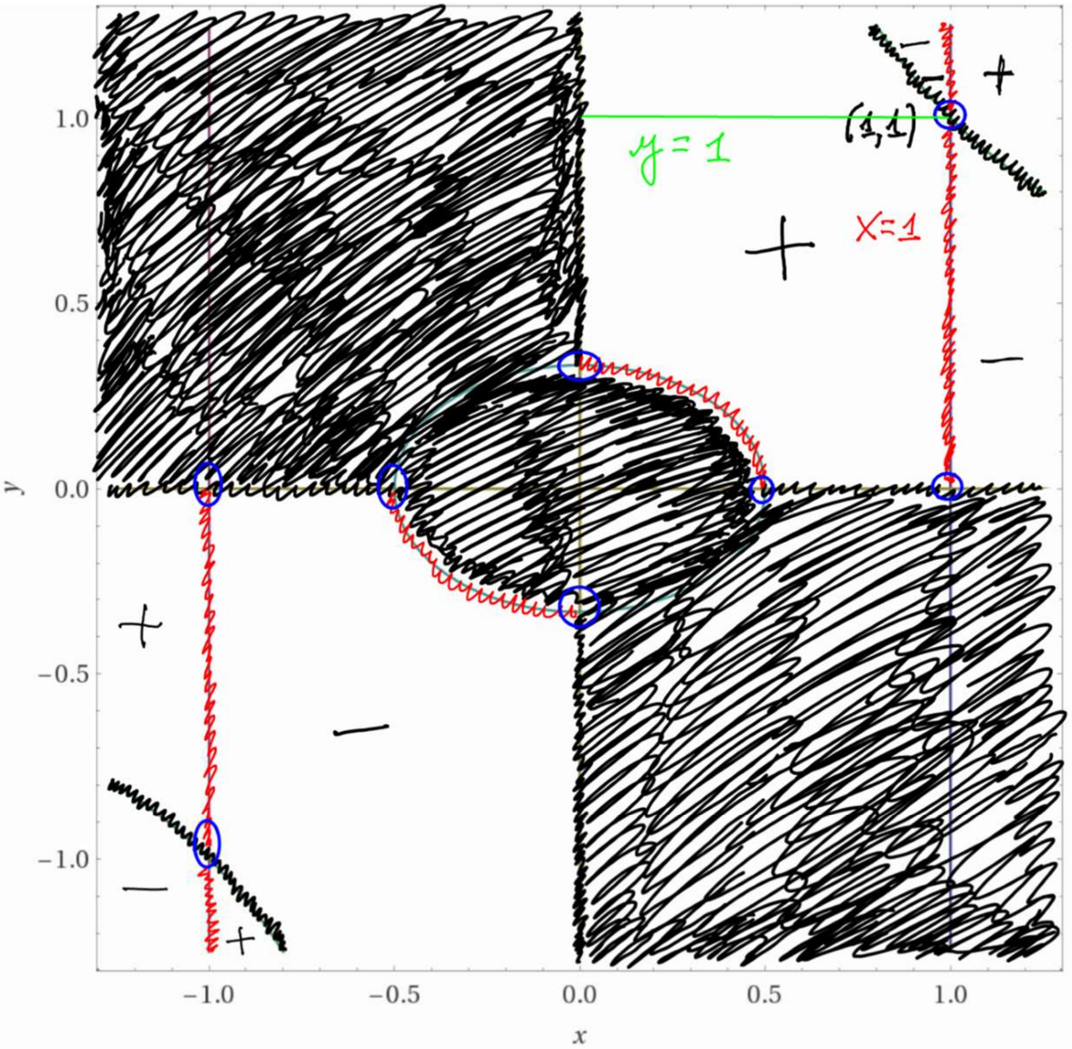
$\ln(x,y) \to -\infty \quad \sqrt{4x^2+9y^2-1} \to 0$

b) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$: $\quad y \to 1 \quad \ln(x^2) \to 0$

