UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dipartimento di scienze economiche,
aziendali, matematiche e statistiche
“Bruno de Finetti”

Statistica

Variabili aleatorie continue

Francesco Pauli

A.A. 2016/2017

Indice

Variabili aleatorie continue

La distribuzione normale

Risultati asintotici del calcolo delle probabilità

Variabili aleatorie doppie continue

Riepilogo

Esempi di v.a. continue

Una variabile aleatoria continua è una v.a. i cui valori possibili sono numeri reali (cioè, non solo numeri interi come negli esempi precedenti), ad esempio

- il ritardo di un treno;
- la temperatura di domani alle 12;
- il peso di un neonato;
- il prezzo in un istante futuro di un titolo finanziario;
- il tasso d'interesse futuro;
- i ricavi di un'azienda il prossimo anno.

Perché le trattiamo a parte?

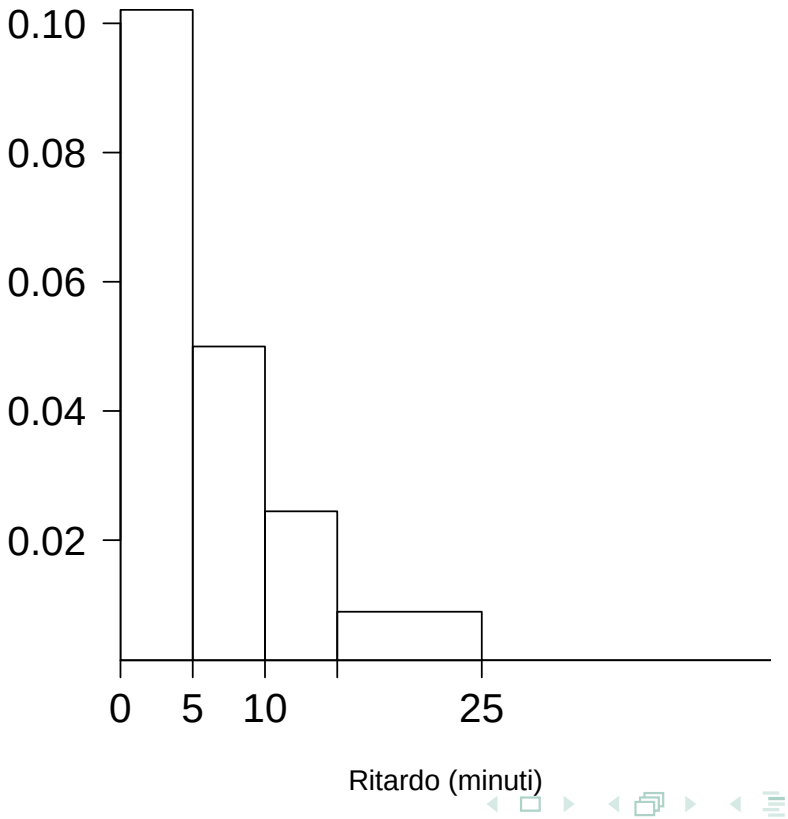
Principalmente perché è diverso il modo di esprimere la loro distribuzione di probabilità.

Distribuzione di probabilità di una v.a. continua

In statistica descrittiva abbiamo descritto la distribuzione di frequenza di variabili continue per intervalli.

Ad esempio con riferimento ai ritardi di un treno potremmo avere

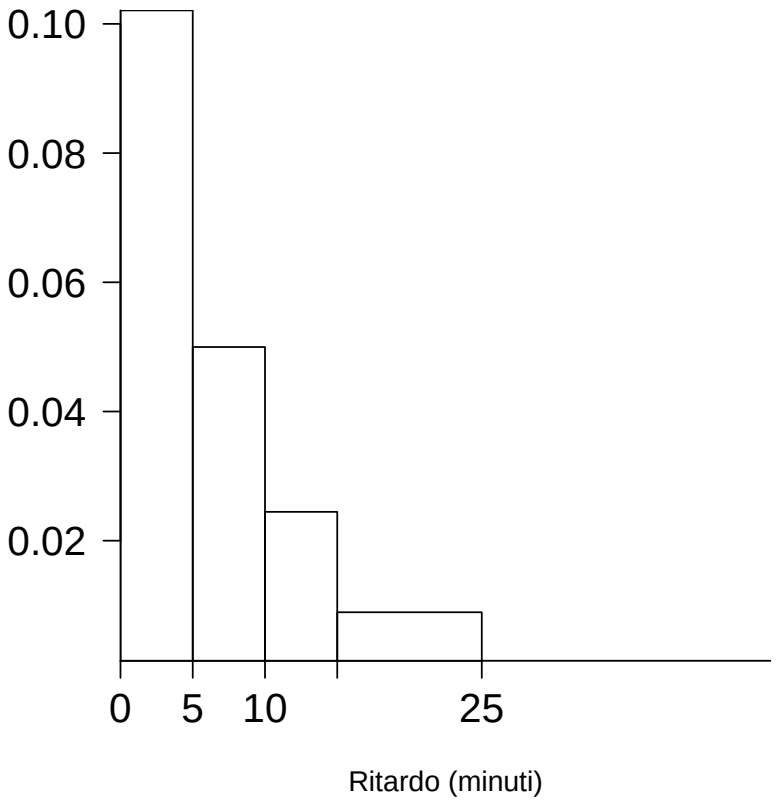
classe	prob
(0,5]	0.51
(5,10]	0.25
(10,15]	0.12
(15,25]	0.09
(25,Inf]	0.03



Da istogramma a densità

Abbiamo infinite osservazioni, possiamo affinare l'istogramma

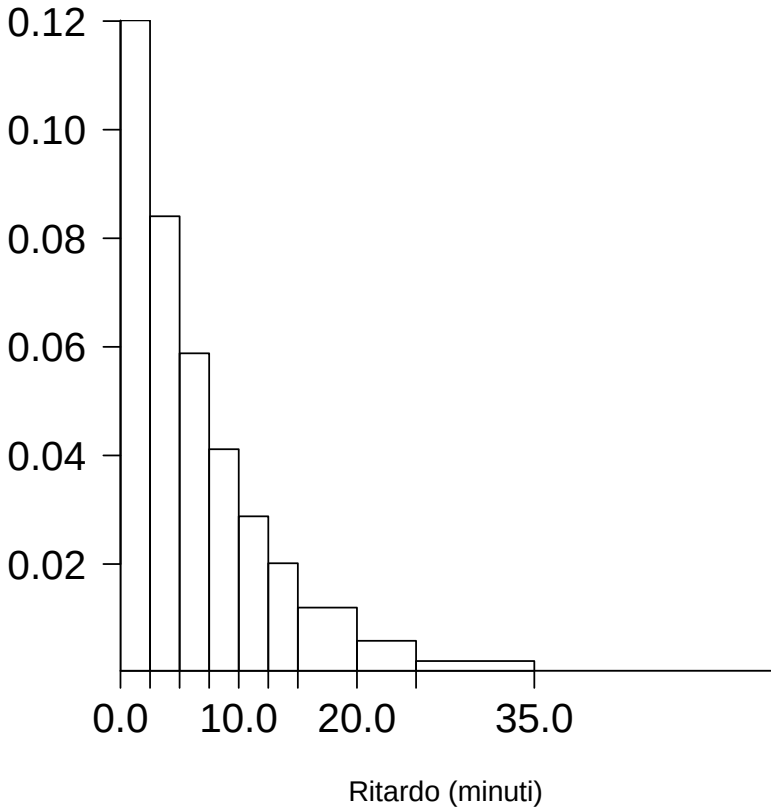
classe	prob
(0,5]	0.51
(5,10]	0.25
(10,15]	0.12
(15,25]	0.09
(25,Inf]	0.03



Da istogramma a densità

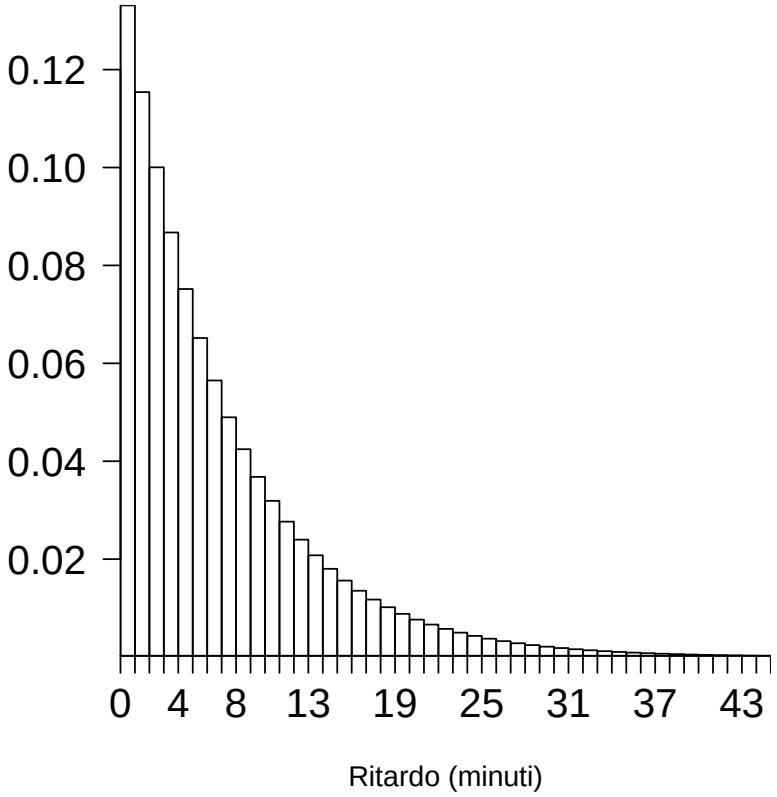
Abbiamo infinite osservazioni, possiamo affinare l'istogramma

classe	prob
(0,2.5]	0.30
(2.5,5]	0.21
(5,7.5]	0.15
(7.5,10]	0.10
(10,12.5]	0.07
(12.5,15]	0.05
(15,20]	0.06
(20,25]	0.03
(25,35]	0.02
(35,Inf]	0.01



