UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dipartimento di scienze economiche, aziendali, matematiche e statistiche "Bruno de Finetti"

Statistica

Variabili aleatorie discrete

Francesco Pauli

A.A. 2016/2017

Variabile aleatoria

Definizione di variabile aleatoria

Una variabile aleatoria (o variabile casuale, brevemente v.a. o v.c.) è un numero ben determinato ma non noto per mancanza d'informazioni

Esempi, già incontrati e non

- La somma dei punti di due dadi.
- Il numero di teste su 3 lanci di moneta.
- Il numero di incidenti di un assicurato RC auto.
- Il ritardo con cui arriva un treno.
- Il peso di un neonato.
- Il prezzo futuro di un prodotto finanziario.

Variabile aleatoria

Definizione di variabile aleatoria

Una variabile aleatoria (o variabile casuale, brevemente v.a. o v.c.) è un numero ben determinato ma non noto per mancanza d'informazioni

Esempi, già incontrati e non	Un'importante distinzione
▶ La somma dei punti di due dadi.	DISCRETO
▶ Il numero di teste su 3 lanci di moneta.	DISCRETO
▶ Il numero di incidenti di un assicurato RC auto.	DISCRETO
▶ Il ritardo con cui arriva un treno.	CONTINUO
▶ Il peso di un neonato.	CONTINUO
▶ Il prezzo futuro di un prodotto finanziario.	CONTINUO

Variabile aleatoria

Definizione di variabile aleatoria

Una variabile aleatoria (o variabile casuale, brevemente v.a. o v.c.) è un numero ben determinato ma non noto per mancanza d'informazioni

Tratteremo separatamente i due casi:

- v.a. **discreta**, cioè che assume valori interi.
- v.a. **continua**, cioè che assume valori reali (eventualmente in un intervallo).

Indice

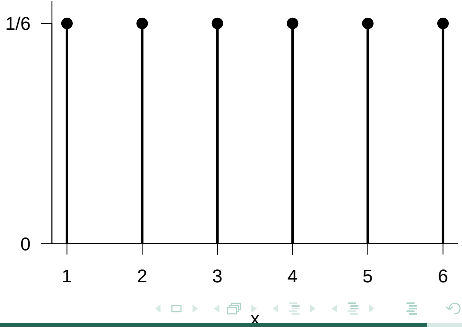
Distribuzione di probabilità per una v.a. discreta

Distribuzione di probabilità

La distribuzione di probabilità di una v.a. discreta è altro l'insieme dei possibili valori e delle probabilità di ciascuno.

Ad esempio per l'esito del lancio di un dado

Esito	Pr.
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6



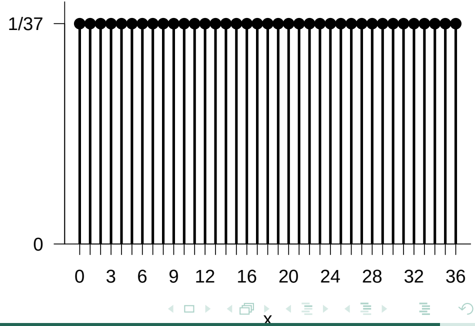
Distribuzione di probabilità per una v.a. discreta

Distribuzione di probabilità

La distribuzione di probabilità di una v.a. discreta è altro l'insieme dei possibili valori e delle probabilità di ciascuno.

Per l'esito di una mano di roulette

Esito	Pr.
0	1/37
1	1/37
2	1/37
⋮	⋮
34	1/37
35	1/37
36	1/37



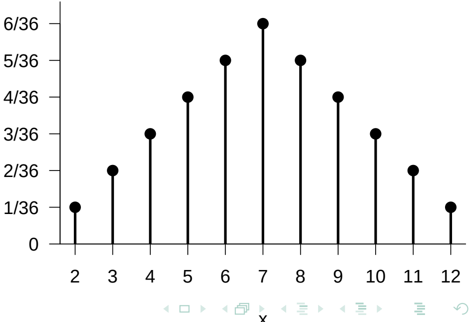
Distribuzione di probabilità per una v.a. discreta

Distribuzione di probabilità

La distribuzione di probabilità di una v.a. discreta è altro l'insieme dei possibili valori e delle probabilità di ciascuno.

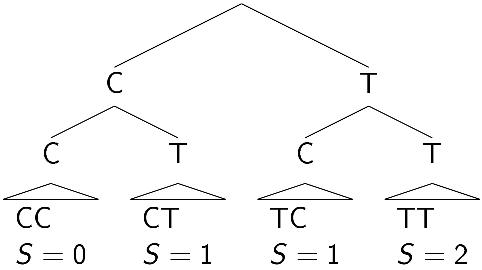
Per la somma di due dadi.

Esito	Pr.
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36



Numero di teste su due lanci di una moneta

- Consideriamo due lanci di una moneta, i cui esiti possibili sono T (testa) o C (croce);
- definiamo S = numero di teste su due lanci;
- S è una v.a. discreta con valori possibili $0, 1, 2$.
- Otteniamo la distribuzione di probabilità di S considerando i possibili esiti

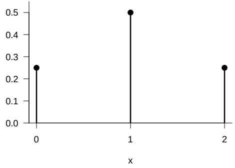


Numero di teste su due lanci di una moneta

- Consideriamo due lanci di una moneta, i cui esiti possibili sono T (testa) o C (croce);
- definiamo $S =$ numero di teste su due lanci;
- S è una v.a. discreta con valori possibili $0, 1, 2$.
- Otteniamo la distribuzione di probabilità di S considerando i possibili esiti

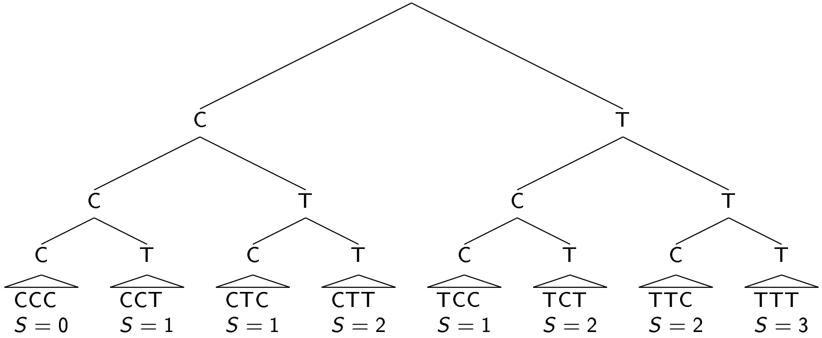
Esiti	Pr	S
CC	$1/4$	0
CT	$1/4$	1
TC	$1/4$	1
TT	$1/4$	2

S	Pr
0	$P(CC) = 1/4$
1	$P(CToTC) = 1/2$
2	$P(TT) = 1/4$



Numero di teste su tre lanci

Con tre lanci, S ha valori $0, 1, 2, 3$.

