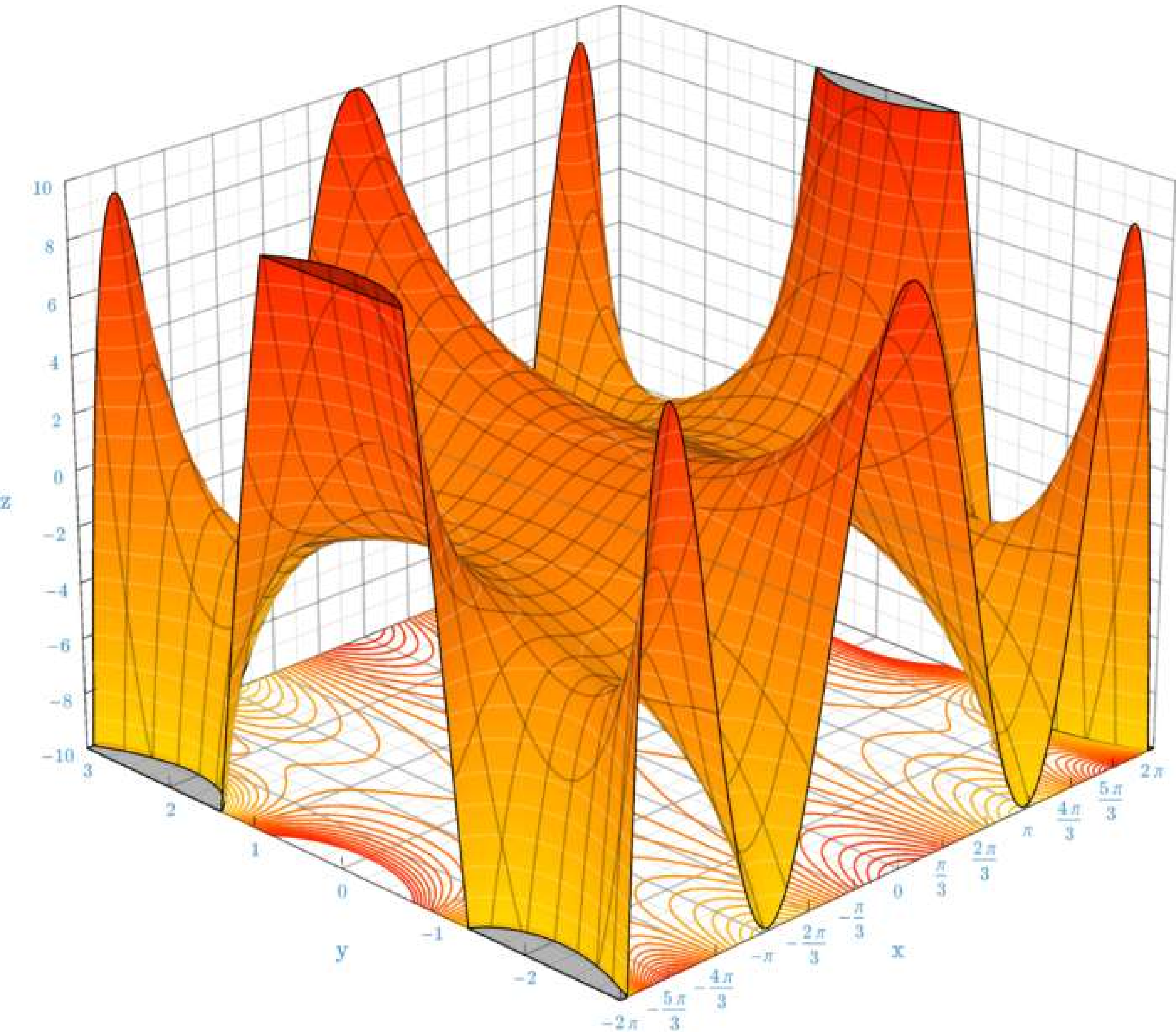
Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



SERIE DI POTENZE

Parte 1

SERIE DI POTENZE

Le serie di potenze sono serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \text{con } a_n \in \mathbb{R}\ \forall n,\ x_0 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$$

SERIE DI POTENZE CENTRATA IN x_0

Con una traslazione $x \to x + x_0$ si ottiene la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{centrata in } x_0 = 0$$

Studieremo le serie centrate in 0.

I risultati si "trasportano" alle altre (centrate in $x_0 \neq 0$) per traslazione.

Ad esempio, se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge in $[-a, a]$ con $a > 0$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ converge in $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Tutte le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ convergono ovviamente in $x=0$

$\Rightarrow$ l'insieme di convergenza non è mai vuoto.

Proposizione

Data $\sum_n a_n x^n$, se questa converge in $\bar{x} \in \mathbb{R}$, allora converge (assolutamente) in ogni $x : |x| < |\bar{x}|$.

Dim: $\sum_n a_n x^n$ converge in $\bar{x}$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} a_n \bar{x}^n = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad |a_n \bar{x}^n| < \varepsilon$

Poniamo $\varepsilon = 1$ e sia $\bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad |a_n \bar{x}^n| < 1$

$$\Rightarrow \quad |a_n x^n| = |a_n \bar{x}^n| \left| \frac{x^n}{\bar{x}^n} \right| \leq \left| \frac{x}{\bar{x}} \right|^n \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

Se $|x| < |\bar{x}|$ si ha $\left|\frac{x}{\bar{x}}\right| < 1 \Rightarrow \sum_n \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n$ è serie geom. convergente

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto $\sum_n a_n x^n$ converge assolutamente $\forall x : |x| < |\bar{x}|$. $\square$

Data una serie di funzioni $\sum_n f_n$ definiamo INSIESE DI CONVERGENZA l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_n f_n(x) \text{ converge}\}$$

Se la serie è una serie di potenze, definiamo

$$R = \sup\{|x| : x \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

RAGGIO DI CONVERGENZA DELLA SERIE

Corollario

Sia $\sum_n a_n x^n$ una serie di potenze.
Detti A il suo insieme di convergenza, R il suo raggio di convergenza, si verifica sempre uno (solo) dei seguenti casi:

a) $R = 0$, $A = \{0\}$

b) $R \in]0, +\infty[$, $]-R, R[\subseteq A \subseteq [-R, R]$

c) $R = +\infty$, $A = \mathbb{R}$

Inoltre $\sum_n a_n x^n$ converge assolutamente in ogni $x \in]-R, R[$.