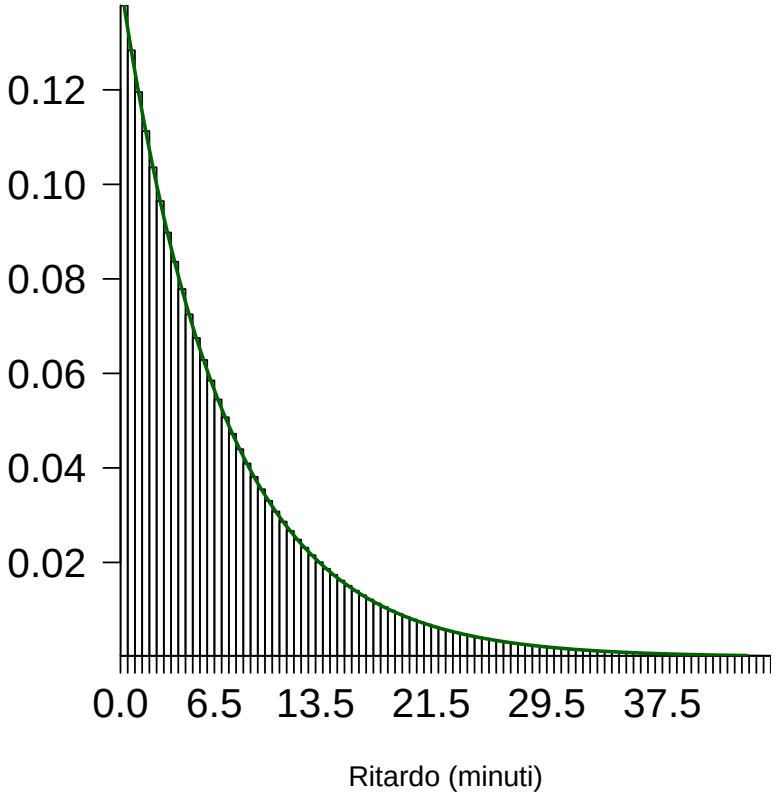
Da istogramma a densità

Abbiamo infinite osservazioni, possiamo affinare l'istogramma



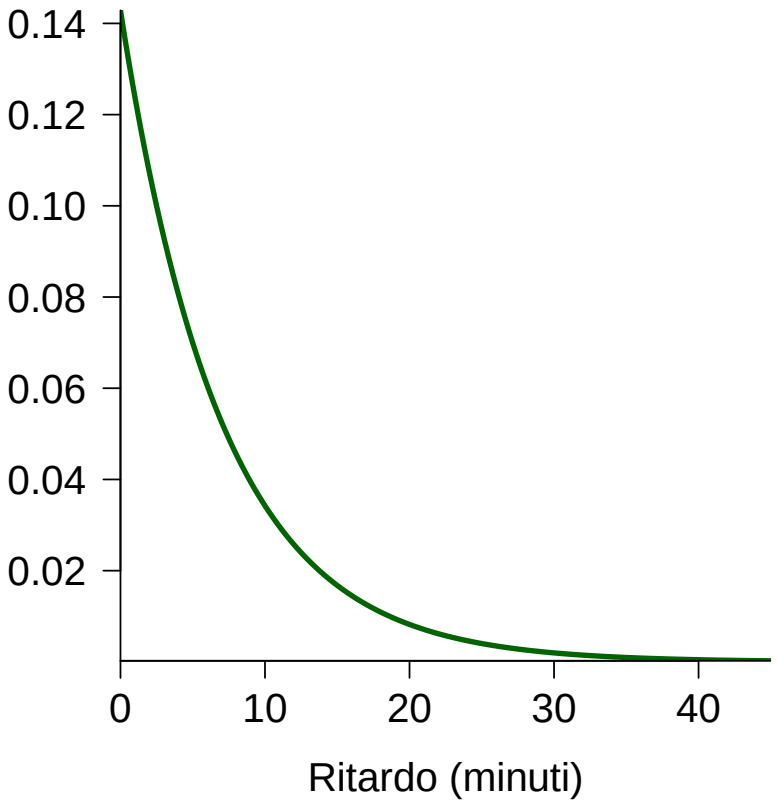
Da istogramma a densità

Abbiamo infinite osservazioni, possiamo affinare l'istogramma fino a sostituirlo con una curva: la **funzione di densità**



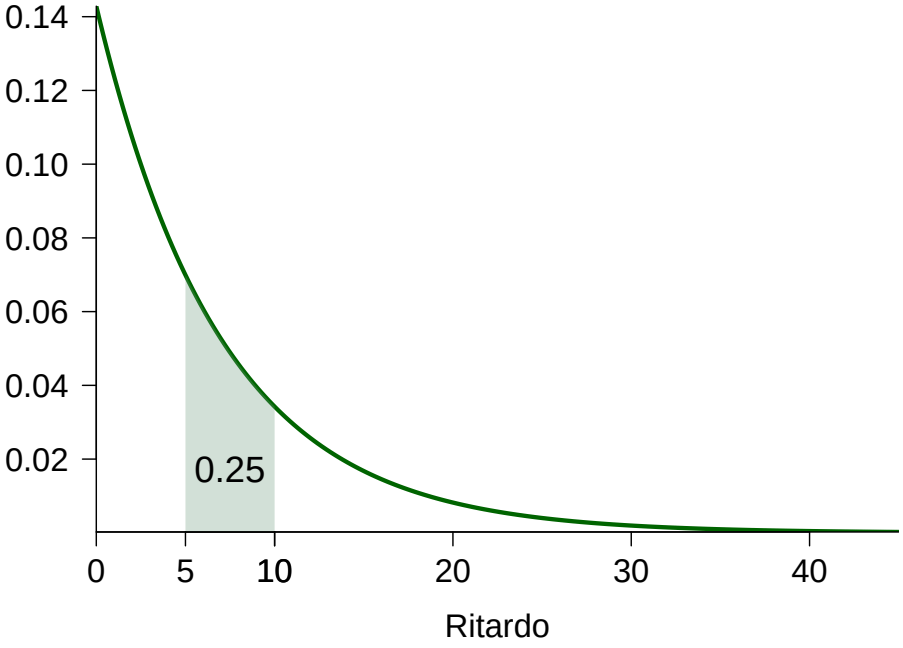
Da istogramma a densità

Abbiamo infinite osservazioni, possiamo affinare l'istogramma fino a sostituirlo con una curva: la **funzione di densità**



Interpretazione della funzione di densità

L'interpretazione è analoga all'istogramma: le aree rappresentano probabilità anziché frequenze.



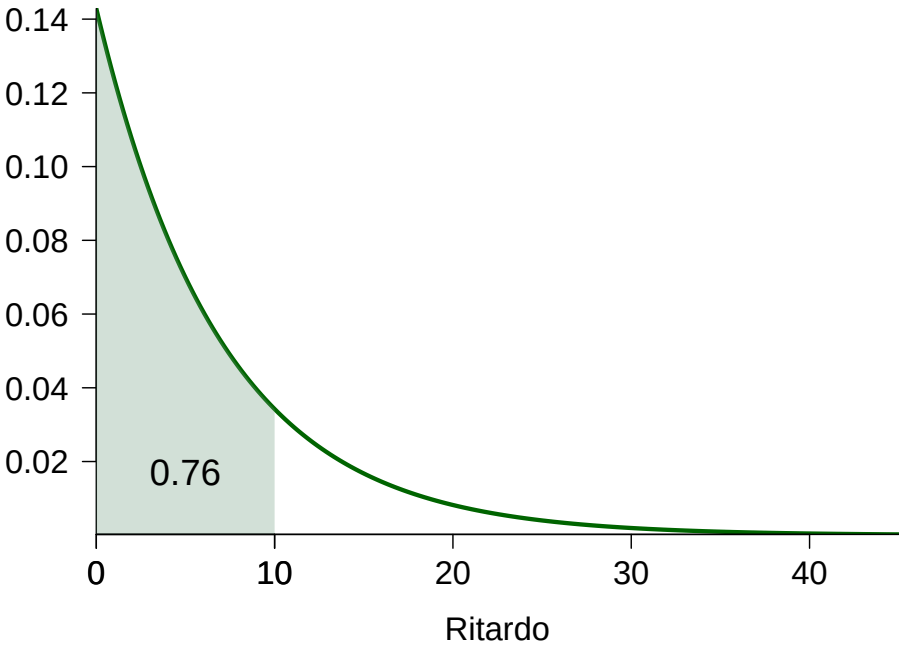
La probabilità di osservare un valore tra 5 e 10 è 0.25, in simboli

