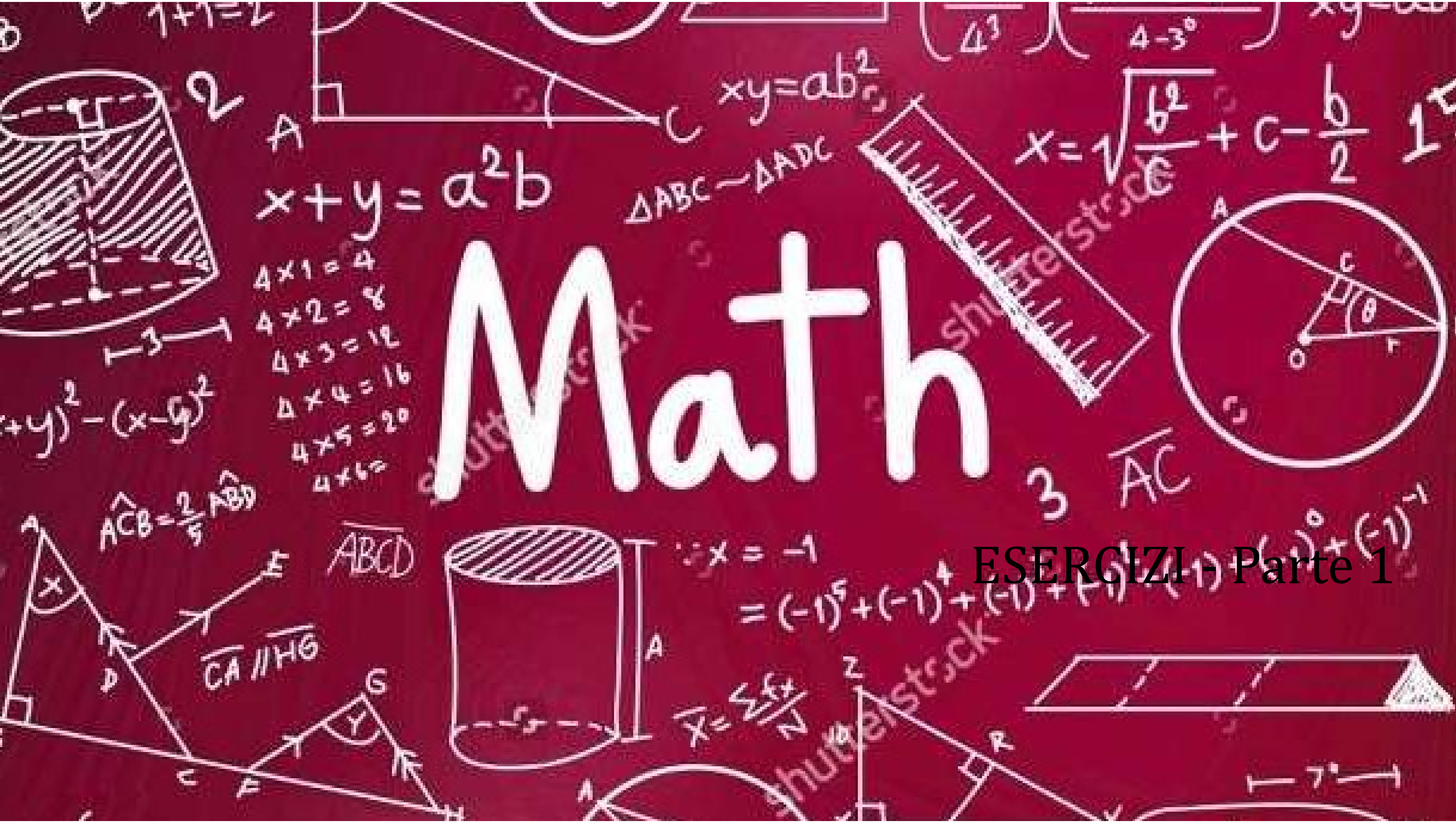
Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica
corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



ESERCIZI - Parte 1

1) Si determini la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

$$\frac{2n-1}{2^n} = 2 \cdot \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$ serie geometrica convergente

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2 - 1 = 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$ per $|x|<1$ serie geometrica