Dim: a) $R=\sup\{|x|: x\in A\}=0 \Rightarrow A=\{0\}$ ovvio.

b) Sia $R\in]0,+\infty[$.

i) $\boxed{]-R,R[\subseteq A}$

Sia $\tilde{x}\in]-R,R[$, cioè $|\tilde{x}|<R=\sup\{|x|: x\in A\}$.

Allora $\exists\ \bar{x}\in A: \ |\tilde{x}|<|\bar{x}|\leq R$

$\Rightarrow$ per la Proposizione precedente $\sum_n a_n\tilde{x}^n$ converge assolutamente in $\tilde{x}$ $\Rightarrow \tilde{x}\in A \Rightarrow]-R,R[\subseteq A$

ii) $\boxed{A\subseteq[-R,R]}$

Sia $\bar{x}\in A$. Allora $|\bar{x}|\leq R=\sup\{|x|: x\in A\}$

$\Rightarrow \bar{x}\in[-R,R]$.

c) Sia $R = +\infty$.

Sia $\tilde{x} \in \mathbb{R}$. Poiché $R = \sup\{|x| : x \in A\} = +\infty$,

$\exists\ \bar{x} \in A : \ |\tilde{x}| < |\bar{x}|$

$\Rightarrow$ Per la Proposizione precedente $\tilde{x} \in A \Rightarrow \mathbb{R} \subseteq A$

Viceversa, $A \subseteq \mathbb{R}$ è ovvio. $\square$

L'insieme di convergenza di una serie di potenze è quindi sempre un INTERVALLO

NEL CASO b) LA SERIE PUÒ CONVERGERE O MENO IN CIASCUNO DEGLI ESTREMI

a) $R=0 \qquad A=\{0\}=[0,0]$

b) $R\in\,]0,+\infty[\qquad]-R,R[\,\subseteq A\subseteq[-R,R]$

cioè $A\in\{\,]-R,R[,\ [-R,R[,\ ]-R,R],\ [-R,R]\,\}$

c) $R=+\infty \qquad A=\mathbb{R}=\,]-\infty,+\infty[$

Proposizione (CRITERIO DELLA RADICE)

Sia $\sum_n a_n x^n$ una serie di potenze.

Se $\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ allora il raggio di convergenza è

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$$

Dim: Sia $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in [0,+\infty[$

Allora $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell |x|$

$\Rightarrow$ per il criterio della radice per serie numeriche

$\sum_n a_n x^n$ converge assolutamente per x tale che $\ell|x|<1$,

cioè $\forall x$ se $\ell=0$ e $\forall x : |x|<\frac{1}{\ell}$, cioè in $]-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell}[$

se $\ell \in]0,+\infty[$

Per lo stesso criterio, la serie non converge se

$\ell|x|>1$, cioè se $|x|>\frac{1}{\ell}$, dunque se $x\notin\left[-\frac{1}{\ell},\frac{1}{\ell}\right]$
Dal corollario precedente si deduce che il raggio di convergenza è $R=+\infty$ se $\ell=0$, $R=\frac{1}{\ell}$ se $\ell\in\left]0,+\infty\right[$

Se invece $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\ell=+\infty$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=\lim_{n\to+\infty}|x|\sqrt[n]{|a_n|}=\begin{cases}+\infty & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Il raggio di convergenza è $R=0$. $\square$

Proposizione (CRITERIO DEL RAPPORTO)

Sia $\sum_n a_n x^n$ una serie di potenze.

Se $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$ allora il raggio di convergenza è

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$$

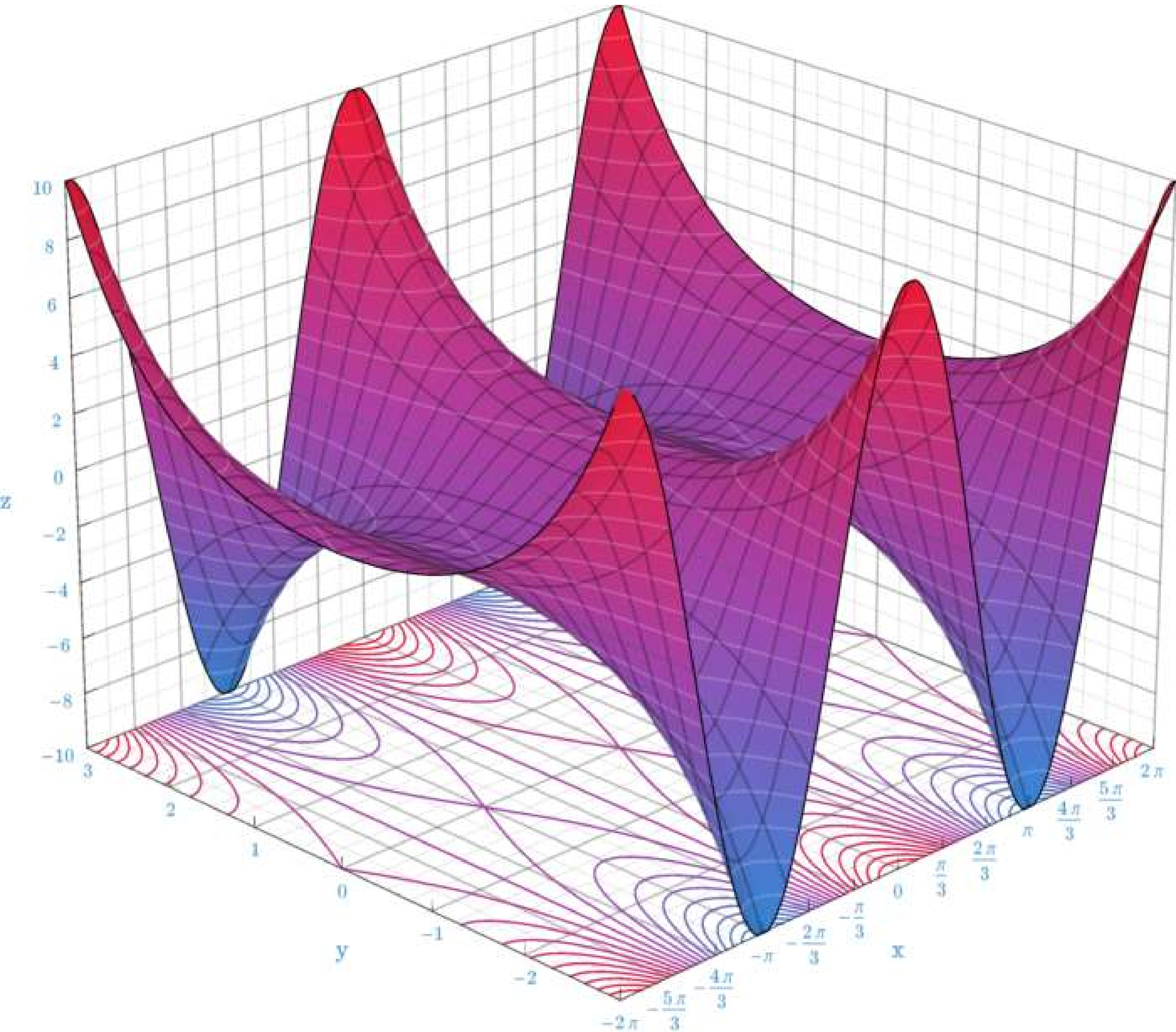
Dim: Analoga a quella del criterio della radice usando il criterio del rapporto per serie numeriche. $\square$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica
corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