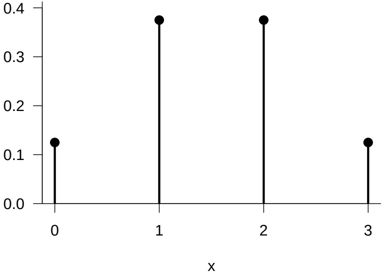


Numero di teste su tre lanci

Con tre lanci, S ha valori $0, 1, 2, 3$.

Esiti	Pr	S
CCC	$1/8$	0
CCT	$1/8$	1
CTC	$1/8$	1
TCC	$1/8$	1
CTT	$1/8$	2
TTC	$1/8$	2
TCT	$1/8$	2
TTT	$1/8$	3

S	Pr
0	$1/8$
1	$3/8$
2	$3/8$
3	$1/8$



Numero di teste su n lanci

S ha valori possibili $0, 1, 2, \ldots, n$.

Ci sono 2^n esiti possibili, del tipo

esito singolo	T	C	T	T	C	T	$\ldots$	T	C
lancio	1	2	3	4	5	6	...	$n-1$	n

Ciascun esito ha probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Per trovare $P(S = s)$ basta contare quanti ce ne sono con s teste, si trova che sono

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!(n-s)!}$$

Si ha allora

$$P(S = s) = \binom{n}{s} \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Numero di teste su n lanci

S ha valori possibili $0, 1, 2, \ldots, n$.

Ci sono 2^n esiti possibili, del tipo

esito singolo	T	C	T	T	C	T	$\ldots$	T	C
lancio	1	2	3	4	5	6	...	$n-1$	n
prob	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Ciascun esito ha probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Per trovare $P(S = s)$ basta contare quanti ce ne sono con s teste, si trova che sono

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!(n-s)!}$$

Si ha allora

$$P(S = s) = \binom{n}{s} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Parentesi: il coefficiente binomiale $\binom{n}{s}$

Con questo simbolo si indica **il numero di possibili sottoinsiemi di** s **elementi da un insieme di** n.

Ad esempio se l'insieme di $n = 5$ elementi è $\{a, b, c, d, e\}$ ha senso chiedersi quanti sono i sottoinsiemi di 0, 1, 2, 3, 4, 5 elementi, li si elenca nel seguito

Parentesi: il coefficiente binomiale $\binom{n}{s}$

Con questo simbolo si indica **il numero di possibili sottoinsiemi di** s **elementi da un insieme di** n.

Ad esempio se l'insieme di $n = 5$ elementi è $\{a, b, c, d, e\}$ ha senso chiedersi quanti sono i sottoinsiemi di 0, 1, 2, 3, 4, 5 elementi, li si elenca nel seguito

0	1	2	3	4	5
$\emptyset$	a	ab	abc	$abcd$	$abcde$
	b	ac	abd	$abce$	
	c	ad	abe	$abde$	
	d	ae	acd	$acde$	
	e	bc	ace	$bcde$	
		bd	ade		
		be	bcd		
		cd	bce		
		ce	bde		
		de	cde		
$\binom{5}{0} = 1$	$\binom{5}{1} = 5$	$\binom{5}{2} = 10$	$\binom{5}{3} = 10$	$\binom{5}{4} = 5$	$\binom{5}{5} = 1$

Parentesi: il coefficiente binomiale $\binom{n}{s}$

Con questo simbolo si indica **il numero di possibili sottoinsiemi di** s **elementi da un insieme di** n.

Ad esempio se l'insieme di $n = 5$ elementi è $\{a, b, c, d, e\}$ ha senso chiedersi quanti sono i sottoinsiemi di 0, 1, 2, 3, 4, 5 elementi, li si elenca nel seguito

- In generale è

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!(n-s)!}$$

  dove

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- Alcuni esempi
  - Il numero di coppie che si possono formare in un gruppo di 15 individui è $\binom{15}{2} = 105$.
  - Il numero di cinquine che possono essere estratte al lotto (su 90 numeri) è $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$

E se testa e croce non hanno la stessa probabilità?

Sia $P(T) = p$, quindi $P(C) = 1 - p$

Gli esiti possibili sono sempre 2^n

esito singolo	T	C	T	T	C	T	$\dots$	T	C
lancio	1	2	3	4	5	6	...	$n-1$	n

ma la probabilità **non è più uguale per tutti**, dipende da quante teste e quante croci ci sono

$$P(TCTT \dots TC) = p^{\#T}(1-p)^{n-\#T}$$

dove $\#T$ è il numero di teste.
Quindi le $\binom{n}{s}$ sequenze che hanno s teste hanno tutte probabilità $p^s(1-p)^{n-s}$, allora

$$P(S = s) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}.$$

E se testa e croce non hanno la stessa probabilità?

Sia $P(T) = p$, quindi $P(C) = 1 - p$

Gli esiti possibili sono sempre 2^n

esito singolo	T	C	T	T	C	T	$\dots$	T	C
lancio	1	2	3	4	5	6	...	$n-1$	n
prob	p	$1-p$	p	p	$1-p$	p	...	p	$1-p$

ma la probabilità **non è più uguale per tutti**, dipende da quante teste e quante croci ci sono

$$P(TCTT \dots TC) = p^{\#T}(1-p)^{n-\#T}$$

dove $\#T$ è il numero di teste.
Quindi le $\binom{n}{s}$ sequenze che hanno s teste hanno tutte probabilità $p^s(1-p)^{n-s}$, allora

$$P(S = s) = \binom{n}{s} p^s(1-p)^{n-s}.$$

Distribuzione binomiale

Distribuzione binomiale

Si dice che la variabile X ha **distribuzione binomiale** con dimensione $n \in \mathbb{N}$ e parametro $p \in [0, 1]$ se $X \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}.$$

Sinteticamente scriveremo

$$X \sim \text{Binom}(n, p)$$

X è il numero di successi in n prove indipendenti con probabilità di successo p.