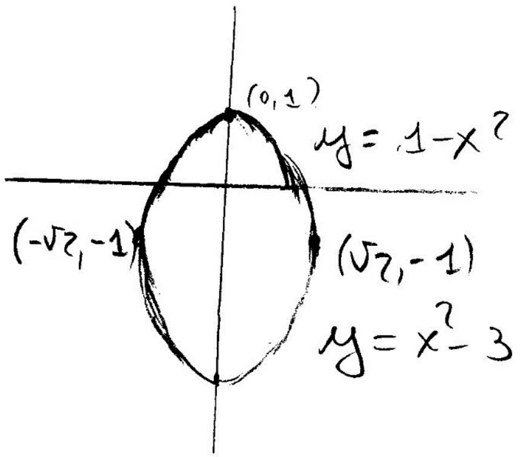
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$ serie derivata della serie geometrica

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$ moltiplicando per x

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

2) Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalle curve di equazione $y = 1-x^2$, $y = x^2-3$



Dove si "incontrano"?

$$\begin{cases} y = 1-x^2 \\ y = x^2-3 \end{cases} \Rightarrow 1-x^2 = x^2-3$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases} \quad y = -1$$

$$E = \{ (x,y) \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2},\ x^2-3 \leq y \leq 1-x^2 \}$$

$$\Rightarrow \text{Area}(E) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2-3}^{1-x^2} dy \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} y \Big|_{x^2-3}^{1-x^2} dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4-2x^2 \, dx =$$

$$= 4x - \frac{2}{3}x^3 \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \dots = \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

NB: si poteva anche usare la simmetria rispetto l'asse delle y per semplificare un po' i calcoli:

$$\frac{1}{2} \text{Area}(E) = \int_{0}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2-3}^{1-x^2} dy \right) dx = \dots = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

3) Si verifichi se la funzione $f(x,y)=|x|+|y|$ è derivabile parzialmente in $(0,1)$ rispetto x e y.

$\varphi_1(x)=f(x,1)=|x|+1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\varphi_1(x)-\varphi_1(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|+1-1}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & \text{se } x\to 0^+\\ -1 & \text{se } x\to 0^-\end{cases} \Rightarrow \nexists\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$$

$\varphi_2(y)=f(0,y)=|y|$

$\varphi_2(y)\big|_{]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[}=y$ ed è derivabile in 1 con derivata $\varphi_2'(1)=1$

$$\Rightarrow \exists\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=1$$

oppure con $\displaystyle\lim_{y\to 1}\frac{\varphi_2(y)-\varphi_2(1)}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{|y|-1}{y-1}\underset{\text{in un intorno opportuno di 1}}{=}\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y-1}=1$

4) Determinare l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{x^{3n}}{3^n}$

Poniamo $z = x^3$ ottenendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{z^n}{3^n}$

Criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{(n+3)\,3^{n+1}} \; \frac{3^n\, n+2}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{(n+2)^2}^{\to\, n^2+\dots}}{\underbrace{(n+1)(n+3)}_{n^2+\dots}\; 3} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ la serie in z ha raggio di convergenza 3

$\Rightarrow$ la serie in x converge per $|x^3| < 3$, cioè per $|x| < \sqrt[3]{3}$

Vediamo ora cosa succede in $x = \sqrt[3]{3}$ e in $x = -\sqrt[3]{3}$

$x = \sqrt[3]{3} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}$ che non converge poiché $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 \neq 0$

$x = -\sqrt[3]{3} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} (-1)^n$ che non converge poiché $\nexists \displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$

5) Determinare l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n+1}$

Poniamo $z = 2x-1$, ottenendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$

Criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+1}{3^{n+1}+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^{n+1}}}{1+\frac{1}{3^{n+1}}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$$

$\Rightarrow$ la serie in z converge in $]-3,3[$

$\Rightarrow$ la serie in x converge in $|2x-1|<3$ cioè in $]-1,2[$

Per $x=-1$ si ottiene $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{3^n+1}$ che non converge perché

$\nexists \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{3^n+1}$

Per $x=2$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{3^n+1}$ che non converge perché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^n+1} = 1 \neq 0.$$

6) Sviluppare in serie di Taylor $f(x) = e^{1-x^2}$ con centro $x_0 = 0$

$$f(x) = e^{1-x^2} = e \cdot e^{-x^2}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{in } \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e}{n!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

7) Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Si dimostri che $\left(\int_a^b f(x)\,dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b (f(x))^2\,dx$

Suggerimento: si integri la funzione $\varphi(x,y) = (f(x)-f(y))^2$ su $R = [a,b] \times [a,b]$

$$\int_R \varphi(x,y) = \int_a^b \left(\int_a^b (f(x)-f(y))^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b [f(x)^2 - 2f(x)f(y) + f(y)^2]\,dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b f(x)^2 (b-a)\,dx - 2\int_a^b f(x) \left(\int_a^b f(y)\,dy \right) dx + \int_a^b \left(\int_a^b f(y)^2\,dy \right) dx$$

$$= (b-a)\int_a^b f(x)^2\,dx - 2\int_a^b f(y)\,dy\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(y)^2\,dy\,(b-a) =$$

$$= 2(b-a)\int_a^b f(x)^2\,dx - 2\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2 \geq 0 \quad \text{perché } \varphi(x,y) \geq 0$$

$$\Rightarrow (b-a)\int_a^b f(x)^2\,dx \geq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2$$

8) Si provi che i punti degli assi coordinati sono punti di minimo assoluto per la funzione $f(x,y) = \log(1+x^2y^2)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad 1 + x^2y^2 \geq 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

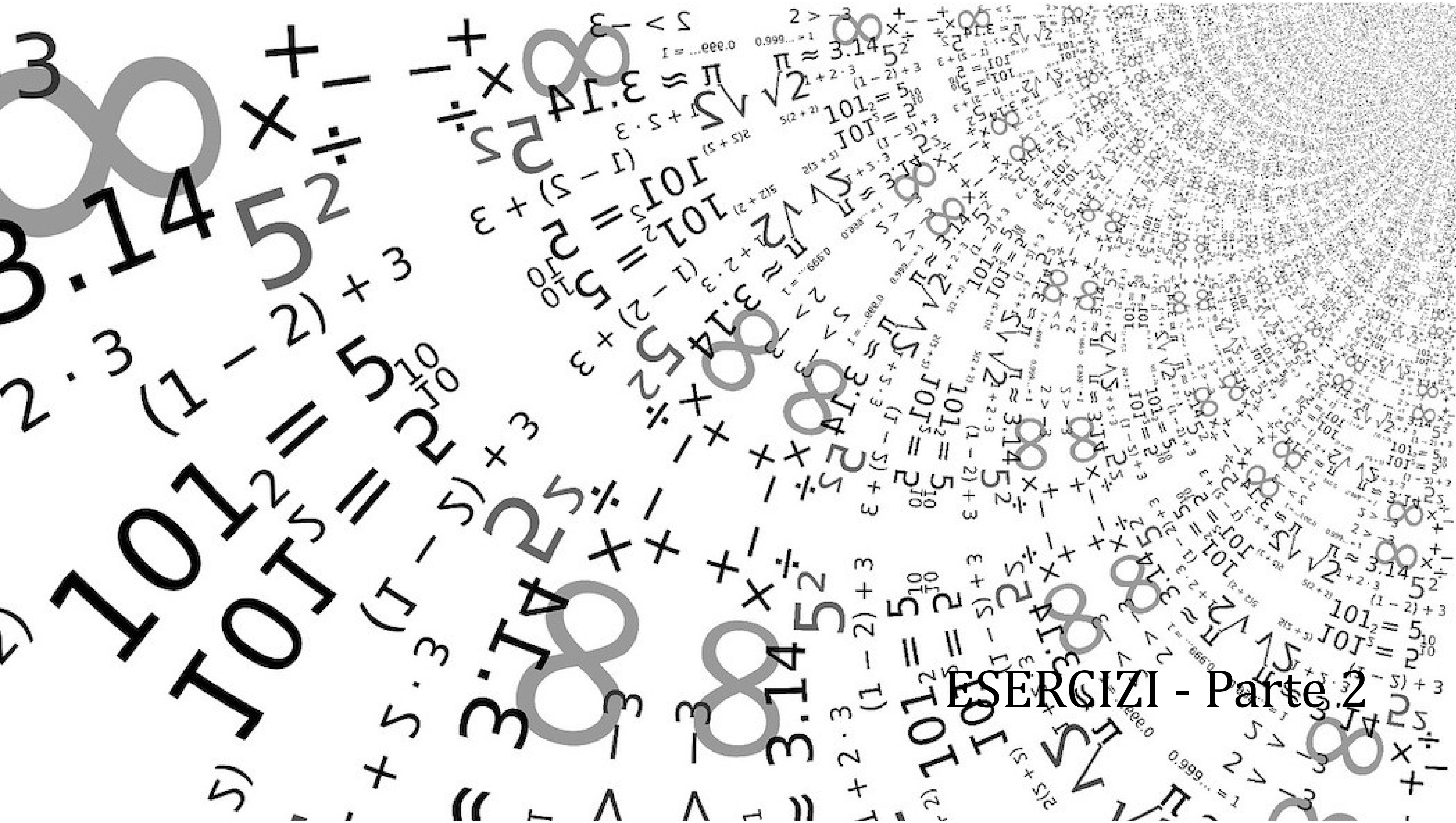
$$\Rightarrow f(x,y) = \log(1+x^2y^2) \geq \log 1 = 0 = f(x,0) = f(0,y)$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