SERIE DI POTENZE

Parte 2

Proposizione (CRITERIO DELLA RADICE)

Sia $\sum_n a_n x^n$ una serie di potenze.

Se $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ allora il raggio di convergenza è

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \in \,]0, +\infty[\\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$$

<u>Proposizione</u> (CRITERIO DEL RAPPORTO)

Sia $\sum_n a_n x^n$ una serie di potenze.

Se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$ allora il raggio di convergenza è

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$$

Esempi

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} x^n \qquad a_n = \frac{n+1}{n!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{(n+1)!} \, \frac{n!}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0$$

$\Rightarrow$ la serie converge puntualmente (e assolutamente) in $\mathbb{R}$.

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} (x-3)^n$ $\qquad a_n = (-1)^n \frac{n}{2^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \quad \frac{2^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow R = 2 \Rightarrow$ la serie converge puntualmente (e assolutamente) in $]3-2, 3+2[=]1, 5[$

Alternativa: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\,(x-1)^n \qquad a_n = n!$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$\Rightarrow R = 0$ e la serie converge solo in $x = 1$.

Proposizione

Data la serie di potenze $\sum_n a_n x^n$ con raggio di convergenza R, la serie converge uniformemente

in $[-R', R']$, $\forall R' : 0 \leq R' < R$

Inoltre la somma della serie è continua in $]-R, R[$.

Dim: Sia $0 \leq R' < R$ (eventualmente $R = +\infty$)

$\forall x \in [-R', R']$ si ha $|a_n x^n| \leq |a_n R'^n|$

$\Rightarrow \sup\limits_{[-R', R']} |a_n x^n| \leq |a_n R'^n|$

$\Rightarrow$ la serie converge uniformemente in $[-R', R']$ per il Criterio di Weierstrass, poiche $\sum\limits_n |a_n R'^n|$ converge ($R' \in]-R, R[$ contenuto nell'insieme di convergenza della serie)

$\forall R' : 0 \leq R' < R \quad f(x) = \sum_n a_n x^n$ è continua in $[-R', R']$

perchè somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue

$\Rightarrow$ poichè R' è arbitrario, dunque $\forall x \in]-R, R[$ $\exists$ un intorno di x tale che f è continua in tale intorno, f è continua in $]-R, R[$.

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n$$ è detta

SERIE DELLE DERIVATE.

Tale serie è una serie di potenze con coefficienti

$$b_n = (n+1)\, a_{n+1} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lemma

Sia $0<r<1$. Allora $\lim_{n\to+\infty} n r^n = 0$

Dim: $n r^n = n e^{\log r^n} = n e^{n \log r} = \frac{n}{e^{-n\log r}} = \frac{n}{e^{n\log(1/r)}}$

Con il teorema dell' Hôpital si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n r^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{n\log(1/r)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{n\log(1/r)}\log(1/r)} = 0$$

$+\infty$

NB: $0<r<1$
$\Rightarrow 1/r > 1 \Rightarrow \log(1/r)>0$

$\square$

Proposizione

Una serie di potenze e la sua serie delle derivate hanno lo stesso raggio di convergenza.

Dim: Sia R il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e R' il raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

Siano poi A l'insieme di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e A' l'insieme di convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Dim: $\boxed{0 < R < +\infty}$

Dimostriamo che $]-R, R[\subseteq A'$.

$0 \in A'$ automaticamente

Sia $x \in]-R, R[$, $x \neq 0$. Sia r : $|x| < r < R$, quindi $\frac{|x|}{r} \in]0,1[$

Per il lemma precedente $\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{|x|}{r}\right)^n = 0$

$\Rightarrow$ la successione di termini $n \left(\frac{|x|}{r}\right)^n$ è limitata

$\Rightarrow \exists\, M$: $n \left(\frac{|x|}{r}\right)^n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$0 < r < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge assolutamente in r

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |n\, a_n\, x^{n-1}| = \frac{1}{|x|} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{|x|}{r}\right)^n |a_n| r^n \leq$$

$$\leq \frac{M}{|x|} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| r^n$$ serie numerica convergente.

