Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 1

$$f'(x) = 0$$

CALCOLO DIFFERENZIALE PER $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Derivate direzionali e derivate parziali

v versore

<u>Def:</u> $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ A aperto, $x \in A$, $v \in \mathbb{R}^n$ con $\|v\| = 1$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}: x + tv \in A$ $\quad \dfrac{f(x+tv) - f(x)}{t}$ è il RAPPORTO INCREMENTALE di f nella direzione v

Def.: Se esiste finito $\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$, questo si dice DERIVATA (DIREZIONALE) NELLA DIREZIONE V DI f IN x e si indica con $D_v f(x)$ o con $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$.

NB: Sia $\varphi(t) = f(x+tv)$ con x, v fissati

$u(t) = x + tv$ è continua in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow u^{-1}(A) = \{t \in \mathbb{R} \mid x+tv \in A\}$ è aperto in $\mathbb{R}$ (perché A aperto)

$0 \in u^{-1}(A)$ perché $u(0) = x \in A$

$\Rightarrow$ possiamo considerare

$$\varphi = f \circ u : \begin{tikzcd} u^{-1}(A) \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & A \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \varphi(t) = f(x+tv)$$

e si ha che $\exists\, D_v f(x) \iff \exists \lim_{h \to 0} \dfrac{\varphi(0+h)-\varphi(0)}{h} = \varphi'(0) = D_v f(x)$

La derivata direzionale si può interpretare come una derivata unidimensionale.

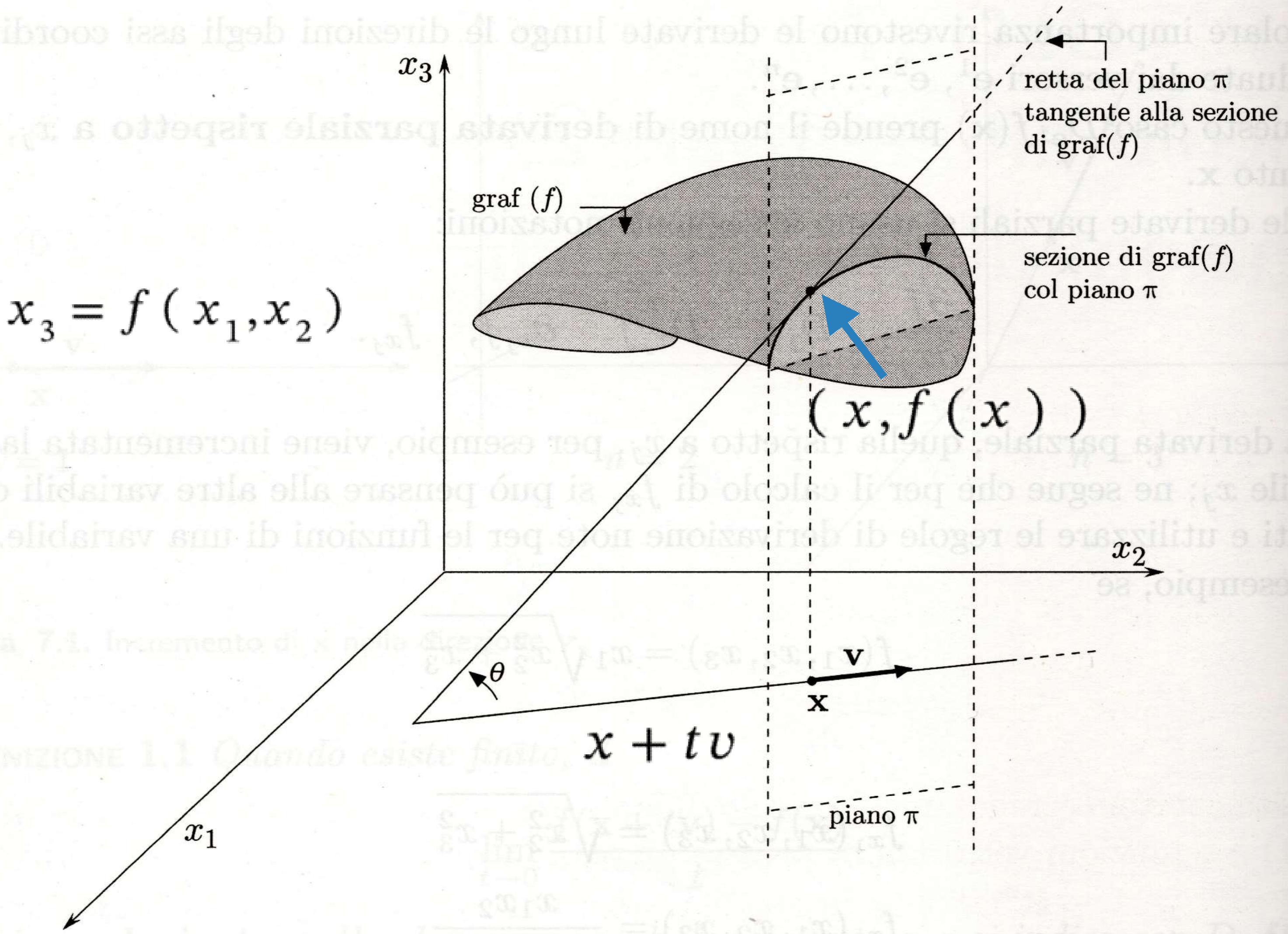


Figura 7.2. Significato geometrico di derivata direzionale: $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \operatorname{tg} \theta$.

Esempio

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

v versore in $\mathbb{R}^3$ $(\|v\| = 1)$ $\quad v = (v_1, v_2, v_3)$

$$\varphi(t) = \|x + tv\|^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_i + tv_i)^2$$

PRODOTTO SCALARE

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{3} 2(x_i + tv_i)\, v_i = 2\sum_{i=1}^{3} (x_i + tv_i)\, v_i = 2\langle x + tv, v \rangle$$

$$\Rightarrow D_v f(x) = \varphi'(0) = 2\langle x, v \rangle$$

La derivata direzionale dipende dalla direzione v.
Al variare di v può anche non esistere

Esempio

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Consideriamo come versori $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ e $x = (0,0)$

$$f(te_2) = f(0,t) = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0) = 0$$

$$f(te_1) = f(t,0) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0)$$

$\left(t \xrightarrow{\varphi} f(te_1) \right.$ non è nemmeno continua in $\left. 0 \right)$

Def: Se nella definizione di derivata direzionale si prende come versore $v = e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots 0, 0)$

POSIZIONE i-esima

la derivata direzionale è detta DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x_i DI f IN x e si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \qquad D_i f(x) \quad D_{x_i} f(x) \quad \partial_{x_i} f(x) \quad f_{x_i}(x)$$

UNO A SCELTA!