$$P(5 \leq X \leq 10) = 0.25$$

Funzione di ripartizione

Di particolare importanza è

$$P(X \leq x)$$

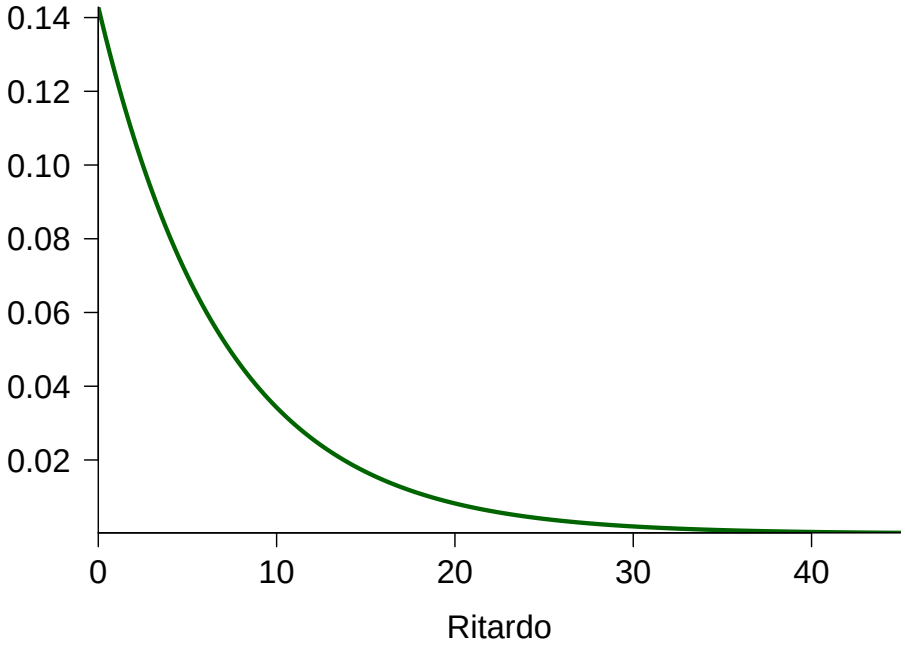


La probabilità di osservare X inferiore a 10 è 0.76, in simboli

$$P(X \leq 10) = 0.76$$

Rappresentazione della funzione di densità

La funzione di densità è descritta da una funzione reale a valori non negativi



ad esempio quella in figura è

$$f(x) = \frac{1}{7} e^{-x/7}$$

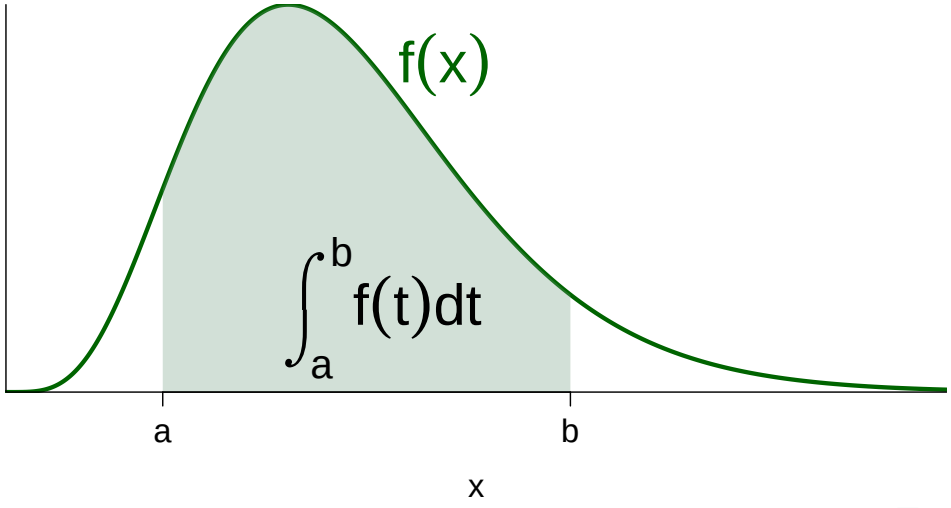
per $x \geq 0$.

Funzione di densità: definizione

Funzione di densità

La funzione di densità di una v.a. X è una funzione $f(x)$, non negativa, e la cui area sottesa (integrale) è la probabilità di X:

$$\int_a^b f(t)dt = P(a \leq X \leq b)$$



Funzione di densità: definizione

Funzione di densità

La funzione di densità di una v.a. X è una funzione $f(x)$, non negativa, e la cui area sottesa (integrale) è la probabilità di X:

$$\int_a^b f(t)dt = P(a \leq X \leq b)$$

La funzione di densità deve soddisfare alle proprietà

(i) $f(x) \geq 0$

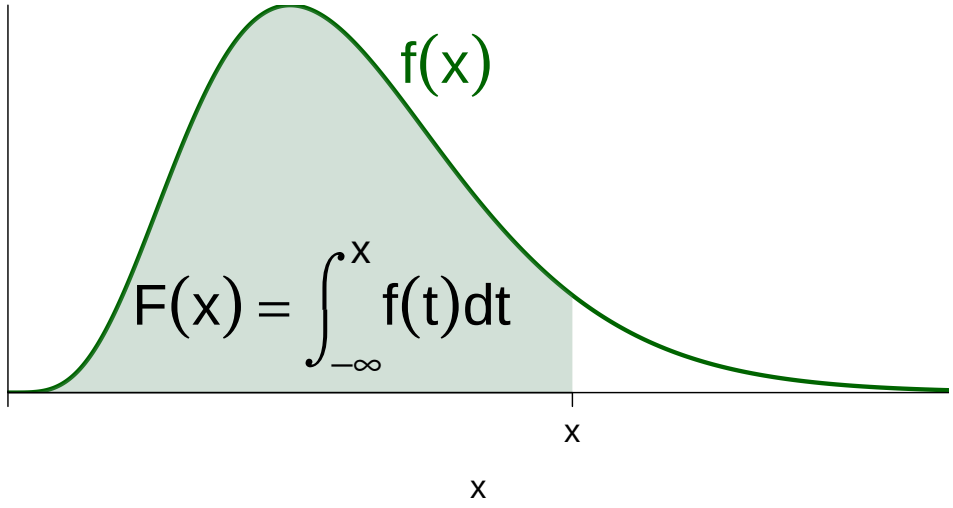
(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

Funzione di ripartizione

Funzione di ripartizione

La funzione di ripartizione di una v.a. X è la funzione

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$



Funzione di ripartizione

Funzione di ripartizione

La funzione di ripartizione di una v.a. X è la funzione

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Si noti che la funzione di ripartizione soddisfa alle seguenti proprietà

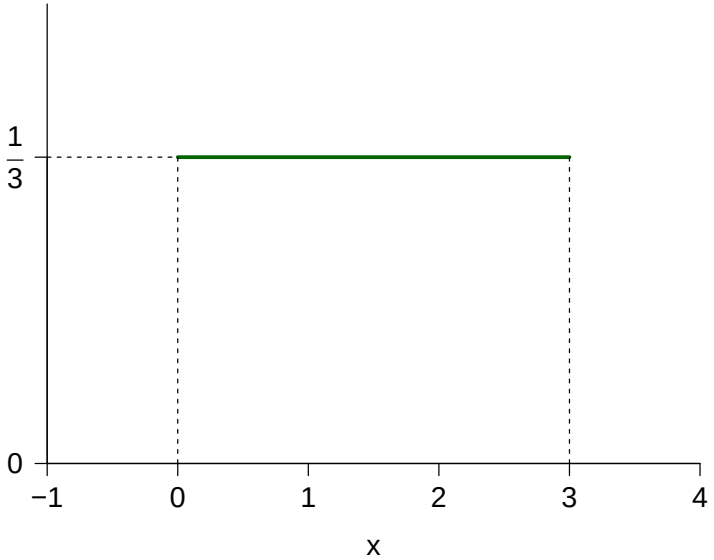
- $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- $F(x)$ è non decrescente;
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

e si osservi che

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Esempio: densità uniforme su $[0, 3]$

Ci sono numerose funzioni di densità, qualunque funzione a valori non negativi con integrale (area totale sottesa) pari a 1 è una funzione di densità.



Uniforme tra 0 e 3

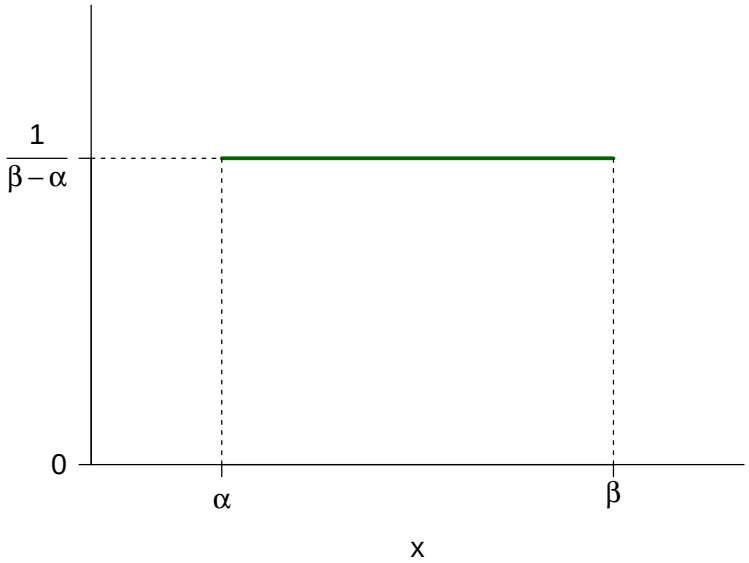
$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Qual è $P(1 \leq X \leq 2)$?

Funzione di densità e parametri

Molto spesso è utile definire una funzione di densità a meno di un parametro, che è lo stesso che dire che si definisce un insieme di funzioni di densità

Ad esempio

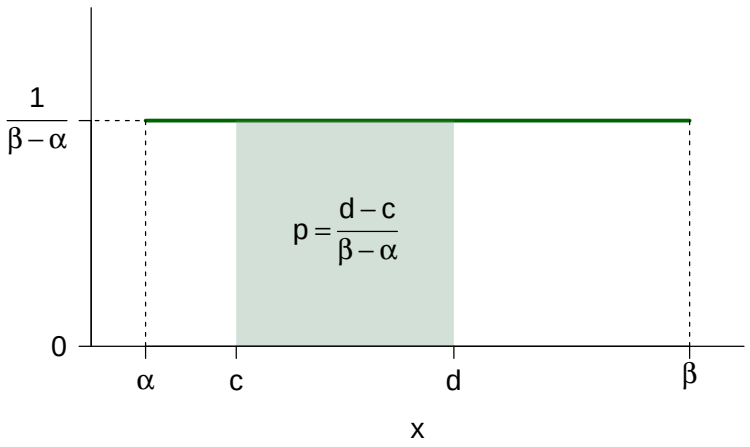


$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una funzione di densità qualunque siano α e β.