$\Rightarrow$ la serie derivata converge in x $\forall x \in]-R, R[$

$\Rightarrow]-R, R[\subseteq A'$.

$\Rightarrow \quad R' = \sup\{|x| : x \in A'\} \geq \sup\{|x| : x \in]-R, R[\} = R.$

$\Rightarrow \quad R' \geq R.$

Sia per assurdo $R' > R$.

Sia r : $R < r < R'$.

$r \in]-R', R'[\Rightarrow$ la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n| r^{n-1}$ converge.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n = |a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| r^n = |a_0| + r \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| r^{n-1} \leq$$

$$\leq |a_0| + r \sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n| r^{n-1}$$ $\leftarrow$ CONVERGENTE PERCHÈ $r \in]-R', R'[\subseteq A'$!

$\Rightarrow$ la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, r^n$ converge

$\Rightarrow r \in A$.

Ma $A \subseteq [-R, R]$, quindi $r \leq R$

Assurdo, perché era $R < r < R$!

I casi $\boxed{R=0}$ e $\boxed{R=+\infty}$ si dimostrano in modo analogo.

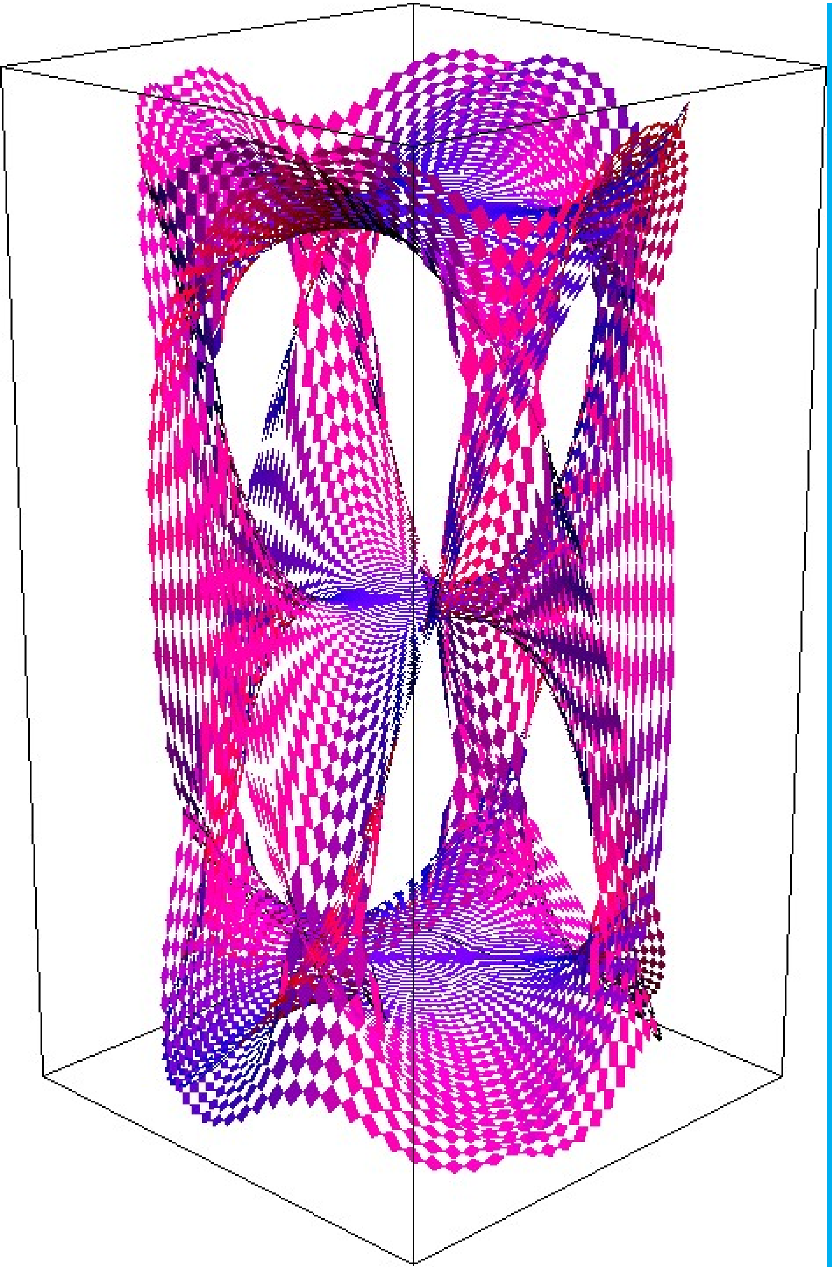
$\square$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



SERIE DI POTENZE

Parte 3

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$$ è detta

SERIE DELLE DERIVATE.

Tale serie è una serie di potenze con coefficienti

$$b_n = (n+1)\, a_{n+1} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proposizione

Una serie di potenze e la sua serie delle derivate hanno lo stesso raggio di convergenza.

Dim: Sia R il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e

R' il raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

Siano poi A l'insieme di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

e A' l'insieme di convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Corollario

Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza $R \neq 0$.

Allora $\exists\ f'(x)$ in $]-R, R[$ e si ha $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Dim: Sia $0 < r < R$

Le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ convergono uniformemente in $[-r, r]$

Applicando il teorema di scambio somma - derivata si ha $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n\right)' = f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ in $[-r, r]$.

Poiché questo vale $\forall\, x \in [-r, r]$, $\forall\, r : 0 < r < R$, vale anche in $]-R, R[$.