NB: in $\mathbb{R}$ $(n = 1)$ la derivata parziale coincide con la derivata.

NELLE DERIVATE PARZIALI VIENE INCREMENTATA UNA SOLA VARIABILE

$\Rightarrow$ SI POSSONO CONSIDERARE LE RIMANENTI VARIABILI COME COSTANTI E USARE LE USUALI REGOLE DI DERIVAZIONE PER FUNZIONI DI UNA VARIABILE PER IL CALCOLO

Esempio: $f(x,y,z) = z \cdot \ln(x+y) + 2x^2y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = z\,\frac{1}{x+y} + 4xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z\,\frac{1}{x+y} + 2x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \ln(x+y)$$

<u>Def.:</u> Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad x \in A$ tale che $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ $\forall i = 1, \dots, n$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \text{ è detto}$$

GRADIENTE DI f in x

NB: si indica talvolta con $\operatorname{grad} f(x)$

<u>Def.:</u> $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è DERIVABILE PARZIALMENTE IN x

$\Longleftrightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ $\forall i = 1, \dots, n$

$\Longleftrightarrow \exists \nabla f(x)$

Esempi

1) $f(x,y)=|x+y|$. Determinare l'insieme dei punti dove f è derivabile (parzialmente)

Se $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ e $x_0+y_0>0$, allora $\exists\, U_{(x_0,y_0)}$ intorno di (x_0,y_0) aperto tale che $x+y>0 \;\forall (x,y)\in U_{(x_0,y_0)}$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO PER FUNZ. CONTINUE

$\Rightarrow f(x,y)_{|U_{(x_0,y_0)}}=x+y$ derivabile in (x_0,y_0) per risultati relativi alla derivabilità di funzioni in una variabile.

$\Rightarrow f(x,y)$ derivabile in (x_0,y_0).

Analogamente, si ha derivabilità $\forall (x_0, y_0) : x_0 + y_0 < 0$.

Sia $(x_0, y_0) : x_0 + y_0 = 0$

$$\varphi_1(t) = f(x_0 + t, y_0) = |x_0 + t + y_0| = |t|$$

che non è derivabile in 0 $\Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

Analogamente, per

$\varphi_2(t) = f(x_0, y_0 + t) = |x_0 + y_0 + t| = |t|$ non derivabile in 0

$\Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ $\Rightarrow f$ è derivabile in $\{(x, y) \mid x + y \neq 0\}$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 2

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

2) $f(x,y) = |xy|$ Dove è derivabile f?

Se $x_0 y_0 < 0$ o $x_0 y_0 > 0 \Rightarrow$ come nell'esempio 1) si ha derivabilità.

Sia (x_0, y_0) : $x_0 y_0 = 0$, cioè con $x_0 = 0 \vee y_0 = 0$

Se $x_0 = y_0 = 0$ si ha

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(t) &= f(x_0+t, y_0) = f(t,0) = 0 \\ \varphi_2(t) &= f(x_0, y_0+t) = f(0,t) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Sia $(x_0, y_0): x_0 = 0,\ y_0 \neq 0$

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = f(x_0 + t, y_0) = f(t, y_0) = |t y_0|$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t y_0| - 0}{t} = \lim_{t \to 0} |y_0| \frac{|t|}{t} \begin{cases} |y_0| & \text{se } t \to 0^+ \\ -|y_0| & \text{se } t \to 0^- \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nexists\ \varphi_1'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$ ← POTREMMO FERMARCI QUI NELLO STUDIO DI (x_0, y_0) PERCHÈ SI CHIEDE LA DERIVABILITÀ

$$\varphi_2(t) = f(x_0, y_0 + t) = f(0, y_0 + t) = 0 \Rightarrow \exists\ \varphi_2'(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Viceversa se $(x_0, y_0): x_0 \neq 0,\ y_0 = 0$

$$\Rightarrow f \text{ derivabile in } \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x_0 y_0 = 0\} \cup \{(0,0)\}$$

NB: f derivabile parzialmente in x

$$\not\Rightarrow \quad f \text{ continua in } x$$

a meno che $n = 1$, cioè nel caso di funzioni in una variabile

Come si può generalizzare il concetto di derivata in $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ mantenendo la condizione necessaria di continuità?

Data $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f è derivabile in $x \in A$ aperto

$\iff \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \in \mathbb{R}$ (dove a è la derivata $f'(x)$)

$\iff \exists\, a \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ah}{h} = 0$

$\iff \exists\, a \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ah}{|h|} = 0$

DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE

IN $\mathbb{R}^n$ SI GENERALIZZA QUESTA

Def.: $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, è DIFFERENZIABILE IN $x \in A$

$\Leftrightarrow$ $\exists\, a \in \mathbb{R}^n$ tale che

$h \in \mathbb{R}^n$

$0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle a, h \rangle}{\|h\|} = 0 \qquad (*)$$

dove $\langle a, h \rangle$ è il prodotto scalare di a per h in $\mathbb{R}^n$
e $\|h\|$ è la norma di h in $\mathbb{R}^n$.