Distribuzione uniforme su $[\alpha, \beta]$

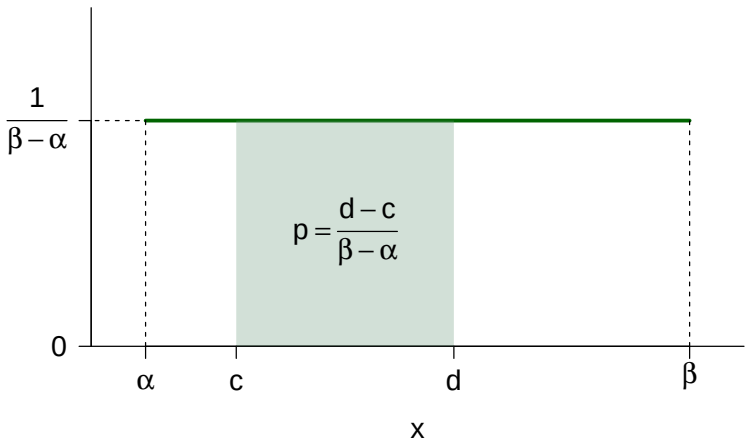
La distribuzione uniforme è molto semplice, possiamo calcolare le probabilità ad essa riferite



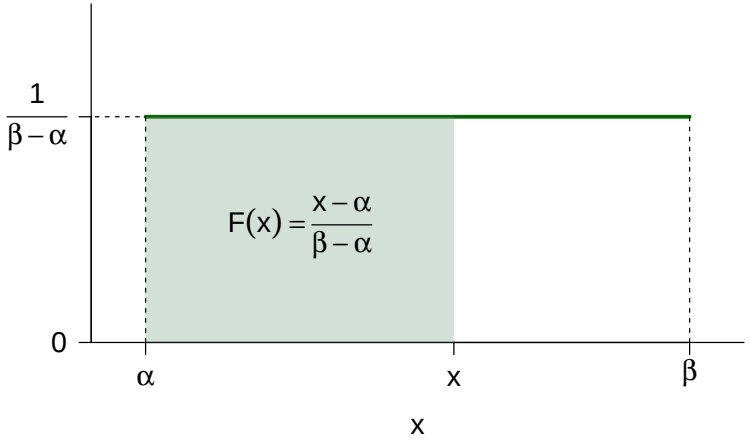
$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d - c}{\beta - \alpha}$$

Distribuzione uniforme su $[\alpha, \beta]$

La distribuzione uniforme è molto semplice, possiamo calcolare le probabilità ad essa riferite



$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d - c}{\beta - \alpha}$$



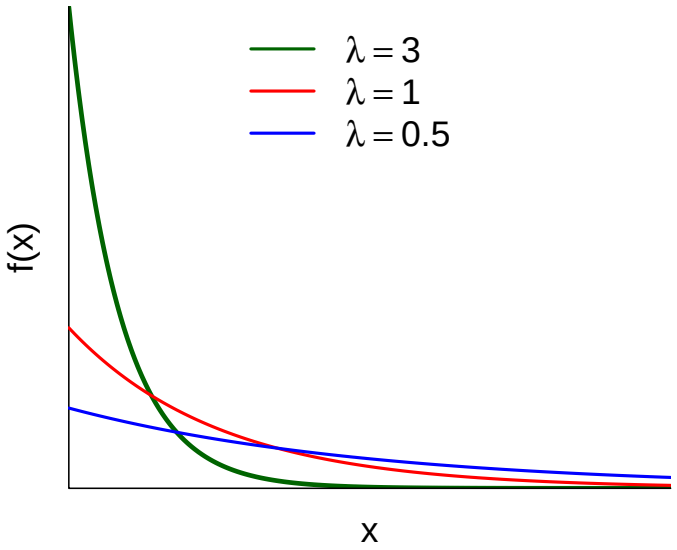
$$F(x) = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$$

Densità esponenziale

La densità esponenziale di parametro λ ha espressione

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

per $x \geq 0$ e $\lambda > 0$.



Densità esponenziale

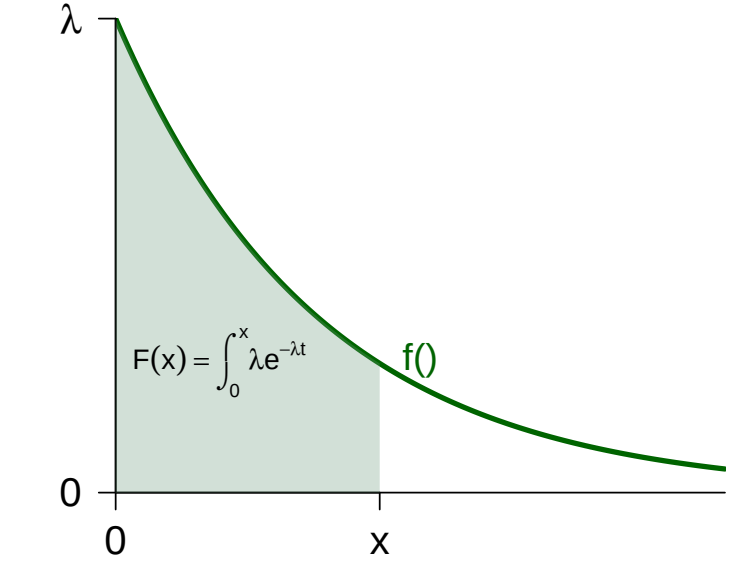
La densità esponenziale di parametro λ ha espressione

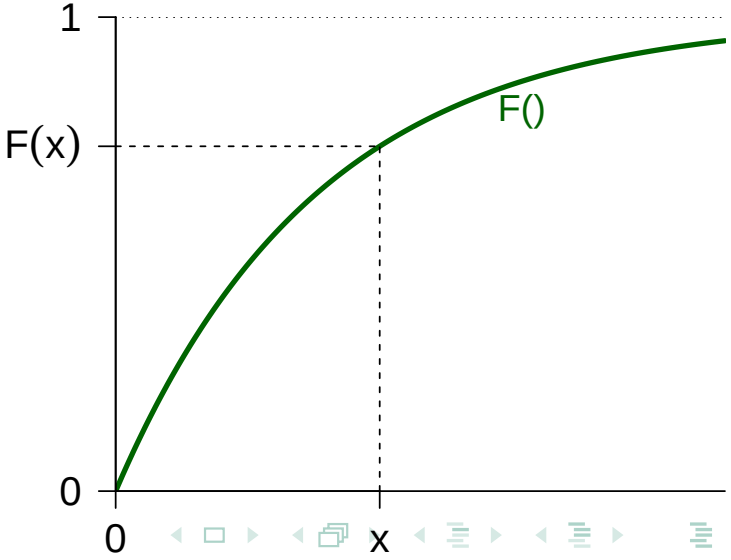
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

per $x \geq 0$ e $\lambda > 0$.

Si ha quindi la funzione di ripartizione

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^x \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$





Esempio

Sapendo che X è distribuito secondo un'esponenziale di parametro λ

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Se $\lambda = 2$, quanto vale $P(X < 1) =$
- Se $\lambda = 2$, $P(X < 0.5) =$
  - Qual è quindi la probabilità che X sia compreso tra 0.5 e 1?
- Se $\lambda = 4$ qual è la risposta alle domande precedenti?

- Il ritardo di un treno, espresso in minuti, è distribuito secondo un'esponenziale di parametro $\lambda = 0.1$, quanto è probabile aspettare più di dieci minuti?
- Se il ritardo fosse distribuito secondo un'esponenziale di parametro 0.2, attenderemmo di più o di meno (probabilmente)?

Esempio

Sapendo che X è distribuito secondo un'esponenziale di parametro λ

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Se $\lambda = 2$, quanto vale $P(X < 1) = 0.8646647$
- Se $\lambda = 2$, $P(X < 0.5) = 0.6321206$
  - Qual è quindi la probabilità che X sia compreso tra 0.5 e 1?
- Se $\lambda = 4$ qual è la risposta alle domande precedenti?

- Il ritardo di un treno, espresso in minuti, è distribuito secondo un'esponenziale di parametro $\lambda = 0.1$, quanto è probabile aspettare più di dieci minuti?
- Se il ritardo fosse distribuito secondo un'esponenziale di parametro 0.2, attenderemmo di più o di meno (probabilmente)?

Esempio

Sapendo che X è distribuito secondo un'esponenziale di parametro λ

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Se $\lambda = 2$, quanto vale $P(X < 1) = 0.8646647$
- Se $\lambda = 2$, $P(X < 0.5) = 0.6321206$
  - Qual è quindi la probabilità che X sia compreso tra 0.5 e 1?
- Se $\lambda = 4$ qual è la risposta alle domande precedenti? (0.9816844, 0.8646647, 0.1170196)
- Il ritardo di un treno, espresso in minuti, è distribuito secondo un'esponenziale di parametro $\lambda = 0.1$, quanto è probabile aspettare più di dieci minuti?
- Se il ritardo fosse distribuito secondo un'esponenziale di parametro 0.2, attenderemmo di più o di meno (probabilmente)?