Esempio: binomiale e roulette

Supponiamo di scommettere 10 volte su una quartina alla roulette, qual è la probabilità di vincere **esattamente** due volte?

Abbiamo visto che la probabilità di vincere in una singola giocata è $P(Q) = 4/37$.

Ripetiamo la giocata 10 volte, il numero di volte che vinco, X, è distribuito secondo una binomiale di dimensione $n = 10$ e probabilità $p = 4/37$

$$X \sim \text{Binom}(10, 4/37)$$

Per ottenere la probabilità cercata basta usare la formula

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \left(\frac{4}{37}\right)^2 \left(\frac{33}{37}\right)^8 \approx 0.21$$

Esempio: binomiale e roulette (2)

Supponiamo di scommettere 10 volte su una quartina alla roulette, qual è la probabilità di vincere **almeno** due volte?

In termini di X stiamo cercando $P(X \geq 2)$, cioè

$$P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{10} P(X = x) = \sum_{x=2}^{10} \binom{10}{v} \left(\frac{4}{37}\right)^{x} \left(\frac{33}{37}\right)^{10-x} \approx 0.29$$

Notiamo che possiamo ottenere lo stesso risultato più velocemente scrivendo

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left(\frac{33}{37}\right)^{10} - 10\left(\frac{4}{37}\right)^{1}\left(\frac{33}{37}\right)^{9} \end{aligned}$$

Applicazione della binomiale: vincere alla *roulette*

Ricordiamo che scommettendo sulla quartina si paga 1€ per giocare, si riceve 9€ in caso di vittoria.

Giochiamo 1000 volte, allora se X è il numero di volte che vinco,

$$X \sim \text{Binom}(1000, 4/37)$$

e il mio guadagno è

$$N = 9X - 1000$$

Chiediamoci ora qual è la probabilità, con 1000 scommesse, di uscire dal casinò con un saldo positivo.

Applicazione della binomiale: vincere alla *roulette*

Ricordiamo che scommettendo sulla quartina si paga 1€ per giocare, si riceve 9€ in caso di vittoria.

Giochiamo 1000 volte, allora se X è il numero di volte che vinco,

$$X \sim \text{Binom}(1000, 4/37)$$

e il mio guadagno è

$$N = 9X - 1000$$

Chiediamoci ora qual è la probabilità, con 1000 scommesse, di uscire dal casinò con un saldo positivo.

Il saldo è positivo ($N \geq 0$) se e solo se $X \geq 112$, allora la probabilità è

$$P(N \geq 0) = P(X \geq 112) = \sum_{x=112}^{1000} \binom{1000}{x} \left(\frac{4}{37}\right)^x \left(1 - \frac{4}{37}\right)^{1000-x} \approx 0.36$$

Applicazione della binomiale: *overbooking*

Una piccola compagnia aerea accetta prenotazioni per un aereo con 20 posti, e sa che, delle persone che prenotano un viaggio, il 10% non si presenta.

(1) Si dica qual è la probabilità che l'aereo viaggi pieno se ci sono state 20 prenotazioni.

La compagnia accetta più di 20 prenotazioni (cosiddetto *overbooking*), sperando che non si presentino più di 20 persone.

(2) Si dica qual è la probabilità che qualche passeggero che ha prenotato resti a terra se sono state accettate 22 prenotazioni.

(3) Si dica quante prenotazioni si possono accettare se si vuole che la probabilità che un passeggero resti a terra sia al di sotto del 15%.

Applicazione della binomiale: *overbooking* (1)

(1) Si dica qual è la probabilità che l'aereo viaggi pieno se ci sono state 20 prenotazioni.

Se con X indichiamo il numero di passeggeri che si presenta, e ci sono state 20 prenotazioni, si ha

$$X \sim \text{Binom}(20, 0.9)$$

L'aereo viaggia pieno se $X = 20$,

$$P(X = 20) = 0.9^{20} = 0.1216$$

Applicazione binomiale: *overbooking* (2)

(2) Si dica qual è la probabilità che qualche passeggero che ha prenotato resti a terra se sono state accettate 22 prenotazioni.

Se con X indichiamo il numero di passeggeri che si presenta, e ci sono state 22 prenotazioni, si ha

$$X \sim \text{Binom}(22, 0.9)$$

Non ci sono passeggeri che rimangono a terra se $X \leq 20$ e si ha

$$\begin{aligned} P(X \leq 20) &= 1 - P(X > 20) = 1 - P(X = 21) - P(X = 22) \\ &= 1 - \binom{22}{21} 0.1 \times 0.9^{21} - 0.9^{22} \\ &= 0.6608 \end{aligned}$$

La probabilità cercata è quindi $1 - 0.6608 = 0.3392$.

Applicazione binomiale: *overbooking* (3)

(3) Si dica quante prenotazioni si possono accettare se si vuole che la probabilità che un passeggero resti a terra sia al di sotto del 15%.

Con 22 prenotazioni non funziona, possiamo provare con 21, nel qual caso

$$X \sim \text{Binom}(21, 0.9)$$

Qui qualcuno rimane a terra solo se $X = 21$, quindi la probabilità cercata è

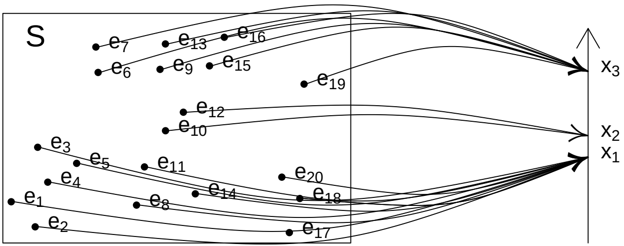
$$P(X = 21) = 0.9^{21} = 0.1095$$

inferiore alla soglia indicata.

Se la compagnia accetta 21 prenotazioni, la probabilità che qualcuno resti a terra è circa l'11%.