La $(*)$ si scrive anche, $\forall\, h \in \mathbb{R}^n : x+h \in A$

O PICCOLO DI $\|h\|$

$$f(x+h) - f(x) - \langle a, h \rangle = o(\|h\|), \text{ cioè } \lim_{h \to 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0$$

BEN DEFINITO PERCHÈ $x \in A$ APERTO

Si trova anche scritto, $\forall h \in \mathbb{R}^n : x+h \in A$

$$f(x+h) - f(x) - \langle a, h \rangle = \|h\| \omega(h) \quad \text{con} \quad \lim_{h \to 0} \omega(h) = 0$$

(basta porre $\omega(h) = \frac{o(\|h\|)}{\|h\|}$)

$h \longrightarrow \langle a, h \rangle$ è una funzione LINEARE $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$df(x) : h \longrightarrow \langle a, h \rangle$ è il DIFFERENZIALE DI f IN x

È UNA FUNZIONE LINEARE

Def.: $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è DIFFERENZIABILE (IN A) $\iff$
f è differenziabile $\forall x \in A$

Se $n = 1$ cos'è il differenziale?

$$df(x) : h \in \mathbb{R} \longrightarrow \langle a, h \rangle = a h \in \mathbb{R} \text{ con } a = f'(x)$$

$$\Rightarrow df(x) : h \longrightarrow f'(x) \cdot h$$

IN $\mathbb{R}$ f DIFFERENZIABILE $\iff$ f DERIVABILE

Esempi

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^2+y^2$

Dimostrare con la definizione che in $(\overline{x},\overline{y})$ il differenziale è

$$df(\overline{x},\overline{y}) : (h,k) \longrightarrow 2(\overline{x}h+\overline{y}k) = 2\langle(\overline{x},\overline{y}),(h,k)\rangle$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(\overline{x}+h)^2+(\overline{y}+k)^2-\overline{x}^2-\overline{y}^2-2\overline{x}h-2\overline{y}k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\cancel{\overline{x}^2}+\cancel{2\overline{x}h}+h^2+\cancel{\overline{y}^2}+\cancel{2\overline{y}k}+k^2\cancel{-\overline{x}^2}\cancel{-\overline{y}^2}\cancel{-2\overline{x}h}\cancel{-2\overline{y}k}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0$$

$\Rightarrow df(\overline{x},\overline{y})(h,k) = 2(\overline{x}\,h+\overline{y}\,k)$ è il differenziale di f.

2) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = |xy|$

Dimostrare con la definizione che il differenziale di f in $(0,0)$ è $df(0,0)(h,k) = 0$.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk| - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Si ha $|h|^2 = h^2 \le h^2 + k^2 \Rightarrow |h| \le \sqrt{h^2+k^2}$

$$0 \le \frac{|h\,k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{\sqrt{h^2+k^2}\,|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = |k| \longrightarrow 0 \quad \text{per } (h,k) \to (0,0)$$

$\Rightarrow \lim \dfrac{|h\,k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \Rightarrow df(0,0) : h \longrightarrow 0$ è il differenziale di f

CONFRONTO

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 3

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0$$

Teorema

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in $x \in A$

$\Rightarrow$ 1) f è continua in x

2) $\exists\, D_v f(x)$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$: $\|v\| = 1$ e si ha

$$D_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

REGOLA DEL GRADIENTE

Inoltre a nell'espressione del differenziale è $\nabla f(x)$

Dim: 1) f differenziabile in $x \Leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x+h)-f(x) = \langle a, h \rangle + o(\|h\|)$$

$$\lim_{h \to 0} \langle a, h \rangle = 0 \quad (\text{funzione lineare} \Rightarrow \text{continua})$$

$$\lim_{h \to 0} o(\|h\|) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{o(\|h\|)}{\|h\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|h\|}_{\to 0} = 0$$

PER LA DEFINIZIONE DI DIFFERENZIALE

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

$$\Rightarrow f \text{ continua in } x$$

2) f differenziabile in $x \iff \exists\, a \in \mathbb{R}^n : f(x+h) - f(x) = \langle a, h \rangle + o(\|h\|)$
$\forall\, h$ tale che $x+h \in A$

Sia $h = te_i$. Posto $u(t) = x + te_i$, u è continua e
$u^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}$ perché A è aperto
$t \to f(x+te_i)$ è definita in $u^{-1}(A)$ e $0 \in u^{-1}(A)$

$$\Rightarrow f(x+te_i) - f(x) = \langle a, te_i \rangle + o(\|te_i\|)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t} = \frac{\cancel{t}\langle a, e_i \rangle}{\cancel{t}} + \frac{o(\|te_i\|)}{t}$$

$$= \frac{|t|\,\|e_i\|}{t} = \frac{|t|}{t}$$
LIMITATA

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t} = \underbrace{\langle a, e_i \rangle}_{\text{COSTANTE}} + \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{o(\|te_i\|)}{\|te_i\|}}_{\to 0} \frac{\|te_i\|}{t} = \langle a, e_i \rangle$$

$\to 0$

TEOR. LIMITE FUNZ. COMPOSTA

$$\Rightarrow \exists \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = D_{e_i} f(x) = \langle a, e_i \rangle = a_i \quad (a = (a_1, \dots, a_n))$$

CIOÈ ESISTONO LE DERIVATE PARZIALI E $\nabla f(x) = a$

Sia ora $v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1$ e poniamo $h = tv$ nella def. di differenziale.

$$\Rightarrow f(x+tv) - f(x) = \langle a, tv \rangle + o(\|tv\|)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{f(x+tv) - f(x)}{t}}_{\to D_v f(x) \text{ per } t \to 0} = \frac{\langle a, tv \rangle}{t} + \frac{o(\|tv\|)}{t} = \underbrace{\frac{\cancel{t} \langle a, v \rangle}{\cancel{t}}}_{\text{COSTANTE}} + \underbrace{\frac{o(\|tv\|)}{\|tv\|}}_{\to 0 \text{ per } t \to 0} \underbrace{\frac{|t|}{t}}_{\text{LIMITATA}}$$

$$\Rightarrow D_v f(x) = \langle a, v \rangle = \langle \nabla f(x), v \rangle \qquad \square$$

Corollario

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in $x \in A$

$\Rightarrow df(x)(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle$ e, se $\|h\| = 1$, si ha

$$df(x)(h) = D_h f(x)$$

Dim: Si ha $df(x)(h) = \langle a, h \rangle = \langle \nabla f(x), h \rangle$ poiché $a = \nabla f(x)$

Se $\|h\| = 1$, dalla formula del gradiente

$$D_h f(x) = \langle \nabla f(x), h \rangle = df(x)(h) \qquad \square$$

Direzioni di massima e minima crescita

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, differenziabile, $\|v\| = 1$

$$D_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle = \|\nabla f(x)\| \, \|v\| \cos\beta = \|\nabla f(x)\| \cos\beta$$

con β angolo formato dai vettori v e $\nabla f(x)$.