Media e varianza per v.a. continue

Anche per le v.a. continue si definiscono media e varianza, se $f(x)$ rappresenta la funzione di densità si ha

$$E(X) = \int xf(x)dx$$

$$E(h(X)) = \int h(x)f(x)dx$$

$$V(X) = \int (x - E(X))^2 f(x)dx$$

Con le solite proprietà (che sono conseguenze delle proprietà dell'integrale)

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Media e varianza per la distribuzione uniforme

Sia X distribuito secondo un'uniforme tra α e β, quindi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora

$$E(X) = \int_\alpha^\beta \frac{x}{\beta-\alpha} dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$E(X^2) = \int_\alpha^\beta \frac{x^2}{\beta-\alpha} dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{\beta^3-\alpha^3}{3} = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

Media e varianza per la distribuzione esponenziale

sia X distribuito secondo un'esponenziale di parametro $\lambda > 0$, quindi

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

per $x \geq 0$, allora, via integrazione per parti,

$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \left[xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

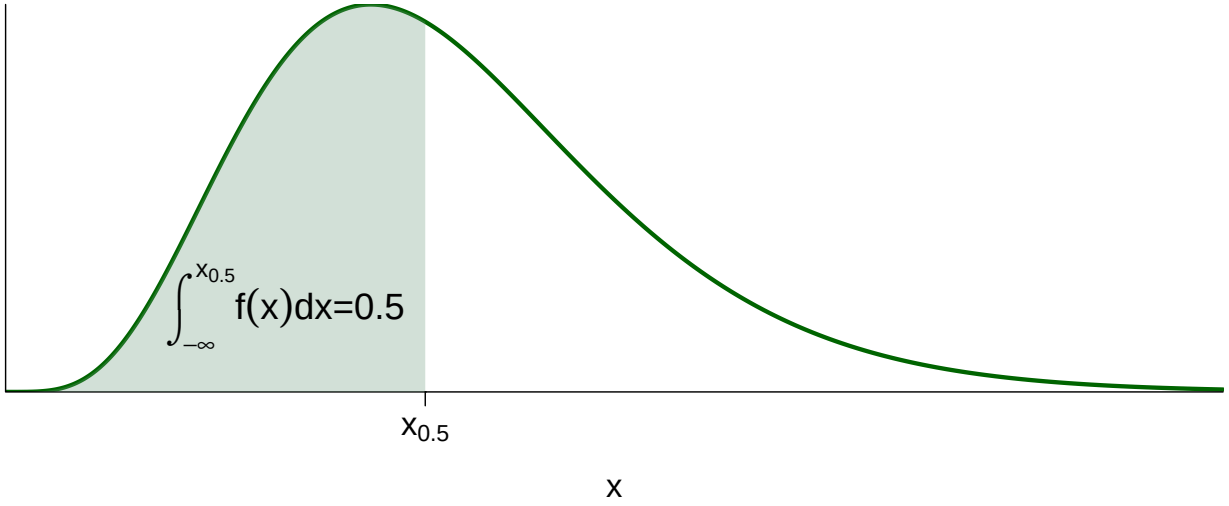
$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x} dx = \left[x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Mediana

Si definisce mediana di una v.a. continua X con distribuzione $f(x)$ il valore $Me(X)$ o $x_{0.5}$ tale che

$$F(Me(X)) = \int_{-\infty}^{Me(X)} f(x)dx = 0.5$$



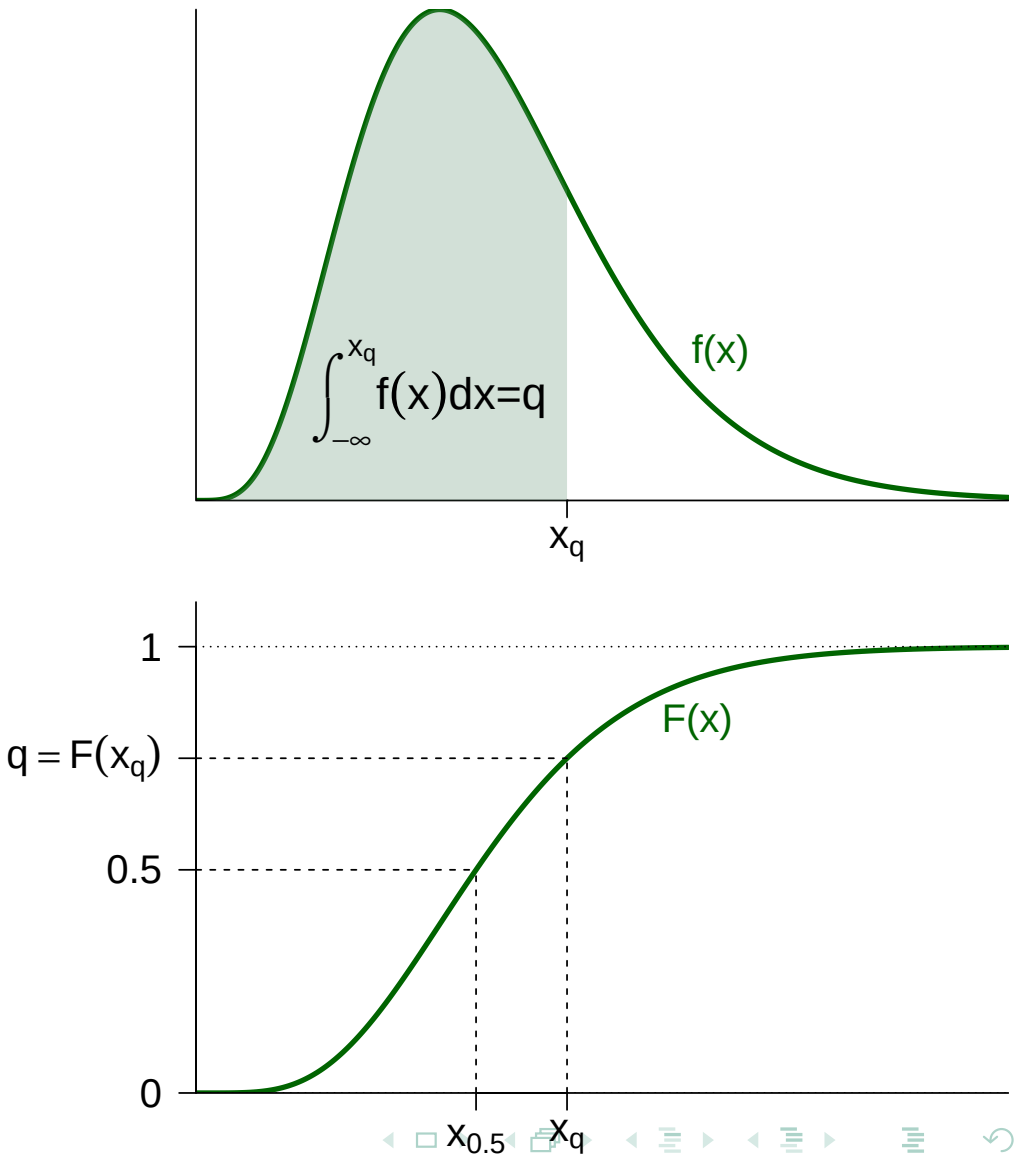
Quantili

Si definisce q-quantile di una v.a. continua X con distribuzione $f(x)$ il valore x_q tale che

$$F(x_q) = \int_{-\infty}^{x_q} f(x)dx = q$$

cioè si ha

$$x_q = F^{-1}(q)$$



Quantili per la distribuzione uniforme

Sia X distribuito secondo un'uniforme tra α e β, quindi per $\alpha \leq x \leq \beta$ si ha

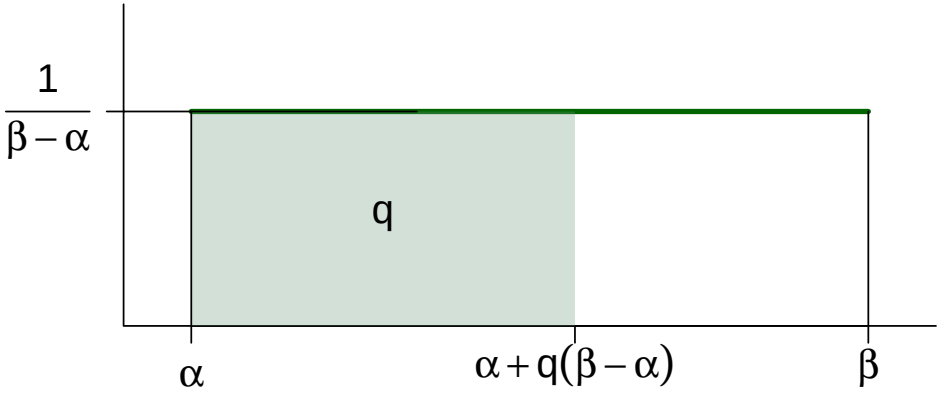
$$F(x) = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$$

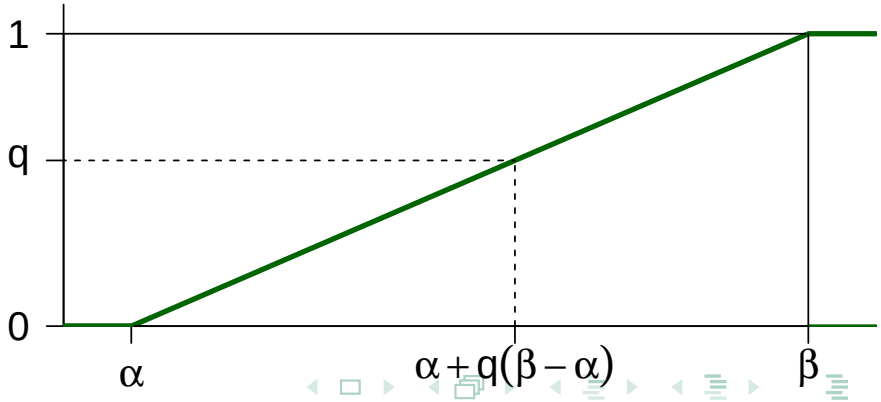
il q-quantile è allora x_q tale che

$$q = F(x_q) = \frac{x_q - \alpha}{\beta - \alpha}$$

invertendo la relazione si trova che

$$x_q = \alpha + q(\beta - \alpha)$$





Quantili per la distribuzione esponenziale

Sia X distribuito secondo un'esponenziale di parametro $\lambda > 0$, quindi

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

il q-quantile è allora x_q tale che

$$q = F(x_q) = 1 - e^{-\lambda x_q}$$

invertendo la relazione si trova che

$$x_q = -\frac{\log(1-q)}{\lambda}$$

La mediana è quindi

$$\mathrm{Me} = x_{0.5} = \frac{\log 2}{\lambda}$$

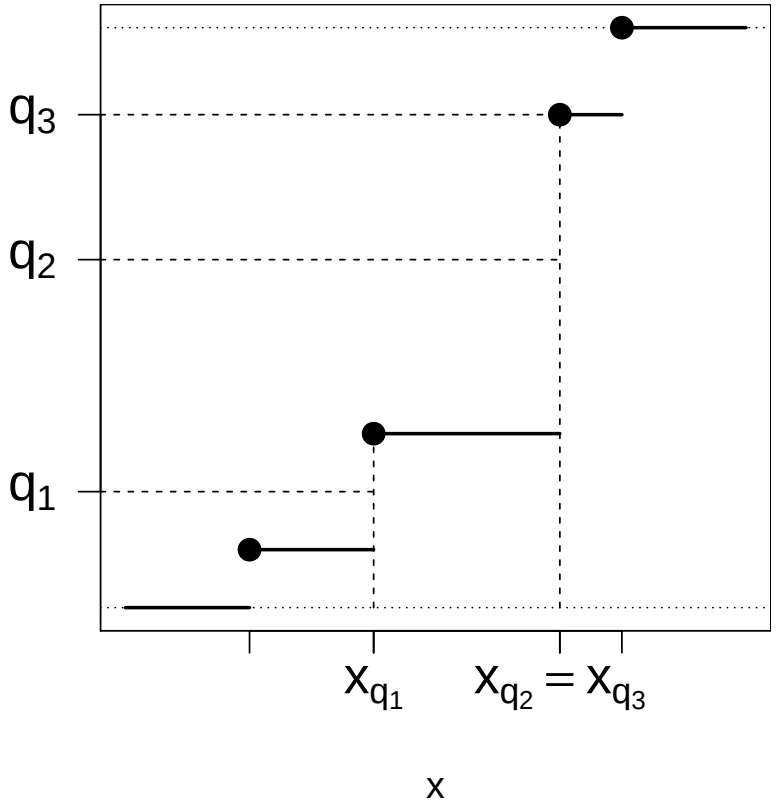
(Si noti, minore della media!)