ESERCIZI - Parte 2

9) Si dimostri che l'insieme $B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-x_0\|_2 < r\}$ è convesso

Bisogna dimostrare che $\forall x,y \in B(x_0,r)$ il segmento $[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\} \subseteq B(x_0,r)$

$x \in B(x_0,r) \iff \|x-x_0\|_2 < r$ $\qquad$ $y \in B(x_0,r) \iff \|y-x_0\|_2 < r$

$\Rightarrow$ preso $\lambda \in [0,1]$, $x \in B(x_0,r)$, $y \in B(x_0,r)$

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y - x_0\|_2 = \|\lambda x + (1-\lambda)y - \lambda x_0 - (1-\lambda)x_0\|_2 =$$

$$= \|\lambda(x-x_0) + (1-\lambda)(y-x_0)\| \le \|\lambda(x-x_0)\| + \|(1-\lambda)(y-x_0)\| =$$

$$= |\lambda|\,\|x-x_0\| + |1-\lambda|\,\|y-x_0\| = \lambda\|x-x_0\| + (1-\lambda)\|y-x_0\| < \lambda r + (1-\lambda)r = r$$

$\Rightarrow [x,y] \subseteq B(x_0,r) \quad \forall x,y \in B(x_0,r)$

10) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)}{n} \cdot \log(n)$

Innanzitutto $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = (-1)^n$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n} (-1)^n$ serie a segno alterno

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n)}{n} = 0$$

$$\frac{\log n}{n} \geq \frac{\log(n+1)}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)\log(n) \geq n \log(n+1)$$

$$\Leftrightarrow \log\left(n^{n+1}\right) \geq \log\left((n+1)^n\right) \Leftrightarrow n^{n+1} \geq (n+1)^n$$

$$\Leftrightarrow n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

che risulta definitivamente vera poichè

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ e $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\Rightarrow$ CONVERGE PER IL CRITERIO DI LEIBNIZ ln(n)/n >= ln(n+1)/(n+1) - Wol ✕ | plot (ln(x)/x) - (ln(x+1)/(x+1)) f ✕

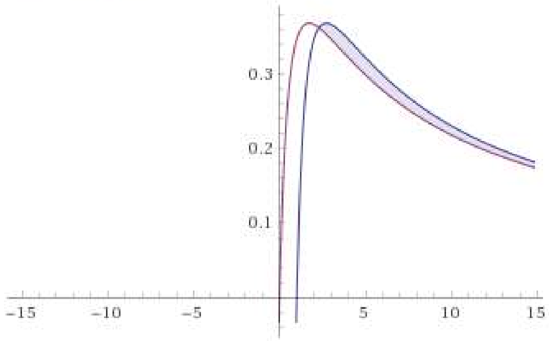
https://www.wolframalpha.com/input/?i=ln(n)%2Fn+>%3D+ln(n%2B1)%2F(n%2

Cerca

$$\frac{\log(n)}{n} \geq \frac{\log(n+1)}{n+1}$$

log(x) is the natural logarithm

Inequality plot:



Alternate form:

$$\frac{-n\log(n) - \log(n) + n\log(n+1)}{n(n+1)} \leq 0$$

Alternate form assuming n is positive:

$$(n+1)\log(n) \geq n\log(n+1)$$

Solution: Exact form | More digits

$$n \geq 2.29317$$

Enlarge | Data | Customize | Plain Text

Interval notation:

$$[2.29317, \infty)$$

Download Page

POWERED BY THE **WOLFRAM LANGUAGE**

Scrivi qui per eseguire la ricerca

ITA 21:14 23/04/2020

ln(n)/n >= ln(n+1)/(n+1) - Wol | plot (ln(x)/x) - (ln(x+1)/(x+1)) f

https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+(ln(x)%2Fx)+-+(ln(x%2B1)%2F(x%

WolframAlpha PRO FOR EDUCATORS

plot (ln(x)/x) - (ln(x+1)/(x+1)) for x from 0 to 20

Extended Keyboard   Upload   Examples   Random

Input interpretation:

plot	$\frac{\log(x)}{x} - \frac{\log(x+1)}{x+1}$	$x = 0$ to 20

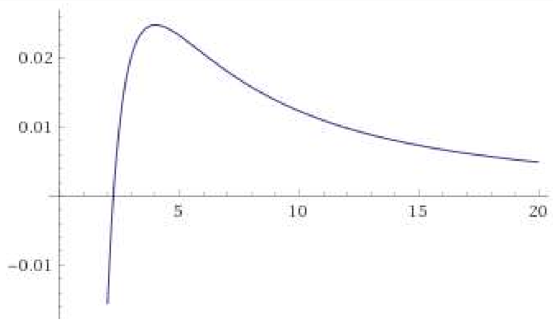
$\log(x)$ is the natural logarithm

Result:

Enlarge   Data   Customize   Plain Text

(arc length is infinite)

Plot:



Download Page

POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

Scrivi qui per eseguire la ricerca

ITA 21:15 23/04/2020

11) Determinare l'insieme di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n}$$

Poniamo $z = 1-x^2$ e otteniamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow R = 1$ e l'insieme di convergenza $[-1, 1[$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n}$ converge per $(1-x^2) \in [-1,1[$

cioè

$-1 \leq 1-x^2 < 1 \iff x \in [-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}]$

(che NON è un intervallo).

12) Sviluppare $f(x) = \dfrac{2x-8}{x^2-8x+12}$ in serie di Taylor centrata in 0. Calcolare $f^{(k)}(0)$ $\forall k$

$x^2-8x+12=0$ ha soluzioni $x_1=2$ e $x_2=6$

$\Rightarrow x^2-8x+12 = (x-2)\cdot(x-6)$

Inoltre $(x-2)+(x-6) = 2x-8$

$$\Rightarrow \frac{2x-8}{x^2-8x+12} = \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-6\left(1-\frac{x}{6}\right)} + \frac{1}{-2\left(1-\frac{x}{2}\right)}$$

Usiamo la serie geometrica ponendo $z=\frac{x}{6}$ e $z=\frac{x}{2}$ al posto di x in $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{6^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{6^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$$

Poiché nello sviluppo in serie di Taylor si ha

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k = -\frac{1}{6^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(0) = -\frac{k!}{6^{k+1}} - \frac{k!}{2^{k+1}}$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

ESERCIZI - Parte 3

a) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ $(n \geq 1)$ converge uniformemente ad una funzione f e si ha

$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$ se $x \neq 0$, ma l'uguaglianza non vale per $x=0$.

$$0 \leq \left(1-\sqrt{n}|x|\right)^2 = 1 - 2\sqrt{n}|x| + nx^2 \Rightarrow 1+nx^2 \geq 2\sqrt{n}|x| \Rightarrow \frac{1}{1+nx^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}|x|} \text{ se } x \neq 0$$

$$\Rightarrow \forall x \neq 0 \quad |f_n(x)| = \frac{|x|}{1+nx^2} \leq \frac{\cancel{|x|}^{\,1}}{2\sqrt{n}\cancel{|x|}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \text{ per } n \to +\infty$$

Se $x=0$ si ha $|f_n(0)| = 0 \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \sup_x |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow$ si ha convergenza uniforme: $\lim_{n\to+\infty} f_n = 0$

$$f_n'(x) = \left(\frac{x}{1+nx^2}\right)' = \frac{1+nx^2 - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

$f_n'(x) \longrightarrow 0 = f'(x)$ se $x \neq 0$, ma $f_n'(0) = 1 \not\to f'(0) = 0$

b) Si provi che $\exists \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \log(n)$