Indice

Definizione di variabile aleatoria

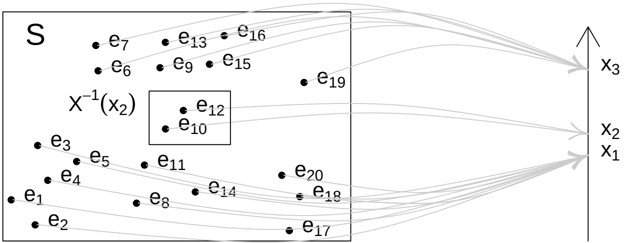


Dato uno spazio di eventi S una variabile aleatoria è una **funzione da S a $\mathbb{R}$**

$$X : S \to \mathbb{R}$$

- a ogni elemento dello spazio S è associato un valore
- (più eventi diversi possono essere associati allo stesso valore.)

Definizione di variabile aleatoria



Le probabilità associate ai diversi valori di X si ottengono come probabilità delle controimmagini in S di tali valori

$$X^{-1}(x) = \{e_i \in S : X(e_i) = x\}$$

$$P(X = x) = P(X^{-1}(x)) = P(\{e_i \in S : X(e_i) = x\})$$

(Cioè non definiamo niente di nuovo rispetto alla probabilità come definita per lgi eventi.)

Funzione di probabilità di una v.a. finita

Funzione di probabilità 1

Sia X una v.a. con valori possibili $x_1, \ldots, x_n$, per assegnare una distribuzione di probabilità a X si assegnano

$$P(X = x_i) = p(x_i)$$

in modo che

(i) $p(x_i) \geq 0$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

Si osservi che questo è coerente con la definizione data nel lucido precedente.

Funzione di probabilità di una v.a. discreta

Se la variabile ha un **infinità numerabile** di possibili valori, lo schema è il medesimo, ma

- devo assegnare infinite probabilità
- la condizione per cui sommano a uno diventa la condizione per cui la serie converge a uno.

Funzione di probabilità 2

Sia X una v.a. con valori possibili $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, per assegnare una distribuzione di probabilità a X si assegnano

$$P(X = x_i) = p(x_i)$$

in modo che

(i) $p(x_i) \geq 0$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

Funzione di ripartizione di una v.a. discreta

Funzione di ripartizione

Sia X una v.a. con valori possibili $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ e funzione di probabilità $p(x)$, si definisce **funzione di ripartizione** di X la funzione

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i:x_i \leq x} p(x_i)$$

Si noti che la funzione di ripartizione soddisfa alle seguenti proprietà

- $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- $F(x)$ è non decrescente;
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Esempio: binomiale

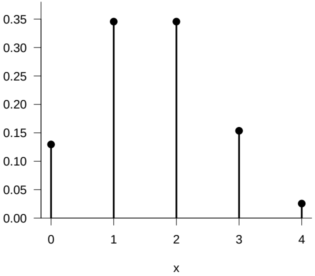
Consideriamo una v.a. X con distribuzione binomiale con $n = 4$ e $p = 0.4$, allora

$$X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

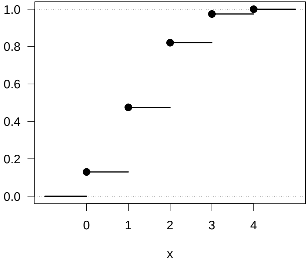
$$P(X = x_i) = \binom{4}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{4-x_i}$$

x	pr
0	0.12960
1	0.34560
2	0.34560
3	0.15360
4	0.02560

Funz. probabilità



Funz. ripartizione



Indice

Speranza matematica (o valore atteso o media) di una v.a. discreta

Speranza matematica (o valore atteso o media)

Si definisce speranza matematica della v.a. X con distribuzione $p(x)$ la quantità

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Più in generale, possiamo calcolare

$$E(h(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i) p(x_i)$$

Varianza di una v.a. discreta

Varianza

Si definisce varianza della v.a. X con distribuzione $p(x)$ la quantità

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

che è come dire

$$V(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p(x_i)$$

Si mostra che

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Esempio: binomiale

Si mostra che, se X è binomiale con dimensione n e probabilità p, cioè

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

allora

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

Si può dimostrare direttamente, sarà più facile farlo dopo, usando altri risultati.

Trasformazioni di v.a.

Essendo numeri, possiamo fare operazioni aritmetiche sulle v.a., ad esempio a partire da una v.a. X possiamo definire una nuova v.a. trasformando linearmente X

$$Y = aX + b$$

La distribuzione di Y è determinata da quella di X, se $\{x_i\}$ sono i valori possibili di X, quelli di Y sono $\{ax_i + b\}$ e

$$P(Y = ax_i + b) = P(X = x_i)$$

Inoltre, si mostra facilmente che

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Dimostrazioni

Si ha

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_{i=1}^{\infty}(ax_i+b)p(x_i) \\ &= a\sum_{i=1}^{\infty}x_i p(x_i)+\sum_{i=1}^{\infty}bp(x_i) \\ &= aE(X)+b \end{aligned}$$

$$V(aX+b)=E((aX+b-(aE(X)+b))^2)=a^2E((X-E(X))^2)=a^2V(X)$$

e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X-E(X))^2) \\ &= E(X^2-2XE(X)+E(X)^2) \\ &= E(X^2)-2E(X)E(X)-E(X)^2) \\ &= E(X^2)-[E(X)]^2 \end{aligned}$$

Media e gioco della roulette

Il famoso saldo netto

$$N = 9V - 1000$$

dove V è il numero di vittorie su 1000 scommesse, è una variabile aleatoria, $V \sim \text{Binom}(1000, P(Q))$, con $P(Q) = 4/37$.
Quindi la media di V è $E(V) = 1000 \times 4/37 = 108$ e

$$E(N) = 9E(V) - 1000 = -28$$

Insomma quello che abbiamo calcolato per valutare la convenienza non è altro che la media della v.a.

Gioco equo

Si dice che un gioco che porta al guadagno (aleatorio) G è equo se

$$E(G) = 0$$

cioè i giochi equi sono quelli in cui in media non si perde né si vince.

Esempi di giochi

Si dica se sono equi i seguenti giochi

(1) Testa o croce: vinco 1 se esce testa, perdo 1 se esce croce.
(2) Pago 3 per giocare, vinco il risultato del lancio di un dado.
(3) Pago 1 per giocare, vinco 1.8 se esce pari al lancio di un dado.
(4) Si lancia un dado, perdo il numero uscito se è pari, vinco il numero uscito se è dispari.