Quantili per distribuzioni discrete

Sia X una v.a. discreta con FdR $F_X(\cdot)$, il quantile q è definito come

$$x_q = \inf\{x \in \mathbb{R} : q \leq F_X(x)\}$$

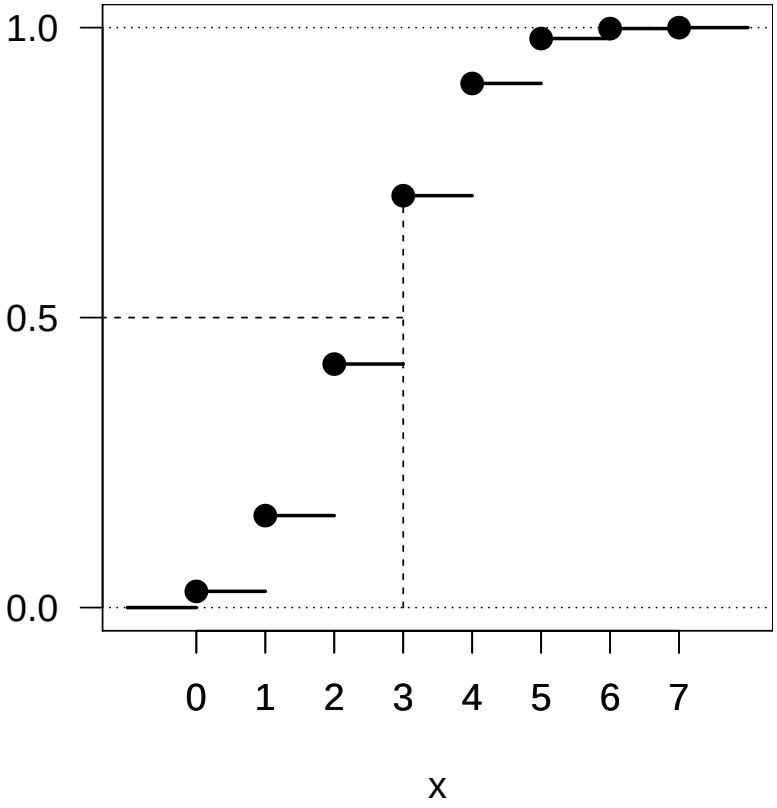
In figura si rappresentano tre quantili, dato che la FdR va "a salti" alcuni quantili possono essere uguali.



Quantili per distribuzioni discrete, esempio

Sia $X \sim \text{Binom}(7, 0.4)$, qual è il quantile 0.5 (cioè la mediana).

x	$p(x)$	$F(x)$
0	0.028	0.028
1	0.131	0.159
2	0.261	0.420
3	0.290	0.710
4	0.194	0.904
5	0.077	0.981
6	0.017	0.998
7	0.002	1.000



Si ha

$$\{x \in \mathbb{R} : q \leq F_X(x)\} = [3, +\infty[$$

quindi ...

Indice

Variabili aleatorie continue

La distribuzione normale

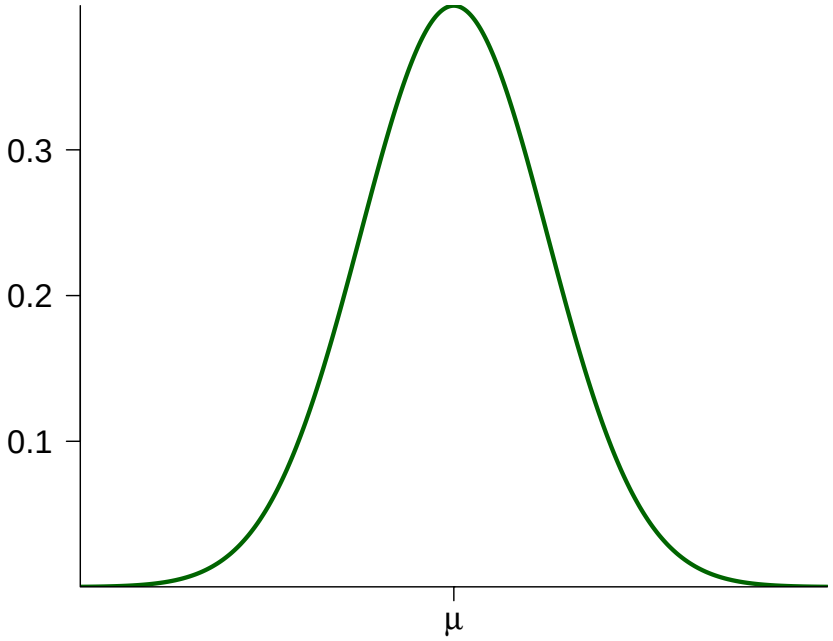
Risultati asintotici del calcolo delle probabilità

Variabili aleatorie doppie continue

Riepilogo

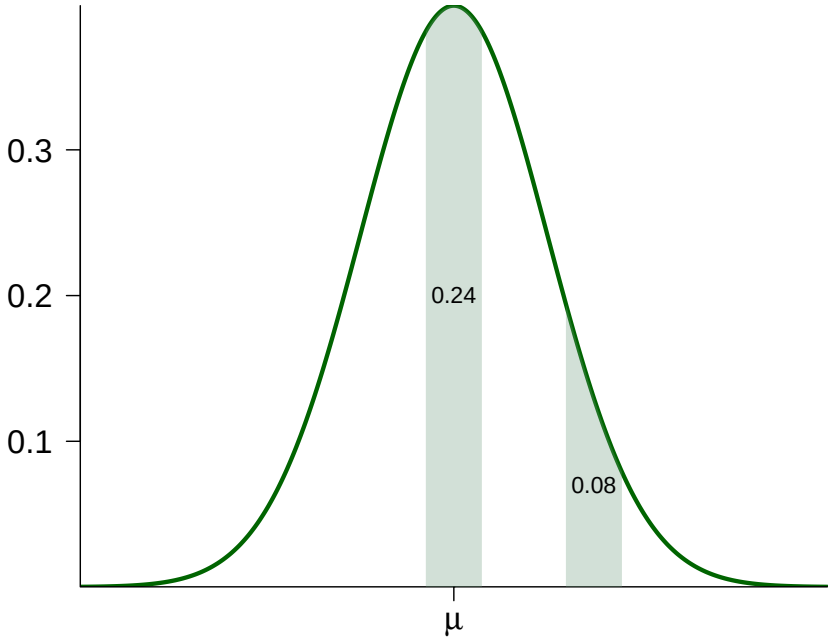
La distribuzione normale: principali caratteristiche

La distribuzione continua che si incontra più frequentemente è la normale o gaussiana, la cui densità ha la seguente forma



La distribuzione normale: principali caratteristiche

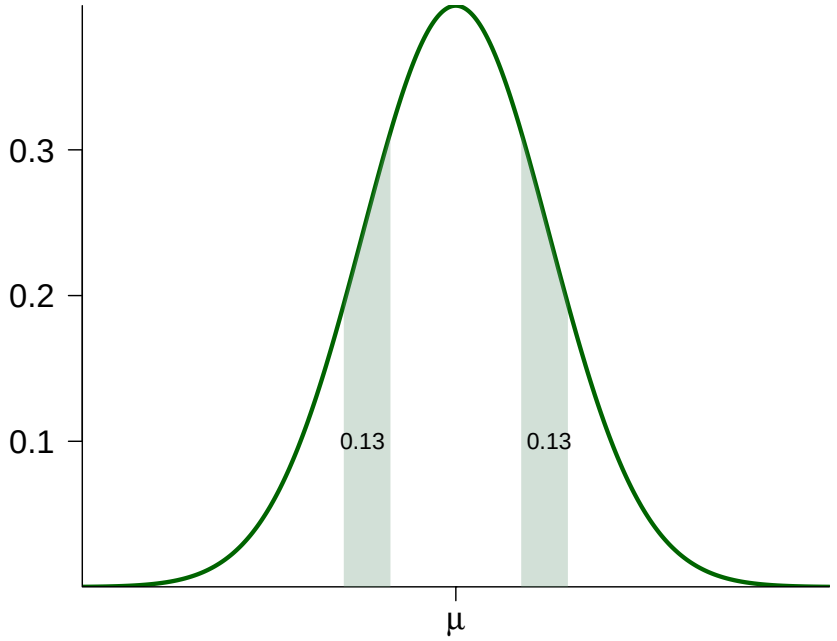
La distribuzione continua che si incontra più frequentemente è la normale o gaussiana, la cui densità ha la seguente forma



- Sono più probabili valori intorno a un valore centrale.