Siano $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ somma parziale della serie armonica e $f(n) = s_n - \log(n)$

Si ha $\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt = \log(n+1) - \log(n)$

$$\Rightarrow f(n+1) - f(n) = s_{n+1} - \log(n+1) - s_n + \log(n) = \frac{1}{n+1} - \left(\log(n+1) - \log(n)\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq 0$$

Infatti, per il teorema della media integrale, $\exists\ \overline{x} \in [n, n+1]$ tale che $\frac{1}{(n+1)-n} \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{\overline{x}} \geq \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow$ $f(n)$ è una successione decrescente

Inoltre $\log(n) = \int_1^n \frac{1}{t}\,dt < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} = s_{n-1} < s_n$

Infatti

$$\int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{j}\,dt = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}\left[(j+1)-j\right] = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} = s_{n-1}$$

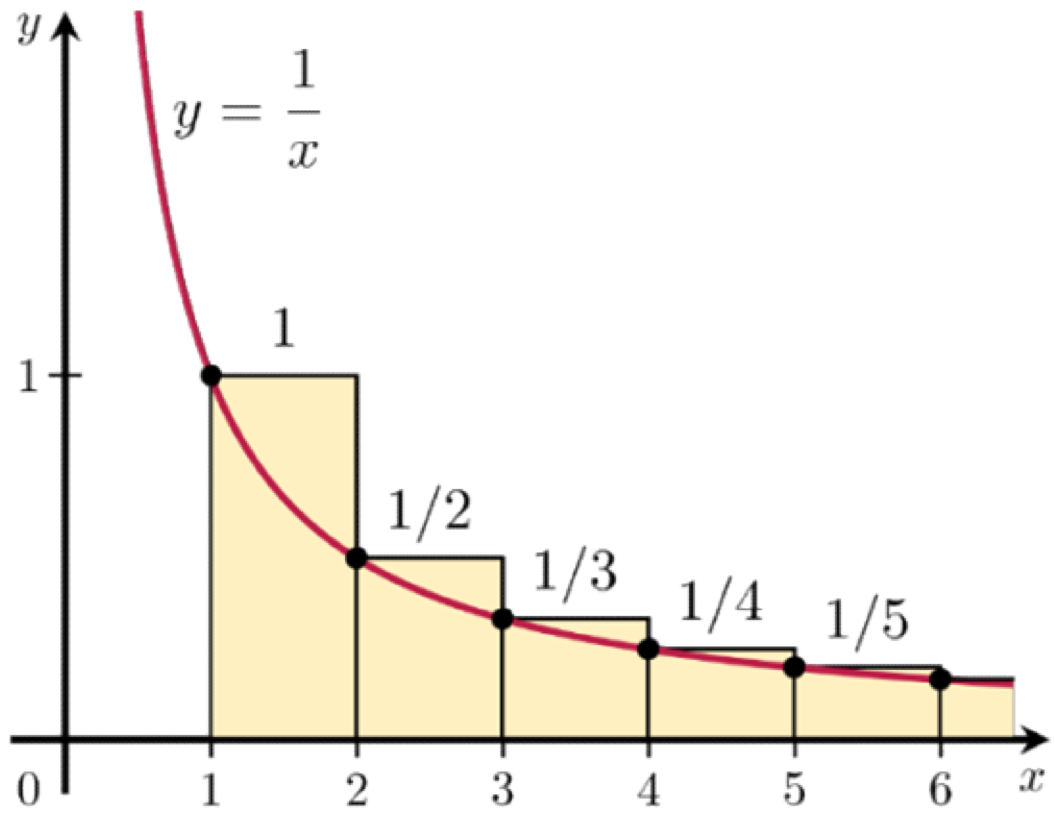
$\Rightarrow f(n) = s_n - \log(n) \geq 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} f(n) = \lim_{n \to +\infty} s_n - \log(n) = \gamma \geq 0$