$\square$

Corollario

Data $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza $R\neq 0$, f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $]-R,R[$ e si ha

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \qquad (k\in\mathbb{N})$$

DERIVATA DI ORDINE k

Dim: Per induzione su k a partire dal Corollario precedente. $\square$

Si noti che ponendo $x=0$ in quest'ultimo corollario si ha

$$f^{(k)}(0)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_n\,0^{n-k}=\frac{k!}{0!}a_k\,0^0+\frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}0^1+\text{-----}=k!\,a_k$$

$0!=1$ $\qquad$ $0^0=1$

$$\Rightarrow\quad a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\quad\forall\, k\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\quad\forall x\in\,]-R,R[}$$

SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR

Quindi:

a) La somma di una serie di potenze con raggio di convergenza $R \neq 0$ (cioè $R > 0$ o anche $R = +\infty$) è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $]-R, R[$

b) Tale somma coincide con la serie di Taylor su $]-R, R[$

Ma se $f \in \mathcal{C}^\infty$ e costruisco la sua serie di Taylor non è detto che $f(x)$ sia la sua somma in un qualche intorno del punto in cui avviene lo sviluppo.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si può dimostrare che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e che $f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ La serie di Taylor è a termini tutti nulli e la sua somma vale $0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, ma non coincide con f in nessun intorno dell'origine.

Teorema

Sia $f \in \mathscr{C}^\infty(]-r, r[)$ con $r > 0$.

Sia $M \in \mathbb{R}$ (indipendente da n e da x) tale che

$$\sup_{]-r,r[} |f^{(n)}(x)| \leq M\, n!\, r^{-n} \quad \text{(definitivamente)}$$

$\Rightarrow$ f è sviluppabile in serie di Taylor.

Dim: Applicando la formula di Taylor si ha

$$\underbrace{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\text{POLINOMIO DI TAYLOR E SOMMA PARZIALE DELLA SERIE DI TAYLOR}} = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\text{RESTO SECONDO LAGRANGE}} \quad \text{con } \bar{x} \text{ tra } 0 \text{ e } x$$

ESISTE $\forall n$ PERCHÉ $f \in \mathscr{C}^\infty(]-r,r[)$

Si ha

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{M(n+1)!\, r^{-(n+1)}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} = M\left(\frac{|x|}{r}\right)^{n+1}$$

Poiché $\frac{|x|}{r} \in]0,1[$, si ha $\lim_{n\to+\infty} M \left(\frac{|x|}{r}\right)^{n+1} = 0$

$\Rightarrow$ La somme parziali della serie di Taylor (i polinomi di Taylor) convergono a f.

$\square$

Corollario

Se $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\sup_{]-r,r[} |f^{(k)}(x)| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$$ (DERIVATE EQUILIMITATE)

vale il teorema precedente.

Dim: Basta osservare che $\frac{n!}{r^n}$ è definitivamente > 1, qualunque sia $r > 0$

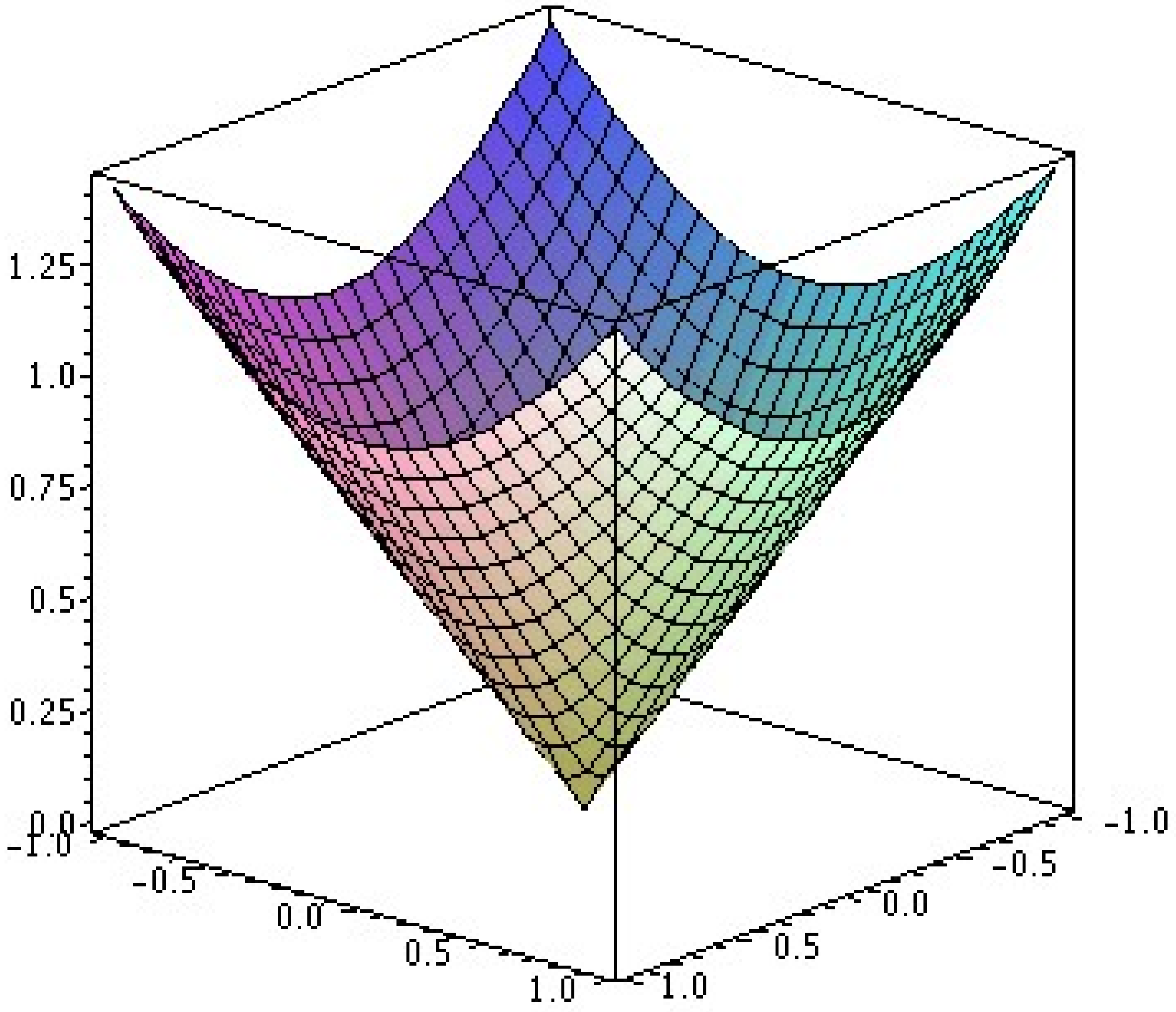
$$\Rightarrow \sup_{]-r,r[} |f^{(n)}(x)| \leq M \leq M\, n!\, r^{-n} \text{ definitivamente} \qquad \square$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