$\ln(xy) \to 0 \quad \sqrt{4x^2+9y^2-1} \to \sqrt{12}$

$\Rightarrow$ caso indeterminato

$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)\Big|_{x=1} = 0 \qquad \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)\Big|_{y=1} = ?$



$$f(x,y) = \frac{y \cdot \ln(x^2)}{\ln(x y)} \cdot \sqrt{4x^2+9y^2-1}$$

$$f(x,y)\Big|_{y=1} = \frac{\ln(x^2)}{\ln x}\sqrt{4x^2+8} \underset{\uparrow}{=} \frac{2\ln x}{\ln x}\sqrt{4x^2+8} = 2\sqrt{4x^2+8} \to 4\sqrt{3} \neq 0$$

per $x \to 1$

$\exists$ un intorno di $(1,1)$ con $x>0$

$$0 = \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)\Big|_{x=1}$$

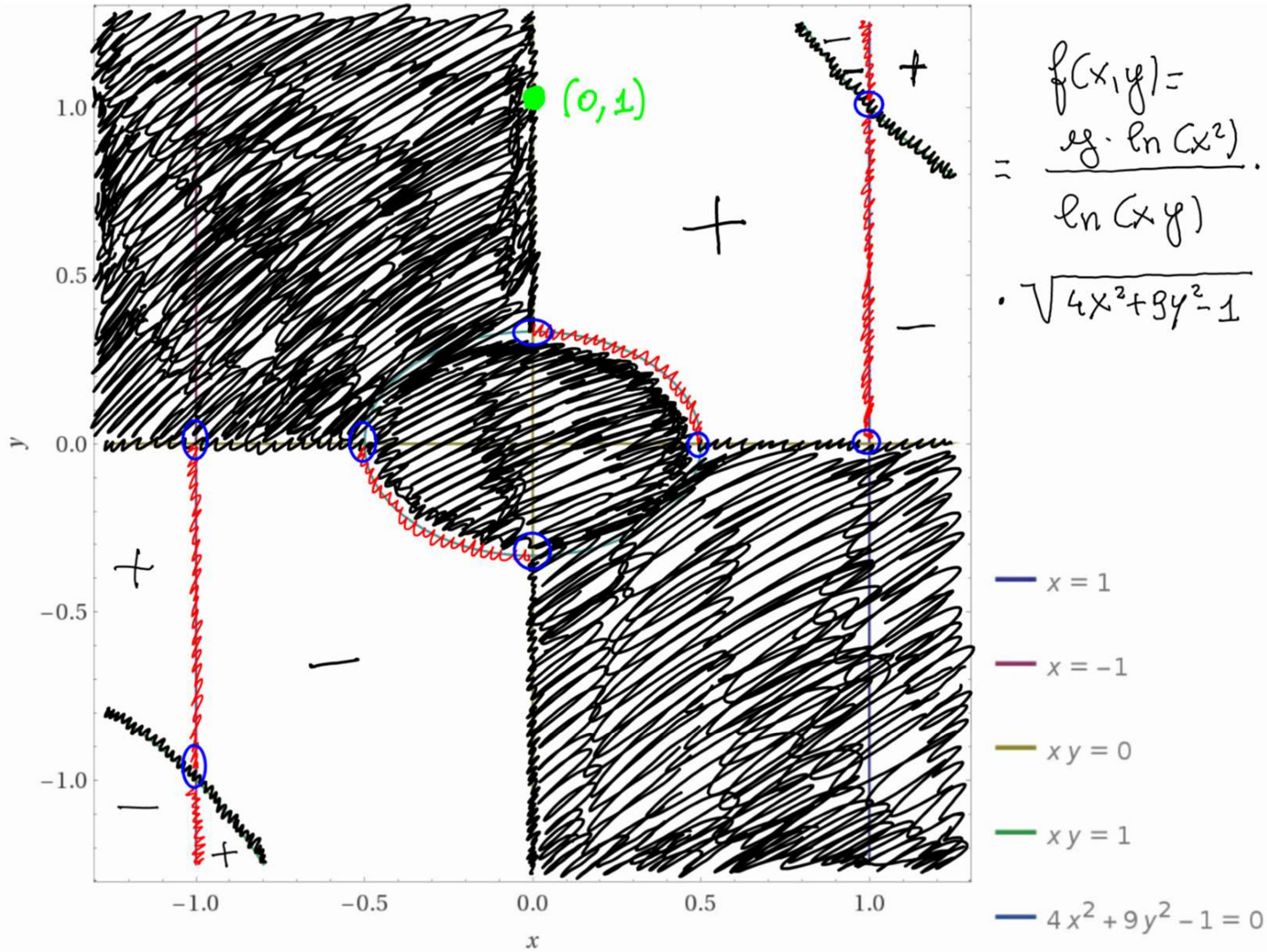
$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},1\right)} f(x,y) = f\left(\frac{1}{2},1\right) = \ldots = 6$ (per continuità)