$\Rightarrow$ $D_v f(x)$ è massima quando $\beta = 0$ ($\cos\beta = 1$) e quindi

$$v_{max} = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$$

$\longleftarrow$ FORMA UN ANGOLO $\beta = 0$ CON $\nabla f(x)$

DIREZIONE DI MASSIMA CRESCITA

$D_v f(x)$ è minima per $\beta = \pi$ $(\cos\beta = -1)$

$$\Rightarrow \quad v_{min} = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$$ ⇐ FORMA UN ANGOLO $\beta = \pi$ CON $\nabla f(x)$

DIREZIONE DI MINIMA CRESCITA

$$\Rightarrow \quad \max_{\|v\|=1} D_v f(x) = \|\nabla f(x)\| \quad \text{e} \quad \min_{\|v\|=1} D_v f(x) = -\|\nabla f(x)\|$$

NB: L'esistenza delle derivate direzionali NON garantisce la differenziabilità!

Esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcoliamo le derivate direzionali in $(0,0)$.

Sia v versore in $\mathbb{R}^2$: $v=(v_1, v_2)$, $\|v\|=1$

$$\Rightarrow \varphi(t) = f(0+tv_1, 0+tv_2) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{t^5 v_1^5}{(tv_2 - t^2 v_1^2)^2 + t^8 v_1^8} & \text{se } (tv_1, tv_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (tv_1, tv_2) = (0,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3 v_1^5}{v_2^2 + t^2 v_1^4 - 2t v_1^2 v_2 + t^6 v_1^8} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 v_1^5}{t(v_2^2 + t^2 v_1^4 - 2t v_1^2 v_2 + t^6 v_1^8)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 v_1^5}{v_2^2 + t^2 v_1^4 - 2t v_1^2 v_2 + t^6 v_1^8} = 0 = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$$

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| = 1$$

f tuttavia non è continua in $(0,0)$.

$$f\big|_{y=x^2}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^8} = \dfrac{1}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f\big|_{y=x^2}(x,y) = \infty \Rightarrow f \text{ non continua in } (0,0)$$

$$\Rightarrow f \text{ non differenziabile in } (0,0)$$

$\Rightarrow f$ ha tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ ma non è differenziabile in $(0,0)$.

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 4

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, y, z, u) = 0$$

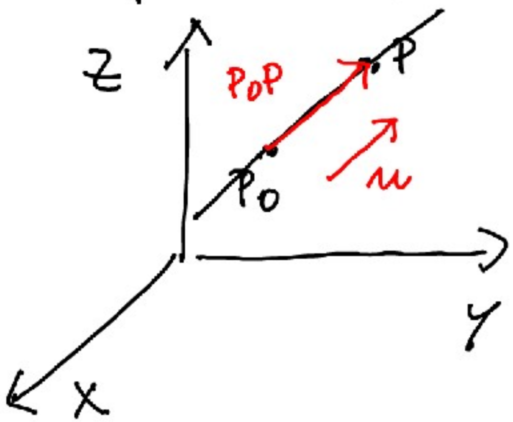
Riassumendo, si ha

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
f \text{ differenziabile in } \bar{x} \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[d, Rightarrow, shift right] & f \text{ continua in } \bar{x} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "/" marking] \arrow[dl, Rightarrow, shift left, "/" marking] \\
\exists \text{ tutte le derivate direzionali in } \bar{x} \arrow[u, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[ur, Rightarrow, shift left, "/" marking] &
\end{tikzcd}
$$

Rette e piani nello spazio

Dati $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $u = (u_1, u_2, u_3)$ in $\mathbb{R}^3$

Retta per P_0 parallela a u: $\{P \in \mathbb{R}^3 : P_0P = \lambda u \text{ per } \lambda \in \mathbb{R}\}$



VETTORE P_0P CORRISPONDENTE AL SEGMENTO $\overline{P_0P}$

Posto $P = (x, y, z)$ si ha

$$P_0P = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$PP_0 = \lambda u \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = \lambda u_1 \\ y - y_0 = \lambda u_2 \\ z - z_0 = \lambda u_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases}}$$

$PP_0 \parallel u$

EQUAZIONE PARAMETRICA DI UNA RETTA PER P_0 PARALLELA AL VETTORE u

Esempio

$P_0 = (1, 2, 1) \quad u = (2, 1, -5)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

equazione retta per P_0 parallela a u

Quale sarà l'equazione della retta per due punti?

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$P_1P_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ vettore P_1P_2

$$\left.\begin{array}{l}\text{Parallelismo a } P_1P_2 \\ \text{Passaggio per } P_1 \text{ (o } P_2\text{)}\end{array}\right\} \longrightarrow \text{retta per } P_1 \text{ e } P_2$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = (1-t)x_1 + t\,x_2 \\ y = (1-t)y_1 + t\,y_2 \\ z = (1-t)z_1 + t\,z_2 \end{cases}}$$

Ad esempio: $P_1 = (1,0,2)$, $P_2 = (3,-1,1)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - t \end{cases}$$ Retta per $P_1 P_2$

Come si rappresentano invece i piani?

Con equazioni della forma

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)}$$

CIOÈ ALMENO UN COEFFICIENTE TRA a, b, c NON NULLO

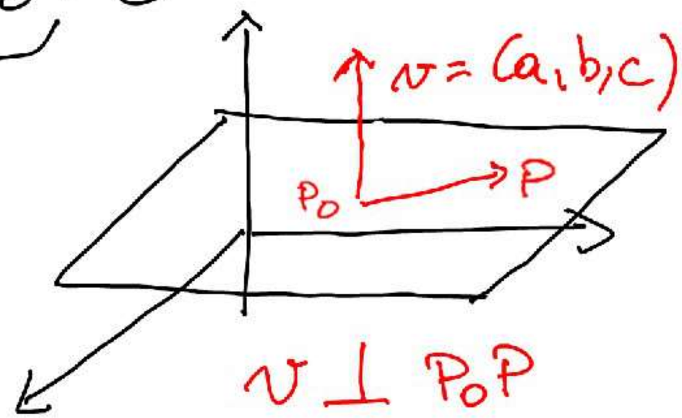
Perché?

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$, $v = (a, b, c)$

$P_0P = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ vettore P_0P

$P_0P \perp v \Leftrightarrow \langle P_0P, v \rangle = 0 \Leftrightarrow (x-x_0)a + (y-y_0)b + (z-z_0)c = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz \underbrace{- ax_0 - by_0 - cz_0}_{d} = 0$



NB: $v = (a, b, c)$ è $\perp$ al piano

Esempio: Determinare l'equazione del piano passante per $P_0 = (0,1,1)$ e $\perp$ a $v = (3,1,2)$

$$\Rightarrow 3(x-0) + 1(y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$\Rightarrow 3x + y + 2z - 3 = 0$$

NB: Due piani sono paralleli se hanno la stessa direzione ortogonale.