Una particolare trasformazione lineare: standardizzazione

Data una v.a. X con media $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = V(X)$, la **standardizzazione** è la trasformazione

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

LA variabile Z ha media nulla e varianza unitaria

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{V(X)}{\sigma^2} = 1$$

Trasformazioni non lineari di v.a.

Possiamo considerare anche trasformazioni più generali e definire, data una v.a. X, la v.a.

$$Y = h(X)$$

La distribuzione di Y è sempre determinata da quella di X, si vedano gli esempi poi, va tenuto presente che, in generale

$$E(h(X)) \neq h(E(X))$$

$$V(h(X)) \neq h(V(X))$$

Esempio di trasformazione non lineare

Si consideri la v.a. X la cui funzione di probabilità è espressa in tabella e si ricavino le funzioni di probabilità di

$$Y = |X|, \quad W = X^3$$

Si ottengano poi speranza matematica e varianza di X, Y e V

x_i	p_i
-3	0.1
-1	0.1
0	0.2
1	0.2
3	0.4

Esempio di trasformazione non lineare

Si consideri la v.a. X la cui funzione di probabilità è espressa in tabella e si ricavino le funzioni di probabilità di

$$Y = |X|, \quad W = X^3$$

Si ottengano poi speranza matematica e varianza di X, Y e V

x_i	p_i
-3	0.1
-1	0.1
0	0.2
1	0.2
3	0.4

y_i	p_i
0	0.2
1	0.3
3	0.5

w_i	p_i
-27	0.1
-1	0.1
0	0.2
1	0.2
27	0.4

$$E(X) = 1$$
$$V(X) = 3.8$$
$$E(Y) = 1.8$$
$$V(Y) = 1.56$$
$$E(W) = 8.2$$
$$V(W) = 297.6$$

Indice

Distribuzione di Poisson

Una variabile $X \in \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ è distribuita secondo una Poisson di parametro λ se e solo se

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Qui sono possibili (hanno probabilità positiva) infiniti valori.
Si noti che

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = 1$$

dove $\sum_{x=0}^{\infty}$ indica una serie.

Poisson: media e varianza

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

$$
E(X^2) = \lambda + \lambda^2
$$

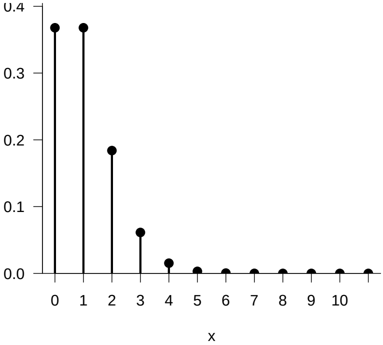
da cui

$$
V(X) = \lambda
$$

Distribuzioni di Poisson

x	pr
0	0.36788
1	0.36788
2	0.18394
3	0.06131
4	0.01533
5	0.00307
6	0.00051
7	0.00007
8	0.00001
9	0.00000
10	0.00000
> 10	0.00000

$\lambda = 1$



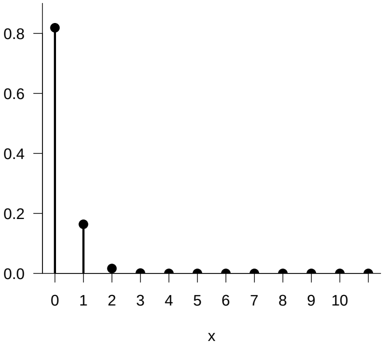
$$E(X) = 1$$

$$V(X) = 1$$

Distribuzioni di Poisson

x	pr
0	0.81873
1	0.16375
2	0.01637
3	0.00109
4	0.00005
5	0.00000
6	0.00000
7	0.00000
8	0.00000
9	0.00000
10	0.00000
> 10	0.00000

$\lambda = 0.2$



$$E(X) = 0.2$$

$$V(X) = 0.2$$

Esempio: Poisson

Una squadra di calcio segna un numero di goal a partita che si ritiene distribuito secondo una Poisson e mediamente segna 1.5 goal a partita.

(1) Si dica qual è la probabilità che nella prossima partita la squadra non segni goal.

(2) Si dica qual è la probabilità che nella prossima partita la squadra segni più di 4 goal.

Esempio: Poisson

Una squadra di calcio segna un numero di goal a partita che si ritiene distribuito secondo una Poisson e mediamente segna 1.5 goal a partita.

(1) Si dica qual è la probabilità che nella prossima partita la squadra non segni goal.

(2) Si dica qual è la probabilità che nella prossima partita la squadra segni più di 4 goal.

Il numero di goal è distribuito secondo una Poisson con parametro $\lambda = 1.5$ (perché la media è uguale al parametro), quindi

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = 0.1653$$

Esempio: Poisson

Una squadra di calcio segna un numero di goal a partita che si ritiene distribuito secondo una Poisson e mediamente segna 1.5 goal a partita.

(1) Si dica qual è la probabilità che nella prossima partita la squadra non segni goal.

(2) Si dica qual è la probabilità che nella prossima partita la squadra segni più di 4 goal.

$$
\begin{aligned}
P(X>4) &= P\left(\bigcup_{i=5}^{+\infty}(X=i)\right) = \sum_{i=5}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = \ldots \\
&= P\left(\overline{\bigcup_{i=0}^{4}(X=i)}\right) = 1-\sum_{i=0}^{4}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = 1-0.9814 = 0.01858
\end{aligned}
$$

Esempio: ancora la moneta

Consideriamo sempre i tre lanci della moneta, definiamo però la v.a.

$$M = \#\text{ di teste prima della prima croce}$$

Esiti	Pr	M
CCC	1/8	0
CCT	1/8	0
CTC	1/8	0
TCC	1/8	1
CTT	1/8	0
TTC	1/8	2
TCT	1/8	1
TTT	1/8	3

M	Pr
0	4/8
1	2/8
2	1/8
3	1/8

Distribuzione geometrica

In una serie di prove ripetute $E_1, E_2, \ldots$ (eventi equiprobabili, $P(E_i) = p$), il numero X di prove necessarie per osservare il primo successo segue una distribuzione **geometrica**.