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$: $y \to 0$ $\ln(x^2) \to 0$

$\ln x \to -\infty$ $\sqrt{4x^2+9y^2-1} \to \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0$$



$$f(x,y) = \frac{y \cdot \ln(x^2)}{\ln(xy)} \cdot \sqrt{4x^2+9y^2-1}$$

e) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$

$$\frac{\underbrace{y}_{\to 1}\ \underbrace{\ln(x^2)}_{\to -\infty}}{\underbrace{\ln(xy)}_{\to -\infty}\ \underbrace{\sqrt{4x^2+9y^2-1}}_{\to 2\sqrt{2}}}$$

FORMA
INDETERMINATA

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$: $y \to 1$ $\ln(x^2) \to -\infty$

$\ln(xy) \to -\infty$ $\sqrt{4x^2+9y^2-1} \to 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ caso indeterminato

Osserviamo che $\exists$ un intorno di $(0,1)$ con $x>0, y>0$ quindi possiamo scrivere in questo intorno

$$\frac{\ln(xy)}{\ln(x^2)} = \frac{\ln x + \ln y}{2\ln x} = \frac{1}{2} + \frac{\ln y}{\ln x}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\overset{\to 0}{\ln y}}{\underset{\to -\infty}{\ln x}} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\ln(xy)}{\ln(x^2)} \longrightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\ln(x^2)}{\ln(xy)} \longrightarrow 2$$

$y\sqrt{4x^2+9y^2-1} \longrightarrow 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 2\cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$$

<u>Corollario</u> (del Teorema degli zeri)

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, E connesso

Siano $x, y \in E$ tali che $f(x) < f(y)$

$\Rightarrow \forall\, u \in \,]f(x), f(y)[\quad \exists\, z \in E : \ f(z) = u$

<u>Dim:</u> Basta applicare il Teorema degli zeri alla funzione $g(x,y) = f(x,y) - u$, anch'essa continua e con il medesimo dominio E $\square$

Esercizi

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Dimostrare che f non è continua in $(0,0)$.

Dimostriamo che $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Restringiamo a $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$.

$$f_{|y=mx}(x,y) = \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2} \quad \forall\,(x,y)\neq(0,0)$$

$(0,0)$ punto di accumulazione per $F=\{(x,y) \mid y=mx\}$

$\Rightarrow$ poiché al variare di m si ottengo (almeno due) valori diversi, $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

NB: si poteva anche semplicemente restringere a $x=0$ e $y=0$

$$f_{|x=0}(x,y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1 \;\forall y\neq 0 \quad e \quad f_{|y=0}(x,y) = \frac{x^2}{x^2} = 1 \;\forall x\neq 0$$