$3x+2y-z+1=0$ e $6x+4y-2z+5=0$ sono paralleli perchè $(3,2,-1)$ è proporzionale, dunque parallelo, a $(6,4,-2)$.

Consideriamo una retta, ad esempio

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -5t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - x \\ y = -5t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -5(1-x) \\ z = 3 + 2(1-x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - 5x + 5 = 0 \\ z + 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

RETTA COME INTERSEZIONE DI DUE PIANI

Viceversa

$$\begin{cases} y-5x+5=0 \\ z+2x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=5t-5 \\ z=-2t+5 \end{cases} \text{ equivalente a } \begin{cases} x=1-t \\ y=-5t \\ z=3+2t \end{cases}$$

BASTA PORRE $1-t$ AL POSTO DI t NEL SISTEMA A SINISTRA

$\Rightarrow$ DUE FORME DI RAPPRESENTAZIONE DELLE RETTE NELLO SPAZIO: PARAMETRICA E COME INTERSEZIONE DI DUE PIANI

Piano tangente

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $\overline{x} \in A$.

$$\Rightarrow f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h \rangle + o(\|h\|)$$

Ponendo $h = x - \overline{x}$ si ottiene in maniera equivalente

$$f(x) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), x-\overline{x} \rangle + o(\|x-\overline{x}\|)$$ con

$$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{o(\|x-\overline{x}\|)}{\|x-\overline{x}\|} = 0$$

$$x \longrightarrow f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), x-\overline{x} \rangle$$

è una funzione che ha come grafico un iperpiano in $\mathbb{R}^{n+1}$

L'equazione dell'iperpiano è

$$z = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle$$

Poiché

$$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x) - f(\overline{x}) - \langle \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle}{\| x - \overline{x} \|} = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{o(\| x - \overline{x} \|)}{\| x - \overline{x} \|} = 0$$

tale funzione è la funzione affine che meglio approssima f in un intorno di $\overline{x}$

$$\boxed{z = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle \quad \text{(IPER)PIANO TANGENTE}}$$

In $\mathbb{R}^2$ si ha l'equazione del piano tangente in (x_0, y_0):

$$z = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0} + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

$$\Rightarrow z - z_0 - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

$$\Rightarrow \left\langle \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \right\rangle = 0$$

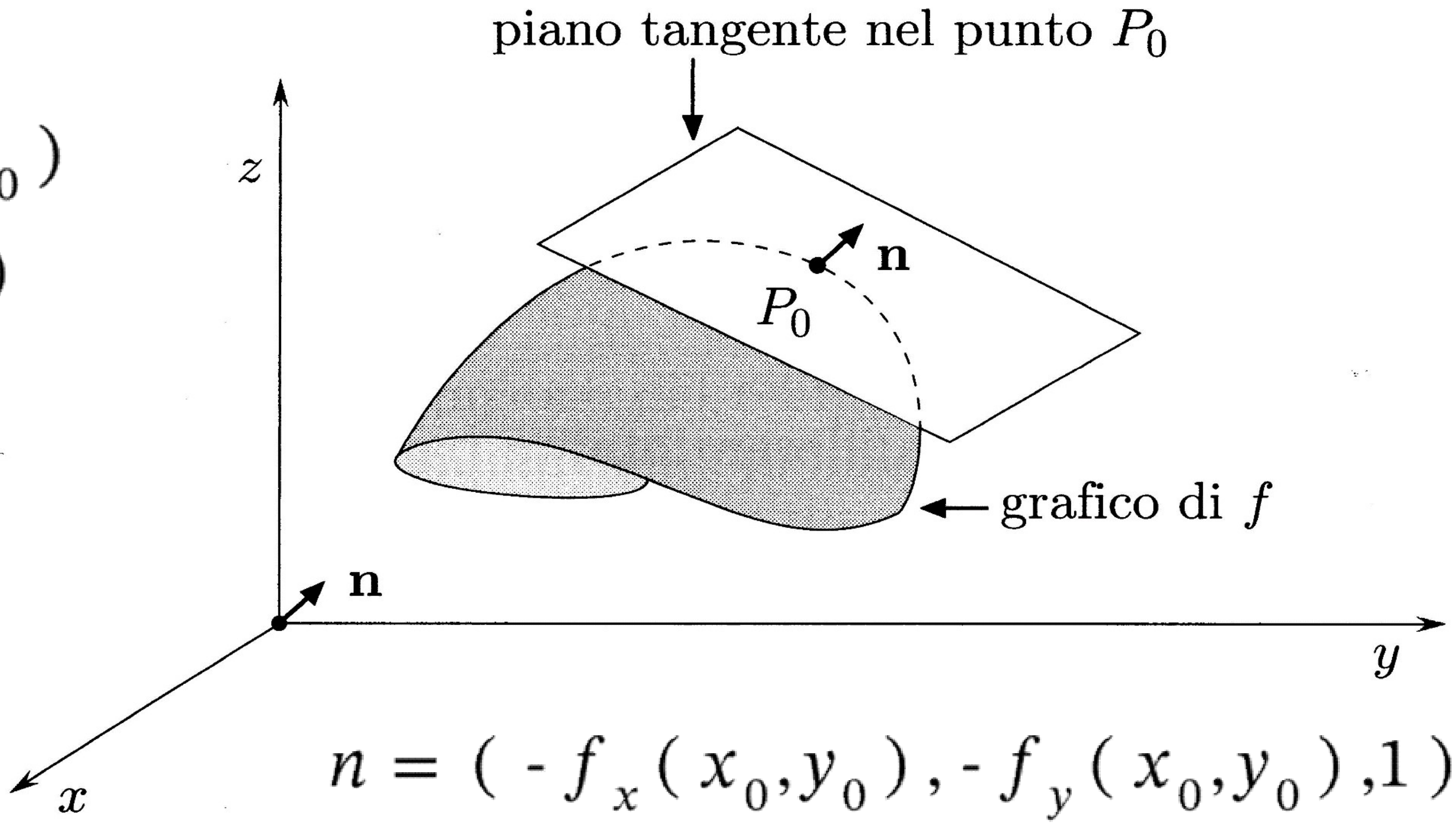
$\Rightarrow \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right) \in \mathbb{R}^3$ è perpendicolare al piano tangente in (x_0, y_0, z_0) (con $z_0 = f(x_0, y_0)$) cioè (per definizione) al grafico di f in (x_0, y_0, z_0)

$$(1.9) \qquad z - z_0 - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

$$P = (x, y, z)$$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$



$$n = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$$

Figura 7.4. Piano tangente a una superficie.