I valori possibili sono gli interi positivi $\{1, 2, 3, \ldots,\}$

Eventi	x	$P(X = x)$
E_1	1	p
$\bar{E}_1 E_2$	2	$p(1-p)$
$\bar{E}_1 \bar{E}_2 E_3$	3	$p(1-p)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{E}_1 \bar{E}_2 \ldots \bar{E}_{k-1} E_k$	k	$p(1-p)^{k-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = 1$$

e si ha la FdR

$$F(x) = 1 - (1-p)^x$$

Ricordando che $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

Esempio: estrazioni con e senza rimpiazzo

Estraiamo una carta da un mazzo di 52, la probabilità che sia di cuori è $13/52 = 1/4$.

Se ripetiamo l'estrazione n volte **reimmettendo** sempre la carta estratta nel mazzo prima di procedere all'estrazione successiva, la v.a. X numero di cuori estratti su n è

$$X \sim \text{Binom}(n, 1/4)$$

Se ripetiamo l'estrazione **senza reimmettere** la carta estratta nel mazzo la distribuzione non è più binomiale ma ipergeometrica, purchè $n < 13$

$$P(X = x) = \frac{\binom{13}{x}\binom{52-13}{10-x}}{\binom{52}{13}}$$

Questo perché le estrazioni non sono indipendenti.

Distribuzione ipergeometrica

Da un insieme di N oggetti [un'urna con N palline] di cui H posseggono una determinata caratteristica [H palline sono rosse], si estragano n palline senza rimpiazzo (in blocco), detto

$$X = \text{“\#oggetti tipo-h sugli } n \text{ estratti''}$$

[$X = \#$palline rosse estratte] si ha

$$P(X = x) = \frac{\binom{H}{x}\binom{N-H}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

se x è un intero e

- $x \geq \max(0,\ n + H - N)$
- $x \leq \min n, H$

altrimenti la probabilità è 0.

Binomiale e ipergeometrica, un'osservazione

Il motivo per cui la binomiale non va bene è che le oservazioni non sono indipendenti, indicando con R_i l'evento per cui l'i-ma pallina estratta è rossa si ha, se l'estrazione è con rimpiazzo

$$P(R_2|R_1) = P(R_2|\bar{R}_1) = \frac{H}{N}$$

se l'estrazione è senza rimpiazzo

$$P(R_2|R_1) = \frac{H-1}{N-1} \neq P(R_2|\bar{R}_1) = \frac{H}{N-1}$$

Intuitivamente però, se N e H sono molto grandi queste differenze sono piccole.

L'intuizione sopra può essere precisata meglio (non lo facciamo), basti sapere che **se N e H sono grandi rispetto a n allora X è approssimativamente una binomiale anche se le estrazioni sono fatte senza rimpiazzo.**

Indice

Esempio: lanci di moneta

Con riferimento ai tre lanci di una moneta abbiamo considerato, separatamente, le due v.a.

$$S = \# \text{ di teste (totale)}$$

$$M = \# \text{ di teste prima della prima croce}$$

Esiti	Pr	S	M
CCC	1/8	0	0
CCT	1/8	1	0
CTC	1/8	1	0
TCC	1/8	1	1
CTT	1/8	2	0
TTC	1/8	2	2
TCT	1/8	2	1
TTT	1/8	3	3

S	Pr
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

M	Pr
0	4/8
1	2/8
2	1/8
3	1/8

Vogliamo ora guardarle **congiuntamente**, cioè consideriamo eventi del tipo

$$(S = s) \cap (M = m)$$

Esempio: lanci di moneta

Con riferimento ai tre lanci di una moneta abbiamo considerato, separatamente, le due v.a.

$$S = \# \text{ di teste (totale)}$$

$$M = \# \text{ di teste prima della prima croce}$$

Esiti	Pr	S	M
CCC	1/8	0	0
CCT	1/8	1	0
CTC	1/8	1	0
TCC	1/8	1	1
CTT	1/8	2	0
TTC	1/8	2	2
TCT	1/8	2	1
TTT	1/8	3	3

		S			
		0	1	2	3
M	0	CCC	CCT CTC	CTT	-
	1	-	TCC	TCT	-
	2	-	-	TTC	-
	3	-	-	-	TTT

Vogliamo ora guardarle **congiuntamente**, cioè consideriamo eventi del tipo

$$(S = s) \cap (M = m)$$

Esempio: lanci di moneta

Con riferimento ai tre lanci di una moneta abbiamo considerato, separatamente, le due v.a.

$$S = \# \text{ di teste (totale)}$$

$$M = \# \text{ di teste prima della prima croce}$$

Esiti	Pr	S	M
CCC	1/8	0	0
CCT	1/8	1	0
CTC	1/8	1	0
TCC	1/8	1	1
CTT	1/8	2	0
TTC	1/8	2	2
TCT	1/8	2	1
TTT	1/8	3	3

		S			
		0	1	2	3
M	0	1/8	2/8	1/8	0
	1	0	1/8	1/8	0
	2	0	0	1/8	0
	3	0	0	0	1/8

Vogliamo ora guardarle **congiuntamente**, cioè consideriamo eventi del tipo

$$(S = s) \cap (M = m)$$

Funzione di probabilità congiunta

La tabella che contiene tutte le probabilità congiunte è la funzione di probabilità congiunta della coppia (M, S), cioè la funzione

$$p(m, s) = P((M = m) \cap (S = s))$$

Le probabilità si possono ricavare facendo riferimento alle controimmagini (come in sostanza abbiamo fatto sopra).

		S				
		0	1	2	3	
M	0	1/8	2/8	1/8	0	4/8
	1	0	1/8	1/8	0	2/8
	2	0	0	1/8	0	1/8
	3	0	0	0	1/8	1/8
		1/8	3/8	3/8	1/8	1

Distribuzioni condizionate $M|S = s$

Possiamo anche considerare le probabilità condizionate

$$p_{M|S}(m|s) = P((M = m)|(S = s))$$

		S				
		0	1	2	3	
M	0	1	2/3	1/3	0	-
	1	0	1/3	1/3	0	-
	2	0	0	1/3	0	-
	3	0	0	0	1	-
		1	1	1	1	-

Ciascuna colonna è una funzione di probabilità condizionata.