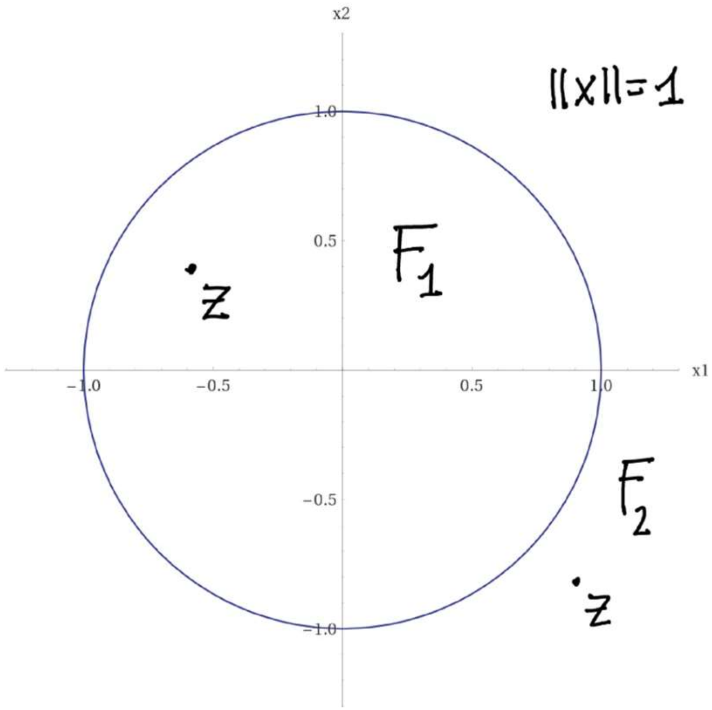
b) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} e^{\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right)} & \text{se } \|x\|<1 \\ 0 & \text{se } \|x\| \geq 1 \end{cases}$

con $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\|x\|$ norma di $x=(x_1,x_2)$

Dimostrare che f è continua in tutto $\mathbb{R}^2$.

Osserviamo innanzi tutto che f è continua $\forall x$ tale che $\|x\| \neq 1$.

Perché?? $\longrightarrow$ PERCHÉ SE $\|x\| \neq 1$ f È CONTINUA IN UN INTORNO DI x



$\|x\|=1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+x_2^2}=1 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2=1$

$\leftarrow$ CIRCONFERENZA DI CENTRO (0,0) E RAGGIO UNITARIO

Sia $F_1=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x\|<1\}$ e sia $z\in F_1$.

F_1 è aperto. Perché??

$g(x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ è continua

$\Rightarrow F_1 = g^{-1}(]-\infty,1[)$ è aperto ed intorno di z

$f|_{F_1}(x,y) = e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}$ è continua (applicando i "soliti" teoremi...)

in z $\Rightarrow$ poichè F_1 è un intorno di z, f è continua in z.

Analogamente per $z \in F_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1\} =$

$= g^{-1}(]1, +\infty[)$.

Dimostriamo ora che $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\bar{x}\| = 1$

Sia $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$: $\|\overline{x}\| = 1$ e sia $F_3 = \overline{F_2} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geq 1\}$

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(\overline{x}_1,\overline{x}_2)|F_3} f(x_1,x_2) = 0 \quad \text{perché } f|_{F_3} = 0.$$

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(\overline{x}_1,\overline{x}_2)} \|x\| = \lim_{(x_1,x_2)\to(\overline{x}_1,\overline{x}_2)} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2} = 1 \text{ per continuità}$$

$$\lim_{t\to 1} e^{\left(-\frac{1}{1-t^2}\right)} = 0 \Rightarrow \lim f_{|F_1}(x_1,x_2) = 0 \text{ per il teorema del limite}$$

della funzione composta.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\bar{x}} f_{|F_1}(x) = \lim_{x\to\bar{x}} f_{|F_3} = 0 \quad \text{con} \quad F_1 \cup F_3 = \mathbb{R}^2 \text{ dominio di } f$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\bar{x}} f(x) = 0 = f(\bar{x}) \Rightarrow f \text{ continua in } \bar{x}$$

Si conclude che f è continua su $\mathbb{R}^2$.