Esercizi

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Studiare le derivate direzionali in $(0,0)$

f è differenziabile in $(0,0)$? È continua in $(0,0)$?

Sia $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : \|v\| = 1$

$$\varphi(t) = f(0+tv) = f(tv) = \begin{cases} \dfrac{t^2 v_1 v_2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} & \text{se } (tv_1, tv_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (tv_1, tv_2) = (0,0) \end{cases}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} v_1 v_2 & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{v_1 v_2}{t} \begin{cases} = 0 & \text{se } v_1 \cdot v_2 = 0 \\ = \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \exists$ le derivate direzionali in $(0,0)$ solo per v tale che $\|v\| = 1$ e $v_1 = 0$ o $v_2 = 0$ $\Rightarrow$ solo per $v = e_1$ o $v = e_2$

$\Rightarrow \exists$ solamente $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$ (e valgono ~~zero~~).

$\Rightarrow f$ non è differenziabile in $(0,0)$

$$f\big|_{y=\lambda x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda x^2}{(1+\lambda^2)x^2} = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f\big|_{y=\lambda x}(x,y) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

che varia al variare di $\lambda \Rightarrow f$ non è continua in $(0,0)$.

2) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = x^3 - y^3$ in $(0,1,-1)$

$$f(0,1) = -1$$

$$\nabla f(0,1) = (3x^2, -3y^2)\big|_{(0,1)} = (0,-3)$$

$$\Rightarrow z = -1 + 0\,(x-0) - 3\,(y-1)$$

$$\Rightarrow z = -1 - 3y + 3 \quad \Rightarrow \quad 3y + z - 2 = 0$$

3) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ in $(2,0,2)$

$f(2,0)=2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,0)=1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)=0$

$\Rightarrow z = 2 + 1\,(x-2)+0\,(y-0)$

$\Rightarrow x - z = 0$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 5

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y, z, u, v) = 0$$

Teorema (del differenziale totale)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $\bar{x} \in A$

Se $\exists\, U_{\bar{x}}$ intorno di $\bar{x}$ tale che

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ $i=1,\dots,n$ $\forall x \in U_{\bar{x}}$ e queste sono funzioni continue in $\bar{x}$

allora f è differenziabile in $\bar{x}$

IL TEOREMA FORNISCE UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA DIFFERENZIABILITÀ IN UN ELEMENTO X DEL DOMINIO

Def.: $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, è DIFFERENZIABILE IN $x \in A$

$\iff \exists\, a \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle a, h \rangle}{\| h \|} = 0 \qquad (*)$$

$h \in \mathbb{R}^n$

$0 \in \mathbb{R}$

dove $\langle a, h \rangle$ è il prodotto scalare di a per h in $\mathbb{R}^n$ e $\|h\|$ è la norma di h in $\mathbb{R}^n$.

La $(*)$ si scrive anche, $\forall\, h \in \mathbb{R}^n : x+h \in A$

O PICCOLO DI $\|h\|$

$$f(x+h) - f(x) - \langle a, h \rangle = o(\|h\|), \text{ cioè } \lim_{h \to 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0$$

BEN DEFINITO PERCHÈ $x \in A$ APERTO

Corollario

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in $x \in A$

$\Rightarrow df(x)(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle$ e, se $\|h\| = 1$, si ha

$$df(x)(h) = D_h f(x)$$

Dim: Si ha $df(x)(h) = \langle a, h \rangle = \langle \nabla f(x), h \rangle$ poiché $a = \nabla f(x)$

Se $\|h\| = 1$, dalla formula del gradiente

$$D_h f(x) = \langle \nabla f(x), h \rangle = df(x)(h) \qquad \square$$

Dim (caso $n=2$, il caso generale è analogo):

a) Posto $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ e preso $h=(h_1, h_2)$ tale che $\overline{x}+h \in U_{\overline{x}}$, si ha

$$f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}) = f(\overline{x}_1+h_1, \overline{x}_2+h_2) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) =$$

$$= \boxed{f(\overline{x}_1+h_1, \overline{x}_2+h_2) - f(\overline{x}_1+h_1, \overline{x}_2)} + \boxed{f(\overline{x}_1+h_1, \overline{x}_2) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)} \quad (*)$$

b) Applichiamo il teorema del valore medio per funzioni in una variabile a

$$\varphi_1(x_1) = f(x_1, \overline{x}_2) \quad \text{tra } \overline{x}_1 \text{ e } \overline{x}_1+h_1$$

Storia [modifica | modifica wikitesto]

Un caso speciale di questo teorema fu inizialmente descritto da Parameshvara (1370–1460), dalla Scuola del Kerala in India, nei suoi commenti su Govindasvāmi e Bhāskara II.[1] Una forma ristretta del teorema fu poi provata da Rolle nel 1691; il suo risultato fu quello che ora è conosciuto come teorema di Rolle, e fu provato solo per polinomi, senza nessuna tecnica di analisi. Il teorema del valor medio nella sua forma moderna fu formulato e dimostrato da Cauchy nel 1823.[2]

Enunciato [modifica | modifica wikitesto]

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a, b). Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b) : f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.[3]

Significato geometrico [modifica | modifica wikitesto]

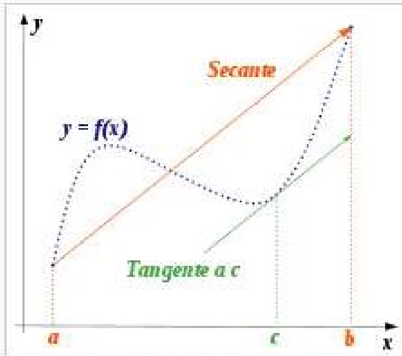


Immagine che spiega il significato geometrico del teorema di Lagrange

Supponiamo di avere una funzione f di variabile reale a valori reali definita nell'intervallo $[a, b]$, come nell'immagine. Supponiamo che essa sia continua e che in ogni punto del suo grafico - esclusi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ - sia ben definita la retta tangente, quest'ultima non parallela all'asse delle ordinate (supponiamo cioè che la funzione f sia derivabile in $]a, b[$). Tracciamo la retta secante il grafico, passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Il teorema di Lagrange afferma che sotto le ipotesi di regolarità sopra enunciate esiste almeno un punto $c \in]a, b[$, come nell'esempio, tale che la tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$ abbia la stessa pendenza della retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Osservazioni [modifica | modifica wikitesto]

- Il teorema di Lagrange può anche essere considerato un caso particolare del teorema di Cauchy.