$\gamma \simeq 0,57721\ldots$ è detta COSTANTE DI EULERO

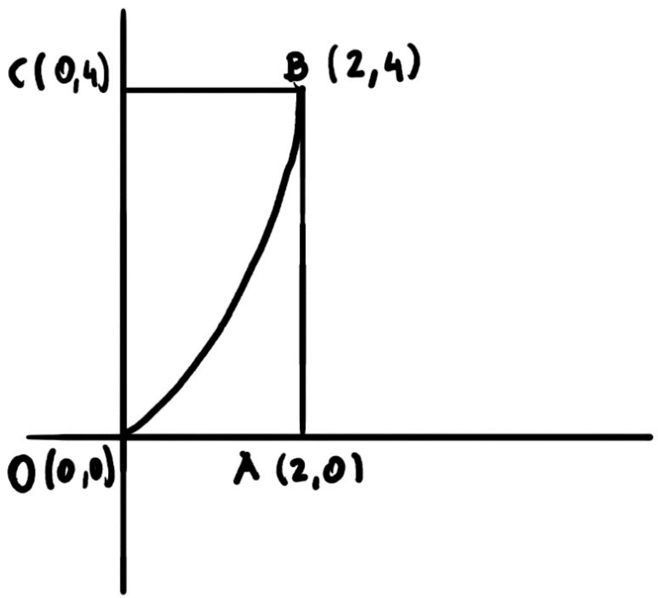
NON È NOTO SE $\gamma \in \mathbb{Q}$.

SE $\gamma \in \mathbb{Q}$, ALLORA IL SUO DENOMINATORE DEVE AVERE PIÙ DI 10^{242080} CIFRE.



y
$y = \frac{1}{x}$
1
1
1/2
1/3
1/4
1/5
0
1
2
3
4
5
6
x

c) Determinare i punti di max e min assoluti di $f(x,y) = |x^2 - y|$ nel rettangolo R di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,4)$, $(0,4)$.



$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y & \text{se } x^2 \geq y \\ y - x^2 & \text{se } x^2 \leq y \end{cases}$$

Punti di minimo assoluto:

$$f(x,y) = |x^2 - y| \geq 0 \quad e \quad f(x,y) = 0 \iff x^2 - y = 0$$

$\Rightarrow$ sono tutti i punti in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ y = x^2\}$

Punti di massimo assoluto:

R compatto, f continua su $R \Rightarrow$ ne esiste almeno uno

(Teorema di Weierstrass)

f è derivabile parzialmente in $D = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid x^2 - y = 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{se } x^2 > y \\ -2x & \text{se } x^2 < y \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -1 & \text{se } x^2 > y \\ 1 & \text{se } x^2 < y \end{cases}$$

$$\nabla f(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in D \implies \nexists \text{ punti critici in } \mathring{R}$$

Esaminiamo ora $\mathcal{F}r(R)$

1) $\overline{OA}$ $\quad y=0\,,\ 0\le x\le 2 \quad f(x,0)=x^2$

$$f(0,0)=0=\min_{\overline{OA}} f\ ,\quad f(2,0)=4=\max_{\overline{OA}} f$$

2) $\overline{AB}$ $\quad x=2\,,\ 0\le y\le 4 \quad f(2,y)=4-y$

$$f(2,4)=0=\min_{\overline{AB}} f\ ,\quad f(2,0)=4=\max_{\overline{AB}} f$$

3) $\overline{BC}$ $\quad 0\le x\le 2\,,\ y=4 \quad f(x,4)=-x^2+4$

$$f(2,4)=0=\min_{\overline{BC}} f\ ,\quad f(0,4)=4=\max_{\overline{BC}} f$$

4) $\overline{CO}$ $\quad x=0,\ 0\le y\le 4 \quad f(0,y)=y$

$$f(0,0)=0=\min_{\overline{CO}} f\ ,\quad f(0,4)=4=\max_{\overline{CO}} f$$

$\Rightarrow$ PUNTI DI MAX ASSOLUTO

$(2,0),\ (0,4)$

d) Si determini se $f(x,y) = x^3 - 12xy + 4y^3$ ha punti di minimo assoluto

Sia $\bar{y} \in \mathbb{R}$. $\lim_{x \to -\infty} f(x,\bar{y}) = \lim_{x \to -\infty} x^3 - 12x\bar{y} + 4\bar{y}^3 = -\infty$

$\Rightarrow \forall k > 0 \ \exists h > 0 : \ x < -h \Rightarrow f(x,\bar{y}) < -k$

$\Rightarrow$ f è illimitata inferiormente $\Rightarrow \nexists$ punti di minimo assoluto