SERIE DI POTENZE

Parte 4

Teorema

Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r,r[)$ con $r>0$.
Sia $M \in \mathbb{R}$ (indipendente da n e da x) tale che

$$\sup_{]-r,r[} |f^{(n)}(x)| \leq M\, n!\, r^{-n} \quad \text{(definitivamente)}$$

$\Rightarrow$ f è sviluppabile in serie di Taylor.

Corollario

Se $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\sup_{]-r,r[} |f^{(k)}(x)| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \text{(DERIVATE EQUILIMITATE)}$$

vale il teorema precedente.

Dim: Basta osservare che $\frac{n!}{r^n}$ è definitivamente > 1, qualunque sia $r > 0$

$$\Rightarrow \sup_{]-r,r[} |f^{(n)}(x)| \leq M \leq M\, n!\, r^{-n} \text{ definitivamente} \qquad \square$$

Si può dimostrare che un'altra condizione sufficiente per lo sviluppo in serie di Taylor è

$$\sup_{]-r,r[} |f^{(k)}(x)| \leq M^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

<u>Def.</u>: $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, A aperto, è detta ANALITICA in $x_0 \in A$ se è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di x_0.

Se è sviluppabile in x $\forall x \in A$ è detta ANALITICA IN A

Teorema (di Abel)

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza, $R \in]0, +\infty[$

a) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ converge, si ha $\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$

b) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$ converge, si ha $\lim_{x \to (-R)^+} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$

Nei casi a) e b) inoltre $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformemente in $[0, R]$, $[-R, 0]$ rispettivamente.

Ultime modifiche
Una voce a caso
Nelle vicinanze
Vetrina
Aiuto
Sportello informazioni

Comunità

Portale Comunità
Bar
Il Wikipediano
Fai una donazione
Contatti

Strumenti

Puntano qui
Modifiche correlate
Carica su Commons
Pagine speciali
Link permanente
Informazioni pagina
Elemento Wikidata
Cita questa voce

In altri progetti

Wikimedia Commons
Wikiquote
Wikisource

Stampa/esporta

Crea un libro
Scarica come PDF
Versione stampabile

Niels Henrik Abel

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Questa voce o sezione sull'argomento matematici non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti.
Puoi migliorare questa voce aggiungendo citazioni da fonti attendibili secondo le linee guida sull'uso delle fonti. Segui i suggerimenti del progetto di riferimento.

Niels Henrik Abel (Finnøy, 5 agosto 1802 – Froland, 6 aprile 1829) è stato un matematico norvegese, noto soprattutto per i suoi fondamentali contributi all'algebra ed alla teoria delle funzioni; ricordato inoltre per il premio che porta il suo nome.


Niels Henrik Abel

Indice [nascondi]

Contesto storico [modifica | modifica wikitesto]

La vita di Abel fu segnata dalla povertà dovuta al contesto politico ed economico norvegese del periodo. Alla fine del XVIII secolo la Norvegia faceva parte della Danimarca e i danesi avevano deciso di rimanere neutrali durante le guerre napoleoniche. Ciononostante un trattato di neutralità del 1794 fu interpretato dalla Gran Bretagna come un atto aggressivo e nel 1801 la maggior parte della flotta danese fu distrutta durante una battaglia presso il porto di Copenaghen. Pur avendo cercato di evitare la guerra fino al 1807, sostenibile..."

Di lui scrisse anche Eric Temple Bell nel libro "I grandi matematici": *"Vicino al fuoco, curvo sui libri di matematica, studiava mentre i fratelli e le sorelle giocavano e ridevano intorno a lui. Il rumore non lo disturbava mai, anzi: egli scherzava insieme a loro e continuava a scrivere"*

Premio Abel [modifica | modifica wikitesto]

Il nome di Abel ha ricevuto un importante riconoscimento. L'istituzione del "Premio Abel", istituito per colmare la lacuna del Nobel che continua ad ignorare la matematica.

Secondo una leggenda, diffusa probabilmente da qualche matematico maligno, Alfred Nobel avrebbe escluso la matematica dal suo premio dopo aver scoperto una tresca tra sua moglie e un matematico svedese. Nobel in realtà non si sposò mai, ma nemmeno chiarì i motivi di questa esclusione. La Svezia nel 1968 ha aggiunto ai Nobel un premio per l'economia, ma non ha mai voluto porre rimedio alla clamorosa esclusione della matematica. Nella storia, alcuni matematici non hanno avuto vita facile in Svezia. Ricordiamo soltanto René Descartes, vittima dei capricci della regina Cristina, che lo obbligava a ritmi di lavoro per lui insostenibili, tanto da portarlo in breve tempo alla tomba, o pensiamo a Sonia Kowalewski, la celebre matematica russa, morta a Stoccolma, per le complicazioni di una banale influenza, a quarantun anni: "Questo sole eterno, queste lunghe notti chiare troppo in anticipo sul calore dell'estate - scriveva a un'amica - sono snervanti; sono notti che promettono una felicità che non sanno dare".