Distribuzioni condizionate $S|M = m$

Possiamo anche considerare le probabilità condizionate

$$p_{S|M}(s|m) = P((S = s)|(M = m))$$

		S				
		0	1	2	3	
M	0	1/4	1/2	1/4	0	1
	1	0	1/2	1/2	0	1
	2	0	0	1	0	1
	3	0	0	0	1	1
		-	-	-	-	-

Ciascuna riga è una funzione di probabilità condizionata.

Funzione di probabilità congiunta

Funzione di probabilità congiunta

Date due v.a. X e Y con valori $\{x_1, \ldots\}$ e $\{y_1, \ldots\}$ si definisce funzione di probabilità congiunta

$$p(x_i, y_j) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

La funzione di probabilità congiunta soddisfa alle proprietà

- $p(x_i, y_j) \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$

Da essa si ricavano le funzioni di probabilità delle singole variabili come

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j)$$

Funzione di probabilità condizionata

Funzione di probabilità condizionata

Date due v.a. X e Y con valori $\{x_1, \ldots\}$ e $\{y_1, \ldots\}$ e funzione di probabilità congiunta $p(x_i, y_j)$, detta $p_X(x_i)$ la funzione di probabilità marginale di X, si dice **distribuzione condizionata di Y dato X** la

$$p_{Y|X=x_i}(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p_X(x_i)}$$

Si noti che è la "solita" probabilità condizionata

$$p_{Y|X=x_i}(y_j|x_i) = P(Y = y_j|X = x_i) = \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{P(X = x_i)} = \frac{p(x_i, y_j)}{p_X(x_i)}$$

Funzione di probabilità condizionata

Funzione di probabilità condizionata

Date due v.a. X e Y con valori $\{x_1, \ldots\}$ e $\{y_1, \ldots\}$ e funzione di probabilità congiunta $p(x_i, y_j)$, detta $p_X(x_i)$ la funzione di probabilità marginale di X, si dice **distribuzione condizionata di** Y **dato** X la

$$p_{Y|X=x_i}(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p_X(x_i)}$$

Analogamente si definisce

$$p_{X|Y=y_j}(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}$$

Speranza matematica congiunta

Speranza matematica congiunta

Date due v.a. X e Y con valori $\{x_1, \ldots\}$ e $\{y_1, \ldots\}$ e funzione di probabilità congiunta $p(x, y)$ si definisce

$$E(h(X,Y)) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} h(x_i, y_j) p(x_i, y_j)$$

In particolare, ad esempio, si definisce la covarianza

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i - E(X))(y_j - E(Y)) p(x_i, y_j) \end{aligned}$$

Covarianza, proprietà

Qualunque siano X e Y v.a.

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X,Y) &= E((X-E(X))(Y-E(Y))) \\
&= E(XY - E(X)Y - YE(X) - E(X)E(Y)) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y)) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

Covarianza, proprietà

Qualunque siano X e Y v.a. e a, b, c, d numeri reali

$$\mathrm{cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{cov}(X, Y)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(aX + b, cY + d) &= E((aX + b - aE(X) - b)(cY + d - cE(Y) - d)) \\
&= E((aX - aE(X))(cY - cE(Y))) \\
&= E(a(X - E(X))c(Y - E(Y))) \\
&= acE((X - E(X))(Y - E(Y)))
\end{aligned}$$

Esempio

Si lanciano due dadi con facce numerate da 1 a 6 e si considerano le v.a.

$M =$ massimo dei due dadi

$S =$ somma dei due dadi

Si ricavino

1. La funzione di probabilità congiunta.
2. $P((M \leq 2))$
3. $P((M \leq 2) \cap (S \leq 4))$
4. La funzione di probabilità di S condizionata a $M = 5$
5. La funzione di probabilità di M condizionata a $S = 6$
6. La covarianza tra M e S

Esempio

Si lanciano due dadi, uno rosso e uno verde, con facce numerate da 1 a 6 e si considerano le v.a.

$R =$ esito del dado rosso

$V =$ esito del dado verde

Si ricavino

1. La funzione di probabilità congiunta.
2. La funzione di probabilità di R condizionata a $V = 5$
3. La funzione di probabilità di V condizionata a $R = 6$
4. La covarianza tra R e V

Indipendenza tra v.a.

Indipendenza

Le due variabili X e Y si dicono indipendenti se

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

qualunque siano i e j.

In altre parole, diciamo che le v.a. X e Y sono indipendenti se tutte le coppie di eventi $(X = x_i)$ e $(Y = y_j)$ sono indipendenti, la formula sopra infatti è

$$p(x_i, y_j) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

(si rivedano le definizioni di funzioni di probabilità condizionate.)

Indipendenza tra v.a.

Indipendenza

Le due variabili X e Y si dicono indipendenti se

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

qualunque siano i e j.

Si noti che questo significa che

$$p_{X|Y}(x_i|y_j) = p_X(x_i)$$

e

$$p_{Y|X}(y_j|x_i) = p_Y(y_j)$$

(si rivedano le definizioni di funzioni di probabilità condizionate.)

Indipendenza tra v.a.

Indipendenza

Le due variabili X e Y si dicono indipendenti se

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

qualunque siano i e j.

Si noti che questo significa che

$$p_{X|Y}(x_i|y_j) = p_X(x_i) \quad [P(X = x_i|Y = y_j) = P(X = x_i)]$$

e

$$p_{Y|X}(y_j|x_i) = p_Y(y_j) \quad [P(Y = y_j|X = x_i) = P(Y = y_i)]$$

(si rivedano le definizioni di funzioni di probabilità condizionate.)

Indice

Funzioni di più variabili aleatorie

Come abiamo costruito, a partire da una singola v.a. X, una nuova v.a. via una trasformazione del tipo $Y = h(X)$, così si può fare con più variabili aleatorie con trasformazioni del tipo

$$S = h(X, Y)$$

Due esempi già visti sono

- M pari al minimo tra due dadi
- S pari alla somma di due dadi

Non approfondiamo il discorso generale ma solo il caso particolare della somma.

Combinazione lineare di v.a.