La distribuzione normale: principali caratteristiche

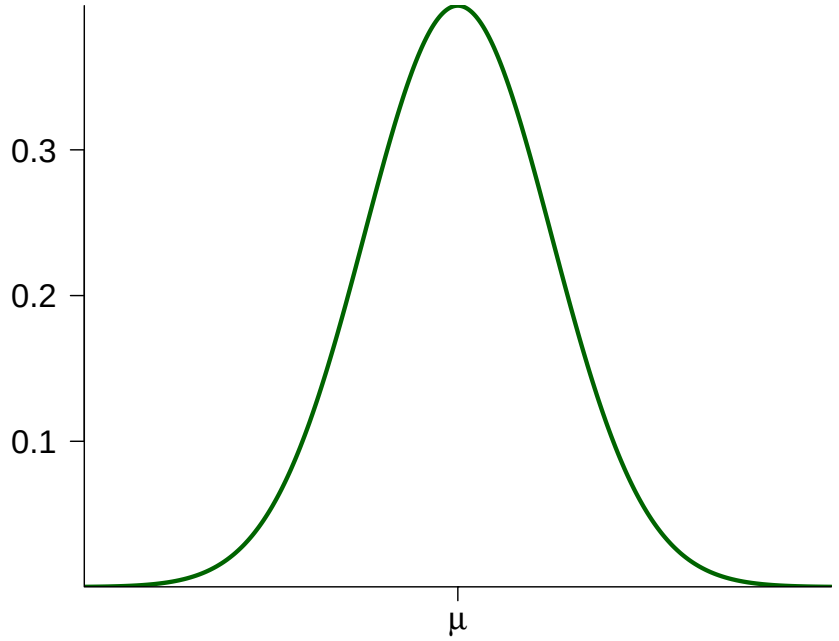
La distribuzione continua che si incontra più frequentemente è la normale o gaussiana, la cui densità ha la seguente forma



- Sono più probabili valori intorno a un valore centrale.
- Scostamenti a destra e sinistra hanno la stessa probabilità.

La distribuzione normale: principali caratteristiche

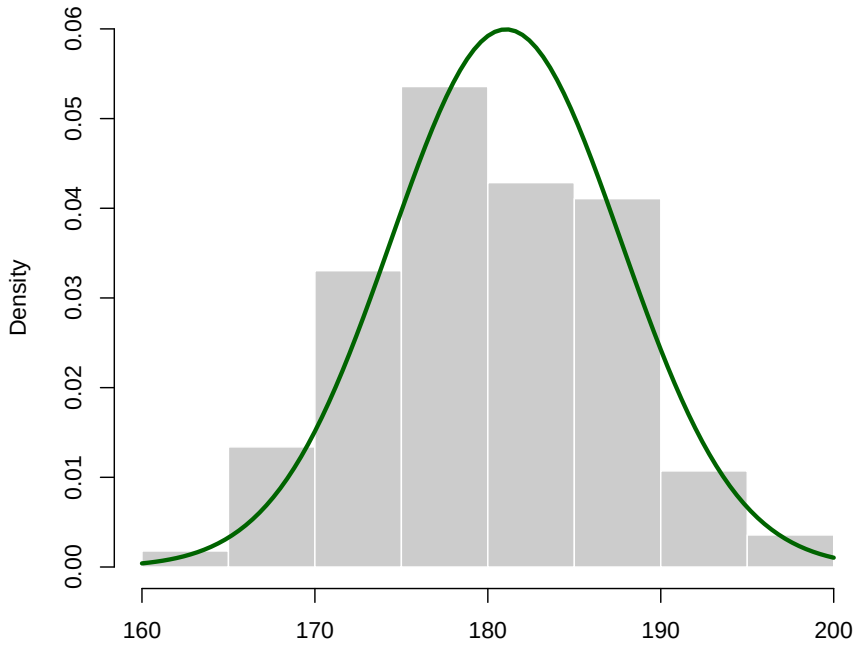
La distribuzione continua che si incontra più frequentemente è la normale o gaussiana, la cui densità ha la seguente forma



- Sono più probabili valori intorno a un valore centrale.
- Scostamenti a destra e sinistra hanno la stessa probabilità.
- Funzione: $f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

Esempio: altezze

Distribuzione delle altezze tra gli studenti maschi

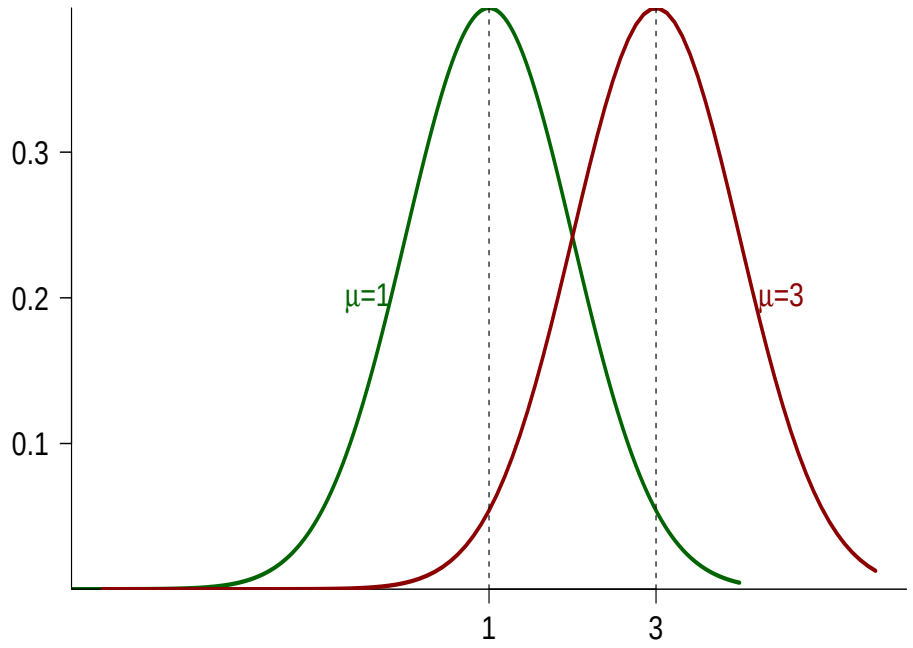


Parametri della normale

Funzione di densità della normale

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

che indicheremo semplicemente con $N(\mu,\sigma^2)$ e scriveremo $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.



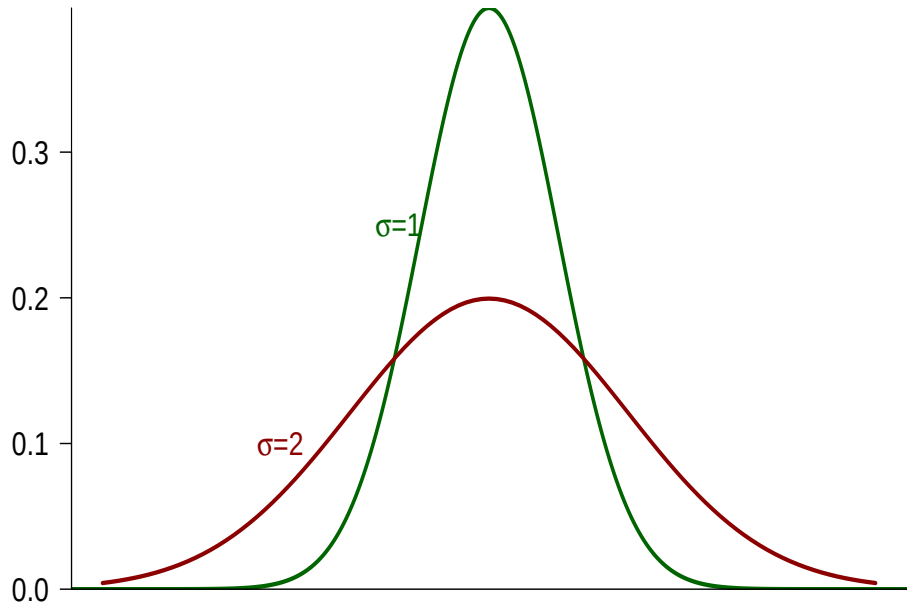
μ è la media della distribuzione.
Al variare di μ la distribuzione si sposta lungo l'asse x.

Parametri della normale

Funzione di densità della normale

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

che indicheremo semplicemente con $N(\mu,\sigma^2)$ e scriveremo $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.



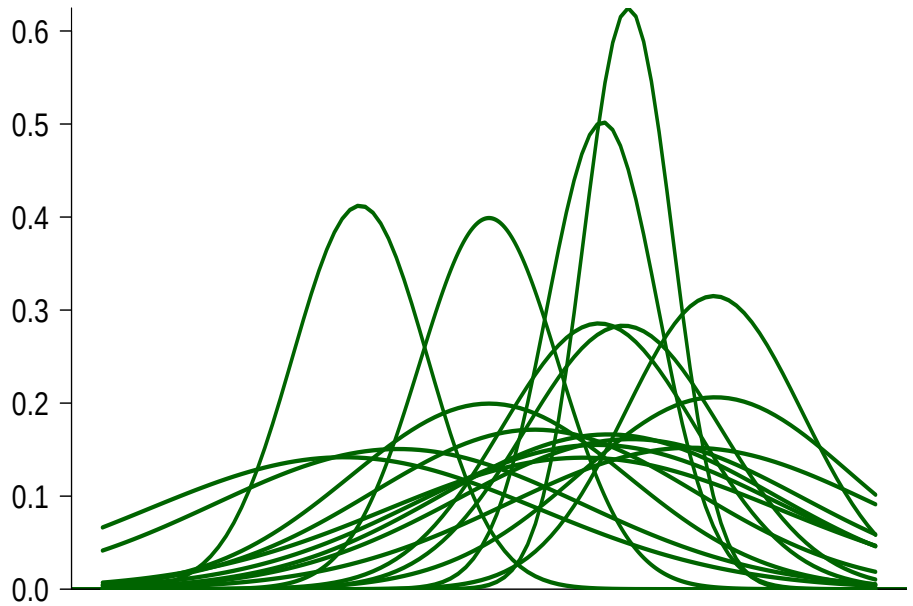
σ^2 è la varianza della distribuzione.
Al variare di σ la distribuzione mantiene lo stesso centro, ma si 'allarga': sono più probabili valori grandi (in valore assoluto)

Parametri della normale

Funzione di densità della normale

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

che indicheremo semplicemente con $N(\mu,\sigma^2)$ e scriveremo $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.



