

Esercizi su massimi e minimi locali

Determinare i punti di massimo locale, di minimo locale o di sella delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$
2. $f(x, y) = (x - 1)^2 - y^2$
3. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
4. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
5. $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$
6. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$
7. $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$
9. $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 + \log(1 + z^2)$
10. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2 - xy + z^2$

Soluzioni

Determinare i punti di massimo locale, di minimo locale o di sella delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$
Il gradiente di f è $\nabla f(x, y) = (2(x - 1), 2y)$, quindi $(1, 0)$ è l'unico punto stazionario. La matrice Hessiana di f nel punto stazionario è

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, quindi il punto stazionario è un punto di minimo locale.

2. $f(x, y) = (x - 1)^2 - y^2$ Il gradiente di f è $\nabla f(x, y) = (2(x - 1), -2y)$, quindi $(1, 0)$ è l'unico punto stazionario. La matrice Hessiana di f nel punto stazionario è

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che è indefinita, quindi il punto stazionario è un punto di sella.

3. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ Il gradiente di f è $\nabla f(x, y) = (2x + y - 2, x + 2y - 1)$, quindi $(1, 0)$ è l'unico punto stazionario. La matrice Hessiana di f nel punto stazionario è

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, quindi il punto stazionario è un punto di minimo locale.

4. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ Il gradiente di f è $\nabla f(x, y) = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 + 4x - 4y)$, quindi $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sono i tre punti stazionari. La matrice Hessiana di f in un generico punto di coordinate (x, y) è

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Nei punti $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ la matrice Hessiana è :

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, quindi i due punti stazionari sono punti di minimo locale.

Nel punto $(0, 0)$ la matrice Hessiana è :

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

che è semidefinita negativa, quindi l'analisi della matrice Hessiana non permette di dire nulla sulla natura del punto stazionario. Andiamo ad analizzare il segno della differenza $f(x, y) - f(0, 0)$ in un intorno di $(0, 0)$. Se, ad esempio consideriamo i punti (x, y) appartenenti all'asse delle x , ovvero i punti della forma $(x, 0)$, allora si ha che la differenza $f(x, y) - f(0, 0) = x^4 - 2x^2$ che assume valori negativi in un intorno di $x = 0$. Se invece consideriamo i punti (x, y) appartenenti alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, ovvero i punti della forma (x, x) , allora si ha che la differenza $f(x, y) - f(0, 0) = 4x^4$ assume valori positivi. Questo ci consente di concludere che $(0, 0)$ è un punto di sella, dato che in ogni intorno del punto stazionario $(0, 0)$ esistono sia punti (x, y) tali che $f(x, y) > f(0, 0)$ sia punti (x, y) tali che $f(x, y) < f(0, 0)$.

5. $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Notiamo che la funzione è definita nell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Il

gradiente è

$$\nabla f(x, y) = \left(y\sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, x\sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{xy^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

I punti in cui il gradiente si annulla, interni all'insieme di definizione della funzione, sono: $(0, 0)$, $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$. La matrice Hessiana $H_f(x, y)$ è :

$$\begin{pmatrix} -\frac{3xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{x^3y}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} & \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{x^2y^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \\ \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{x^2y^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} & -\frac{3xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{xy^3}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Nel punto stazionario $(0, 0)$ abbiamo:

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che è indefinita, quindi $(0, 0)$ è una sella.

In $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e in $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ la matrice Hessiana è definita negativa e quindi i due punti stazionari sono punti di massimo locale, mentre in $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e in $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ la matrice Hessiana è definita positiva e i due punti sono di minimo locale.

6. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$

Il vettore gradiente è $\nabla f(x, y) = (2x(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}, 2y(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)})$.

I punti stazionari sono dunque l'origine $(0, 0)$ e tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. La matrice Hessiana in $(0, 0)$ è :

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo locale. Nei punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ la matrice Hessiana è

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -4x^2 & -4xy \\ -4xy & -4y^2 \end{pmatrix}$$

che è semidefinita negativa. Andando a studiare il comportamento della funzione $\rho \mapsto \rho^2 e^{-\rho^2}$ nelle vicinanze del valore $\rho = 1$ possiamo concludere che $\rho = 1$ è un punto di massimo locale e quindi tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ sono punti di massimo locale per la funzione f .

7. $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

Il gradiente di f è $\nabla f(x, y) = (2xe^{x-y} + (x^2 - 2y^2)e^{x-y}, -4ye^{x-y} - (x^2 - 2y^2)e^{x-y})$, che si annulla nei punti $(0, 0)$ e $(-4, -2)$. La matrice Hessiana in $(0, 0)$ è

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

che è indefinita, quindi $(0, 0)$ è una sella. La matrice Hessiana in $(-4, -2)$ è

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -6e^{-2} & -8e^{-2} \\ -8e^{-2} & -12e^{-2} \end{pmatrix}$$

che è definita negativa, quindi $(-4, -2)$ è un massimo locale.

8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

Il vettore gradiente è $\nabla f(x, y, z) = (2x - y + 1, 2y - x, 2z - 2)$, che si annulla in $(-2/3, -1/3, 1)$. La matrice Hessiana è

$$H_f(-2/3, -1/3, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Applicando il criterio dei minori nord-ovest si vede che è definita positiva, quindi $(-2/3, -1/3, 1)$ è un punto di minimo locale.

9. $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 + \log(1 + z^2)$

La funzione ha un unico punto stazionario in $(1, 0, 0)$, che è un punto di minimo, in quanto la matrice Hessiana

$$H_f(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è definita positiva.

10. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2 - xy + z^2$

I punti stazionari sono $(0, 0, 0)$, $(1/2\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}, 0)$ e $(-1/2\sqrt{2}, -1/2\sqrt{2}, 0)$. La Matrice Hessiana in $(0, 0, 0)$ è

$$H_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è indefinita, quindi $(0,0,0)$ è un punto di sella. La matrice Hessiana nei punti $(1/2\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}, 0)$ e $(-1/2\sqrt{2}, -1/2\sqrt{2}, 0)$ è

$$H_f(1/2\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}, 0) = H_f(-1/2\sqrt{2}, -1/2\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

quindi tali punti sono di minimo locale.