Date le v.a. $X_1, \ldots, X_n$ e i numeri reali $a_1, \ldots, a_n$, definiamo la v.a.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

Salvo casi particolari, non è semplice ottenere la distribuzione di probabilità di Y, si ha però che

(1) $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$

(2) $V(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i<j} \text{cov}(X_i, X_j)$

(3) se le X_i sono indipendenti

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i)$$

Dimostrazione di (1) nel caso di due variabili

Sia (X, V) v.a. con valori possibili $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_k\}$, distribuita congiuntamente secondo $p(x, v)$

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= E(X+V) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_i + v_j)p(x_i, v_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_i p(x_i, v_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} v_j p(x_i, v_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{k} p(x_i, v_j) + \sum_{j=1}^{k} v_j \sum_{i=1}^{n} p(x_i, v_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i p_X(x_i) + \sum_{j=1}^{k} v_j p_V(v_j) = E(X) + E(V)
\end{aligned}
$$

Binomiale = somma di variabili indicatrici

Se consideriamo n eventi indipendenti e con la stessa probabilità di verificarsi, $P(E_i) = p$

$$Y = \#\{E_i \text{che si verificano}\} \sim \text{Binom}(n, p)$$

Definiamo le v.a.

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{se } \bar{E}_i \\ 1 & \text{se } E_i \end{cases}$$

allora

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Questo ci permette di ricavare media e varianza della binomiale indirettamente.

Media e varianza della binomiale

Preliminarmente si noti che

$$E(X_i) = 0(1-p) + 1p = p$$

$$E(X_i^2) = 0(1-p) + 1p = p$$

e quindi

$$V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Si ha allora, per $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = np(1-p)$$

Esempio: goal!

Relativamente a una partita di calcio tra ... si ritiene che il numero di goal che segnerà la squadra A, X_A, sia distribuito secondo una Poisson di parametro $\lambda_A = 1.8$, mentre il numero di goal della squadra B, X_B, secondo una Poisson di parametro $\lambda_B = 1.3$. Si ritengono i due numeri indipendenti. Si dica

(1) qual è la probabilità che la partita termini $0 - 0$;

(2) qual è la probabilità che A vinca, e che B non segni neppure un goal;

(3) qual è la probabilità che la partita termini in parità;

(4) qual è la probabilità che vinca A.

Esempio: goal! (1)

(1) Qual è la probabilità che la partita termini $0-0$;

L'evento di cui si cerca la probabilità è

$$(X_A = 0) \cap (X_B = 0)$$

essendo le due v.a. indipendenti

$$\begin{aligned} P((X_A = 0) \cap (X_B = 0)) &= P(X_A = 0)P(X_B = 0) \\ &= \frac{\lambda_A^0}{0!} e^{-\lambda_A} \frac{\lambda_B^0}{0!} e^{-\lambda_B} \\ &= e^{-\lambda_A - \lambda_B} = e^{-1.8-1.3} = 0.04505 \end{aligned}$$

Esempio: goal! (2)

(2) Qual è la probabilità che A vinca, e che B non segni neppure un goal.

L'evento di cui si cerca la probabilità è

$$(X_A > 0) \cap (X_B = 0)$$

essendo le due v.a. indipendenti

$$\begin{aligned} P((X_A > 0) \cap (X_B = 0)) &= P(X_A > 0)P(X_B = 0) \\ &= (1 - P(X_A = 0))P(X_B = 0) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda_A}\right) e^{-\lambda_B} \\ &= = 0.2275 \end{aligned}$$

Esempio: goal! (3)

(3) Qual è la probabilità che la partita termini in parità.

L'evento di cui si cerca la probabilità è

$$\bigcup_{x=0}^{+\infty}((X_A = x) \cap (X_B = x))$$

quindi

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{x=0}^{+\infty}((X_A = x) \cap (X_B = x))\right) &= \sum_{x=0}^{+\infty} P(X_A = x)P(X_B = x) \\ &= 0.2307 \end{aligned}$$

(ottenuta numericamente)

Esempio: goal! (4)

(4) Qual è la probabilità che vinca A.

L'evento di cui si cerca la probabilità è

$$\bigcup_{x=0}^{+\infty} \bigcup_{y=x+1}^{+\infty} ((X_A = y) \cap (X_B = x))$$

quindi

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{x=0}^{+\infty} \bigcup_{y=x+1}^{+\infty} ((X_A = y) \cap (X_B = x))\right) &= \sum_{x=0}^{+\infty} \sum_{y=x+1}^{+\infty} P(X_A = y)P(X_B = x) \\ &= 0.492 \end{aligned}$$

(ottenuta numericamente)

Esempio: goal!

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.04505	0.05856	0.03807	0.01650	0.00536	0.00139	0.00030	0.00006	0.00001	...
1	0.08109	0.10542	0.06852	0.02969	0.00965	0.00251	0.00054	0.00010	0.00002	...
2	0.07298	0.09487	0.06167	0.02672	0.00868	0.00226	0.00049	0.00009	0.00001	...
3	0.04379	0.05692	0.03700	0.01603	0.00521	0.00135	0.00029	0.00005	0.00001	...
4	0.01970	0.02562	0.01665	0.00722	0.00234	0.00061	0.00013	0.00002	0.00000	...
5	0.00709	0.00922	0.00599	0.00260	0.00084	0.00022	0.00005	0.00001	0.00000	...
6	0.00213	0.00277	0.00180	0.00078	0.00025	0.00007	0.00001	0.00000	0.00000	...
7	0.00055	0.00071	0.00046	0.00020	0.00007	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000	...
8	0.00012	0.00016	0.00010	0.00005	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	...
9	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Esercizi

Qual è il saldo medio su 100 puntate fatte sul rosso alla *roulette*

1. $100 \times (18/36 - 1)$.
2. $100 \times 18/36 - 100$.
3. $100 \times 18/37 - 100$

Esercizi (continua)

Uno studente sostiene un test a risposta multipla, ci sono 10 domande e per ciascuna quattro rispote di cui una sola corretta. Lo studente, non troppo preparato, conosce la risposta a 5 domande mentre risponde a caso alle altre 5. Qual è la probabilità che ottenga la sufficienza (almeno 6 corrette) assumendo che le risposte date non a caso siano effettivamente corrette?

1. 0.20
2. 0.24
3. 0.25
4. 0.28

Inoltre, se le risposte sono tre anziché quattro, la probabilità di ottenere la sufficienza sarà più alta o più bassa?