La Norvegia ha stanziato per il Premio Abel un fondo di 22 milioni di dollari e il premio, piuttosto consistente, è di 770.000 Euro. Il "Premio Abel" era già stato proposto nel 1902 da Oscar II, allora re di Svezia e di Norvegia, ma rotta l'unione fra i due paesi, il progetto era stato abbandonato. Il primo vincitore del premio Abel, nel 2003, fu il matematico francese Jean-Pierre Serre, del Collège de France di Parigi. La motivazione del premio fu: "Per aver svolto un ruolo fondamentale nel dare una forma moderna a numerose branche della matematica, fra cui la topologia, la geometria algebrica e la teoria dei numeri". Nel 2004 i vincitori furono Sir Michael Francis Atiyah, dell'Università di Edimburgo, e Isadore Manuel Singer del Massachusetts Institute of Technology, con la motivazione: "Per la loro scoperta e dimostrazione del teorema dell'indice che collega fra loro topologia, geometria e analisi, e per il loro ruolo di primo piano nella costruzione di nuovi ponti fra matematica e fisica teorica". Il teorema dell'indice di Atiyah - Singer, scoperto quarant'anni fa con un loro lavoro comune, è uno dei punti di riferimento della matematica del XX secolo e ha permesso grandi progressi in topologia, geometria differenziale e nella teoria quantistica dei campi, mentre nel 2005 fu Peter David Lax, della New York University: "Per i suoi straordinari contributi alla teoria e all'applicazione delle equazioni differenziali parziali e al calcolo delle loro soluzioni".

Bibliografia [modifica | modifica wikitesto]

- Øystein Ore: *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary* Chelsea, New York 1957.
- Luigi Pepe: *200 anni dalla nascita di Abel: genio e regolatezza*, Lettera matematica PRISTEM n. 46, 2002.

Esempio

In un esempio precedente si è visto che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x) \quad \forall x \in]-1,1[$$

Se $x=-1$ si ha la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ che converge per il criterio di Leibniz

$\Rightarrow$ per il teorema di Abel:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \lim_{x\to -1^+} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \lim_{x\to -1^+} \left(-\log(1-x)\right) = -\log 2$$

$$\Rightarrow \log 2 = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+1}$$

Si noti invece che per $x = 1$ la serie diventa

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$, che diverge (serie armonica)

Sia $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza R positivo o $R=+\infty$.

Sappiamo che f è continua in $]-R,R[$

$\Rightarrow$ f è integrabile

Inoltre la convergenza è uniforme in $[-r,r]$, $\forall r: 0<r<R$.

$\Rightarrow$ si può applicare il teorema di scambio somma integrale

$\Rightarrow$ integrando tra 0 e x, con $x \in]-r, r[$, $0<r<R$ si ha

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}}_{\text{SERIE INTEGRALE}}$$

La serie integrale di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha lo stesso raggio di convergenza.

Infatti la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ da cui proviene è la sua serie derivata.

Esempio

Sia $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{x} & \text{se } x \in]0,1] \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\qquad f : [0,1] \to \mathbb{R}$

La funzione è continua anche in $x=0$ poiché

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 = f(0)$$

Hôpital

Esprimere $\int_0^1 f(x)\,dx$ come serie.

Si è già visto che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x)$ in $[-1,1[$.

$$\Rightarrow \log(1+x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad \text{per } -x \in [-1,1[, \text{ cioè } x \in]-1,1]$$

$$\Rightarrow \frac{\log(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1} \quad \text{per } x \in]-1,1] \setminus \{0\}$$

Per $x=0$ si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 0^n}{n+1} = \frac{(-1)^0 0^0}{1} = 1 = f(0)$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1} \quad \text{per } x \in [0,1]$$

$\Rightarrow$ Integrando la serie termine a termine si ha

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 0^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE

Serie esponenziale

$f(x) = e^x \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Serie di Taylor: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Raggio di convergenza: $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow R = +\infty$

$$\sup_{]-r,r[} |f^{(n)}(x)| = \sup_{]-r,r[} e^x = e^r \quad \forall r : 0 < r$$

$\Rightarrow$ le derivate di f sono equilimitate

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ in }]-r,r[\quad \forall r : 0 < r$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Serie circolari

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

validi $\forall x \in \mathbb{R}$

Si dimostrano in modo analogo allo sviluppo di e^x.

Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{per } x \in]-1,1[$$

Infatti $a_n = 1 \ \forall n \Rightarrow$ il raggio di convergenza è $R=1$.

Integrando tra 0 e x, come già visto, si ha

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{per } x \in [-1,1[$$

Se invece sostituiamo x con $-x^2$ in $\dfrac{1}{1-x}$ abbiamo

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \text{per } |x| < 1$$

e integrando questa si ottiene

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\parallel$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{per } |x| < 1$$

Tuttavia, con il Teorema di Abel si può dimostrare che l'uguaglianza vale anche per $x=1$ e $x=-1$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{per } |x| \leq 1$$

Per $x=1$ si ha $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, quindi

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Poiché $\log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$, si ottiene anche

$$\log \frac{1+x}{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{per } |x|<1$$