Sia g la funzione identità ($g(x) = x \quad \forall x$). Applichiamo il teorema di Cauchy a $f(x)$ e $g(x)$:

$$\exists c \in (a, b) \colon \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

<u>Dim</u> (caso $n=2$, il caso generale è analogo):

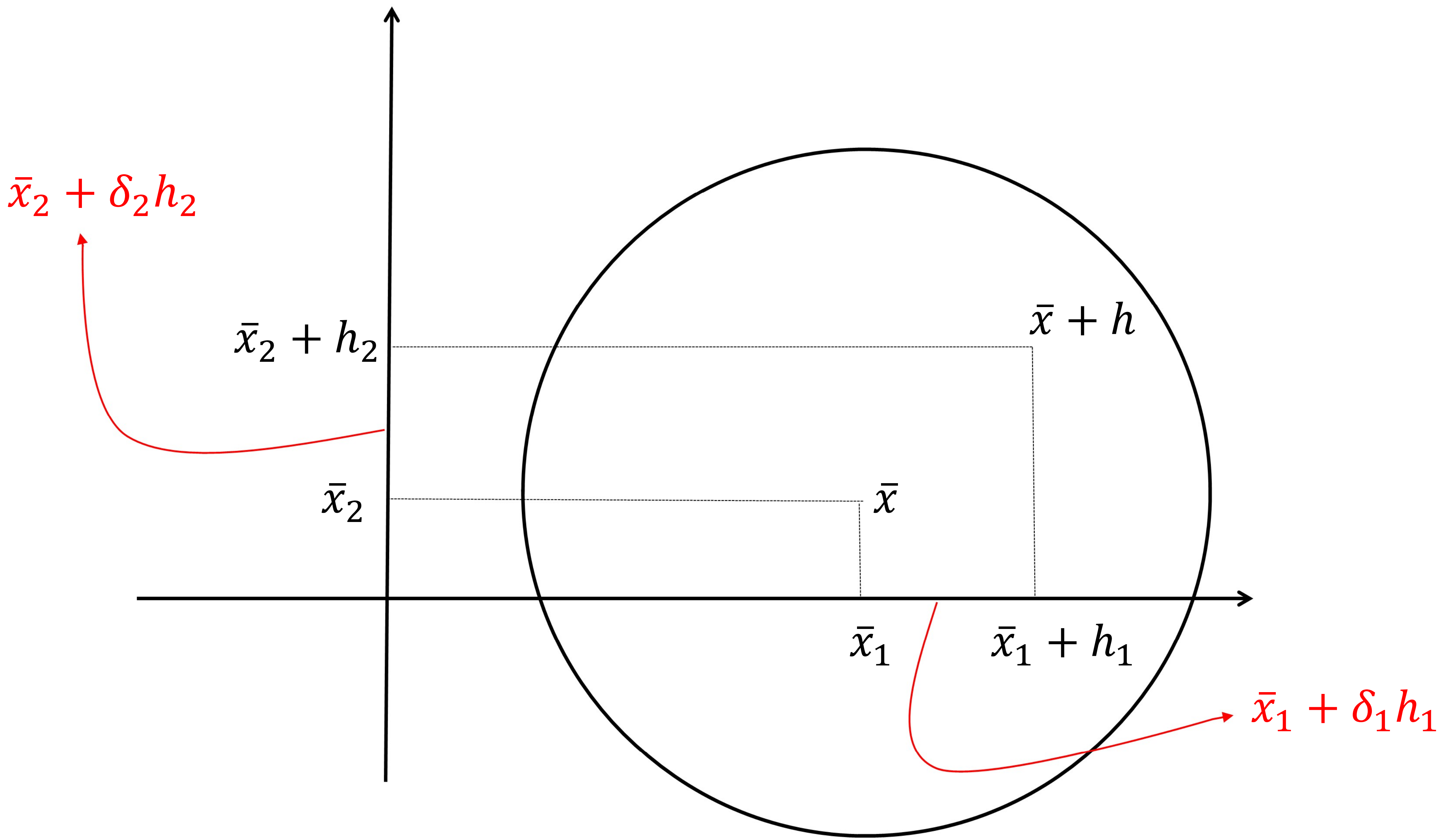
a) Posto $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ e preso $h=(h_1,h_2)$ tale che $\overline{x}+h \in U_{\overline{x}}$, si ha

$$f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}) = f(\overline{x}_1+h_1, \overline{x}_2+h_2) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) =$$

$$= \boxed{f(\overline{x}_1+h_1, \overline{x}_2+h_2) - f(\overline{x}_1+h_1, \overline{x}_2)} + \boxed{f(\overline{x}_1+h_1, \overline{x}_2) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)} \quad (*)$$

b) Applichiamo il teorema del valore medio per funzioni in una variabile a

$$\varphi_1(x_1) = f(x_1, \overline{x}_2) \quad \text{tra } \overline{x}_1 \text{ e } \overline{x}_1+h_1$$


$\bar{x}_2 + \delta_2 h_2$
$\bar{x}_2 + h_2$
$\bar{x} + h$
$\bar{x}_2$
$\bar{x}$
$\bar{x}_1$
$\bar{x}_1 + h_1$
$\bar{x}_1 + \delta_1 h_1$

Si ha quindi che $\exists\, \delta_1 \in]0,1[$:

$$\varphi_1(\bar{x}_1 + h_1) - \varphi_1(\bar{x}_1) = \varphi_1'(\bar{x}_1 + \delta_1 h_1)(\bar{x}_1 + h_1 - \bar{x}_1)$$

cioè

ULTIMI DUE TERMINI NELLA SCOMPOSIZIONE (*)

$$\boxed{f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} = f_{x_1}(\bar{x}_1 + \delta_1 h_1, \bar{x}_2) \cdot h_1$$