per n dispari i termini si elidono

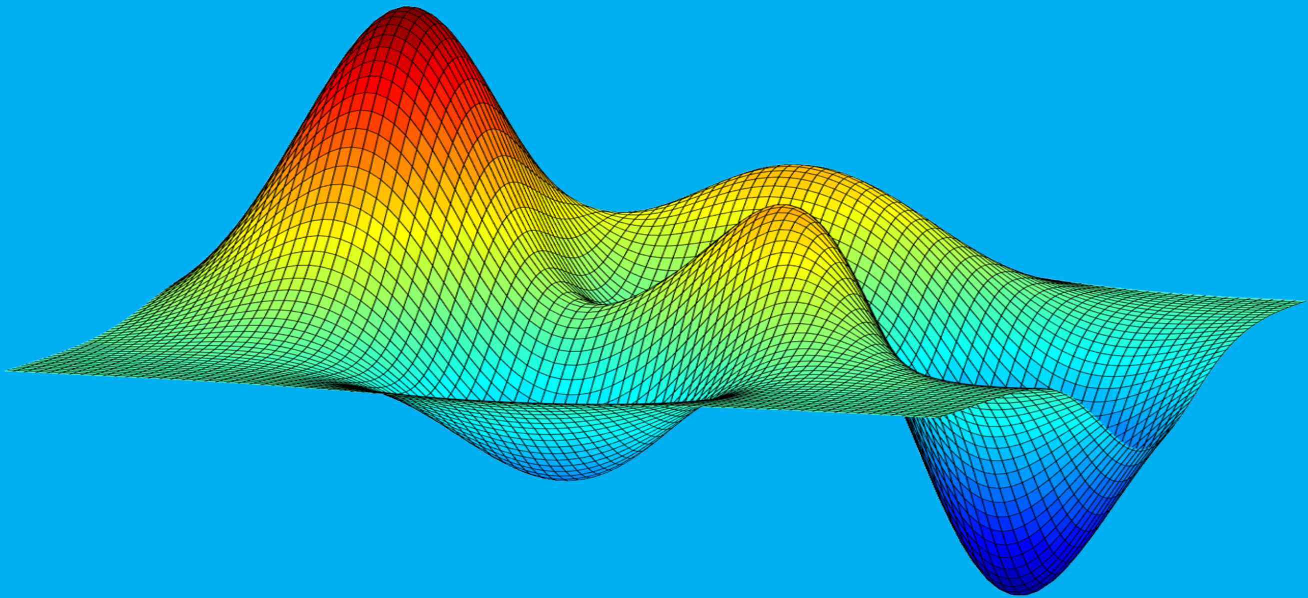
$$\Rightarrow \log \frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{per } |x|<1$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



SERIE DI POTENZE

Parte 5

Serie binomiale

Poniamo, per $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad n \geq 1 \,, \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

e consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Determiniamo il raggio di convergenza

$$\frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{(n+1)!} \frac{n!}{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)|} =$$

$$= \frac{|\alpha-n|}{n+1} \longrightarrow 1 \text{ per } n \to +\infty$$

$$\Rightarrow R = 1$$

Poniamo $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

Applichiamo il teorema di scambio somma-derivata e moltiplichiamo per $(1+x)$:

$$(1+x) f'(x) = (1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} n x^n =$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{m+1} (m+1) x^m + \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[\underbrace{(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}}_{= \ \text{V. DOPO}} \Big] x^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n =$$

$$= \alpha f(x)$$

Infatti si ha

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} =$$

$$= (n+1)\,\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} + n\,\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} =$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}\,[\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)] + n\,\cancel{(n+1)}\,[\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)]}{\cancel{(n+1)!}\; n!} =$$

$$= \frac{[\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)]\cdot[(\alpha-n)+n]}{n!} = \alpha\,\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} =$$

$$= \alpha \binom{\alpha}{n}$$

Si ottiene quindi $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$

Poniamo $g(x) = (1+x)^{-\alpha} f(x)$

$$\Rightarrow g'(x) = -\alpha\,(1+x)^{-\alpha-1}\cdot f(x) + (1+x)^{-\alpha} f'(x) =$$

$$= (1+x)^{-\alpha-1}\,[\underbrace{-\alpha f(x) + (1+x) f'(x)}_{=0}] = 0$$

$\Rightarrow g'(x) = 0$ per $|x| < 1 \Rightarrow g(x) = c$ costante

Ma $g(0) = (1+0)^{-\alpha} f(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} 0^k = \binom{\alpha}{0} = 1$

$\Rightarrow g(x) = (1+x)^{-\alpha} f(x) = 1 \quad \forall x \in]-1,1[$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^{\alpha} \quad \forall x \in]-1,1[\quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Con $\alpha = -\frac{1}{2}$ e sostituendo x con $-x^2$ si ottiene

$$(1-x^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} x^{2n}$$

e integrando i termini della serie

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{per } |x|<1$$

Esercizi

1) Sviluppare in serie di potenze $\ln(x^2-5x+6)$

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x_{12}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$

Vogliamo usare lo sviluppo

$$\log(1-x)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad x\in[-1,1[$$

$$\Rightarrow x^2-5x+6=(x-3)(x-2)=3\left(\frac{x}{3}-1\right)\cdot 2\left(\frac{x}{2}-1\right)=6\left(1-\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \log(x^2-5x+6)=\log 6+\log\left(1-\frac{x}{3}\right)+\log\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

$$\log\left(1-\frac{x}{3}\right)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)} \qquad \log\left(1-\frac{x}{2}\right)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)}$$

$$\Rightarrow \log(x^2-5x+6)=\log 6-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

Calcoliamo il raggio di convergenza R

$$\frac{1}{n+2}\cdot\frac{3^{n+2}+2^{n+2}}{6^{n+2}}\cdot(n+1)\cdot\frac{6^{n+1}}{3^{n+1}+2^{n+1}} =$$

$$= \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\to 1}\ \frac{1}{6}\ \frac{\overbrace{1+\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}}_{\to 0}}^{1}}{\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}}_{\to 0}}_{\to 1/3}} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per } n\to+\infty$$

$$\Rightarrow R = 2$$

2) Trovare raggio di convergenza e somma di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n} x^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2+n+1+1}{n+1} \frac{n}{n^2+n+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+\dots}{n^3+\dots} = 1 \quad \Rightarrow R = \underline{1}$$

$$\frac{n^2+n+1}{n} = n+1+\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x) \quad \text{per } x \in [-1,1[$$

Partiamo dalla serie geometrica e deriviamo in $]-1,1[$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n x^{n-1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' - 1 = \left(\frac{1}{1-x}\right)' - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} - 1 =$$

$$= \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + 2x - x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n} x^n = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2} - \ln(1-x)$$

3) Calcolare raggio di convergenza e somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n} x^{4n-1}$$

In $x=0$ la serie converge a 0.

Sia $x \neq 0$. Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n} x^{4n-1} = -\frac{1}{4x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x^4)^n =$$

$$= -\frac{1}{4x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x^4)^{n+1} = -\frac{1}{4x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x^2)^{2n+2}$$

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \log(1+x^2) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n} x^{4n-1} = -\frac{1}{4x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x^4)^{n+1} =$$

$$= -\frac{1}{4x} \log(1+x^4)$$