Si noti che $\bar{x}_1 + \delta_1 h_1 \in]\bar{x}_1, \bar{x}_1 + h_1[$ come richiesto dal teorema del valor medio e che δ_1 dipende da h_1 : $\delta_1 = \delta_1(h_1)$

c) Applichiamo ora il teorema del valor medio a

$\varphi_2(x_2) = f(\bar{x}_1 + h_1, x_2)$ tra $\bar{x}_2$ e $\bar{x}_2 + h_2$

$\Rightarrow \exists\, \delta_2 \in]0,1[$ tale che

$$\varphi_2(\overline{x}_2+h_2)-\varphi_2(\overline{x}_2)=\varphi_2'(\overline{x}_2+\delta_2 h_2)\,(\overline{x}_2+h_2-\overline{x}_2)$$

cioè $\longrightarrow$ PRIMI DUE TERMINI NELLA SCOMPOSIZIONE (*)

$$\boxed{f(\overline{x}_1+h_1,\overline{x}_2+h_2)-f(\overline{x}_1+h_1,\overline{x}_2)}=f_{x_2}(\overline{x}_1+h_1,\overline{x}_2+\delta_2 h_2)\cdot h_2$$

con δ_2 dipendente da h_1 e h_2: $\delta_2=\delta_2(h_1,h_2)$

NB: abbiamo potuto impiegare il teorema del valor medio perché le derivate parziali esistono in tutto $U_{\overline{x}}$.

d) Riprendendo la (*) possiamo scrivere

$$f(\overline{x}+h)-f(\overline{x}) = \boxed{f_{x_2}(\overline{x}_1+h_1, \overline{x}_2+\delta_2 h_2)h_2} + \boxed{f_{x_1}(\overline{x}_1+\delta_1 h_1, \overline{x}_2)\cdot h_1}$$

(**)

e) Si ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} f_{x_1}(\overline{x}_1+\delta_1 h_1, \overline{x}_2) = f_x(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$$

poiché $\delta_1 = \delta_1(h_1) \in]0,1[\Rightarrow \delta_1$ è funzione limitata e $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} h_1 = 0$. Quindi $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \overline{x}_1+\delta_1 h_1 = \overline{x}_1$

Si applica poi la continuità di f_{x_1} in $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ e il teorema del limite della funzione composta

$$(h_1, h_2) \longrightarrow (0,0)$$

$$f_{x_1}(g(h_1, h_2))$$

$$\|$$

$$\begin{tikzcd}
(h_1, h_2) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & (\underbrace{\bar{x}_1 + \delta(h_1)h_1}, \bar{x}_2) \arrow[r, "f_{x_1}"] \arrow[d] & f_{x_1}(\bar{x}_1 + \delta(h_1)h_1, \bar{x}_2) \arrow[d] \\
(0,0) & \bar{x}_1, \quad \bar{x}_2 & f_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)
\end{tikzcd}$$

$$\delta(h_1)h_1 \to 0$$

f) Analogamente a e) si ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} f_{x_2}(\overline{x}_1+h_1,\overline{x}_2+\delta_2 h_2)=f_{x_2}(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$$

PARTE LINEARE CON IL GRADIENTE

È L'ESPRESSIONE CHE COMPARE NELLA DEFINIZIONE DI DIFFERENZIABILITA

g) Definiamo

$$\varphi(h_1,h_2)=\underbrace{f(\overline{x}_1+h_1,\overline{x}_2+h_2)-f(\overline{x}_1,\overline{x}_2)}_{f(\overline{x}+h)-f(\overline{x})}\overbrace{-f_{x_1}(\overline{x}_1,\overline{x}_2)\cdot h_1-f_{x_2}(\overline{x}_1,\overline{x}_2)h_2}^{\langle\nabla f(\overline{x}_1,\overline{x}_2),(h_1,h_2)\rangle}$$

USO LA (**)

$$\varphi(h_1,h_2)=\boxed{f_{x_1}(\overline{x}_1+\delta_1 h_1,\overline{x}_2)\cdot h_1}+\boxed{f_{x_2}(\overline{x}_1+h_1,\overline{x}_2+\delta_2 h_2)h_2}+$$

$$-f_{x_1}(\overline{x}_1,\overline{x}_2)h_1-f_{x_2}(\overline{x}_1,\overline{x}_2)h_2$$

Raccogliendo h_1 e h_2 si ha

$$\varphi(h_1,h_2) = \underbrace{\left[f_{x_1}(\bar{x}_1+\delta_1 h_1,\bar{x}_2) - f_{x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\right]}_{\to A(h_1)} h_1 +$$

$$\underbrace{\left[f_{x_2}(\bar{x}_1+h_1,\bar{x}_2+\delta_2 h_2) - f_{x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\right]}_{\to B(h_1,h_2)} h_2 =$$

$$= A(h_1)\cdot h_1 + B(h_1,h_2)\cdot h_2$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = A(h_1)\frac{h_1}{\|(h_1,h_2)\|} + B(h_1,h_2)\frac{h_2}{\|(h_1,h_2)\|}$$

OBIETTIVO: LIMITE ZERO PER $h \to 0$

con $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} A(h_1) = 0$ (v. e) e $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} B(h_1,h_2) = 0$ (v. f))

→ VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $\varphi(h_1,h_2)$ è $o(\|(h_1,h_2)\|)$

Inoltre $\frac{h_1}{\|(h_1,h_2)\|}$ e $\frac{h_2}{\|(h_1,h_2)\|}$ sono funzioni di (h_1,h_2) limitate.

Infatti: $0 \leq \left|\frac{h_1}{\|(h_1,h_2)\|}\right| = \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq 1$ poiché $|h_1|^2 = h_1^2 \leq h_1^2 + h_2^2$

$$\Rightarrow \frac{|h_1|^2}{h_1^2+h_2^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq 1$$

Analogamente per $\frac{h_2}{\|(h_1,h_2)\|}$.

$$\Rightarrow \frac{\varphi(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = \underbrace{A(h)\frac{h_1}{\|(h_1,h_2)\|}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{B(h,k)\frac{h_2}{\|(h_1,h_2)\|}}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow 0 \quad \text{per } (h_1,h_2)\to(0,0)$$

Quindi φ è $o(\|(h_1,h_2)\|)$ e f è differenziabile in $\overline{x}$. $\square$