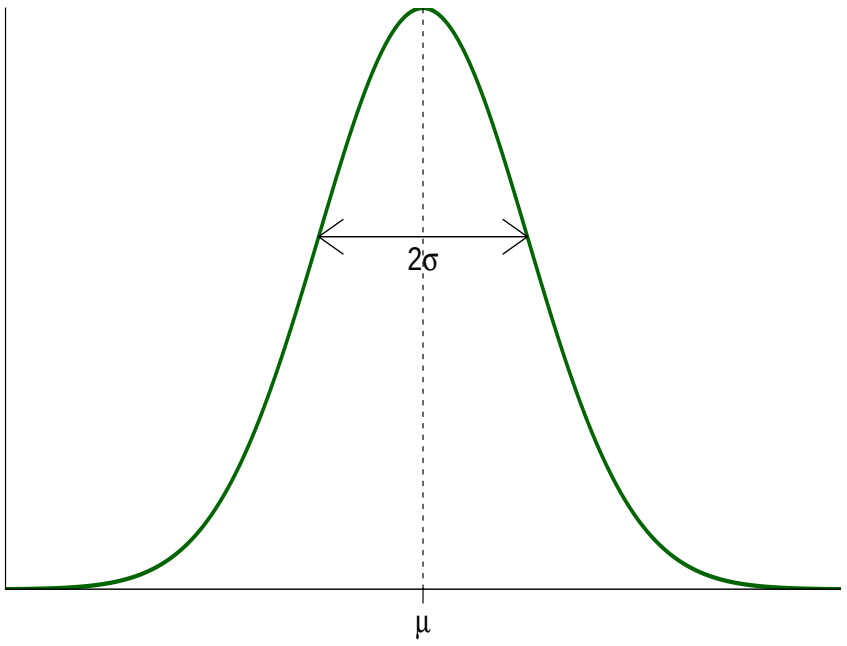
Insomma, abbiamo un'infinità di distribuzioni al variare di μ e σ.

Parametri della normale

Funzione di densità della normale

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

che indicheremo semplicemente con $N(\mu,\sigma^2)$ e scriveremo $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.



Insomma, abbiamo un'infinità di distribuzioni al variare di μ e σ.

Probabilità per una v.a. normale

Sapendo che $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, e che quindi ha densità

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

ci servirà poter calcolare probabilità del tipo

$$p = P(a \leq X \leq b)$$

dove

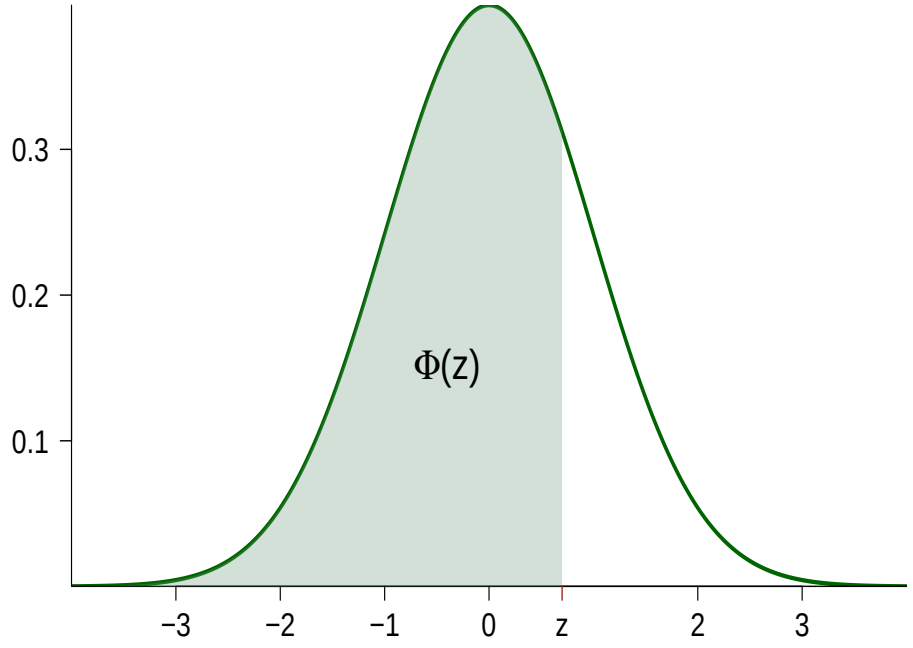
$$p = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Sfortunatamente, non c'è un espressione esplicita per calcolare queste probabilità, però potremo calcolarle riferendoci a una particolare normale.

Normale Standard

Un ruolo particolare lo ha la normale standard, con $\mu = 0$ e $\sigma = 1$

$$Z \sim N(0,1) \quad \rightarrow \quad f(z;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$



Definiamo

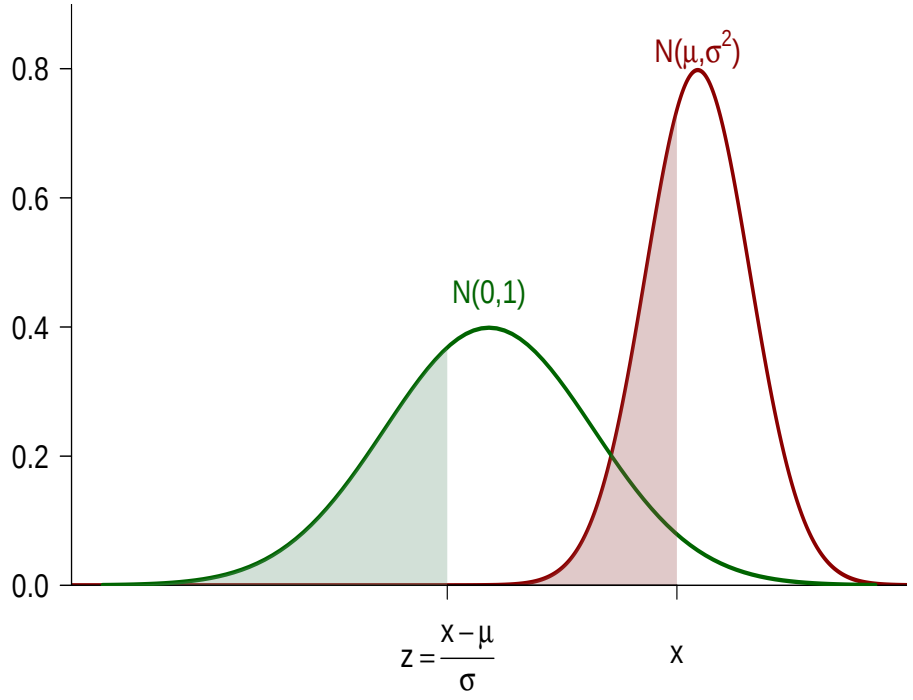
$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

area sottesa dalla curva tra $-\infty$ e z, cioè l'area scurita in figura.
(Si dà un nome particolare alla FdR della normale standard.)

Normale Standard e normale (μ, σ)

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$



Cioè l'area in rosso (pari a $P(X \leq x)$) è uguale all'area verde.

—

Questo permette di ricavare qualunque probabilità associata ad una generica $N(\mu, \sigma^2)$ conoscendo $\Phi(z)$.

Tavole della normale

La funzione $\Phi(z)$ non è esprimibile in forma analitica, ma è tabulata.

Cioè i valori di $\Phi(z)$ corrispondenti a diversi valori di z sono riportati in una tabella la cui forma è la seguente

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
					.					
					.					
0.2					.					
0.3	.	.	.	.	$\Phi(0.34)$					
0.4										

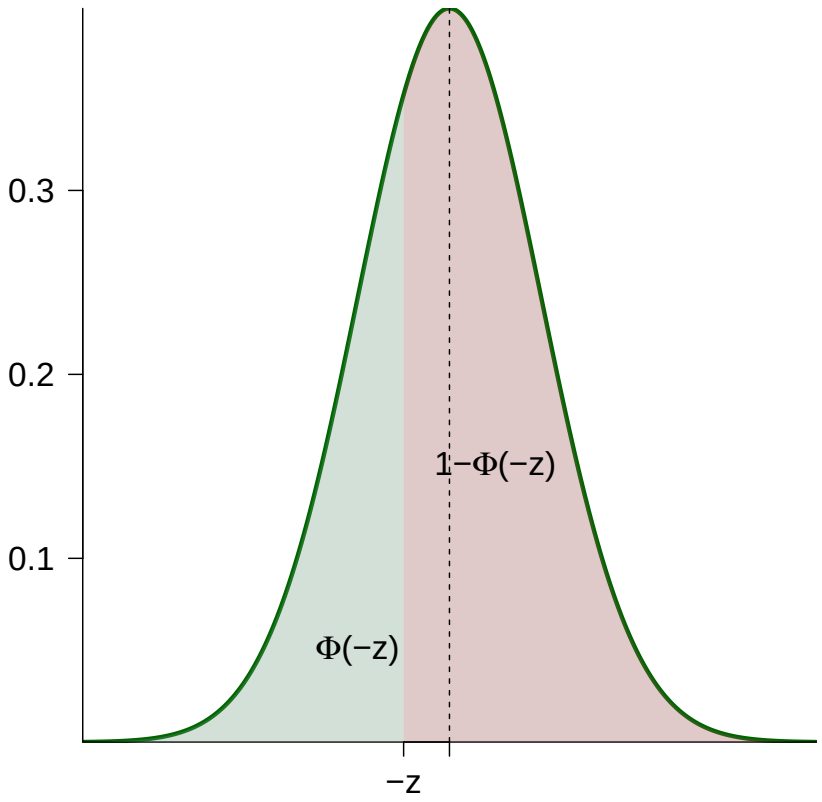
	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

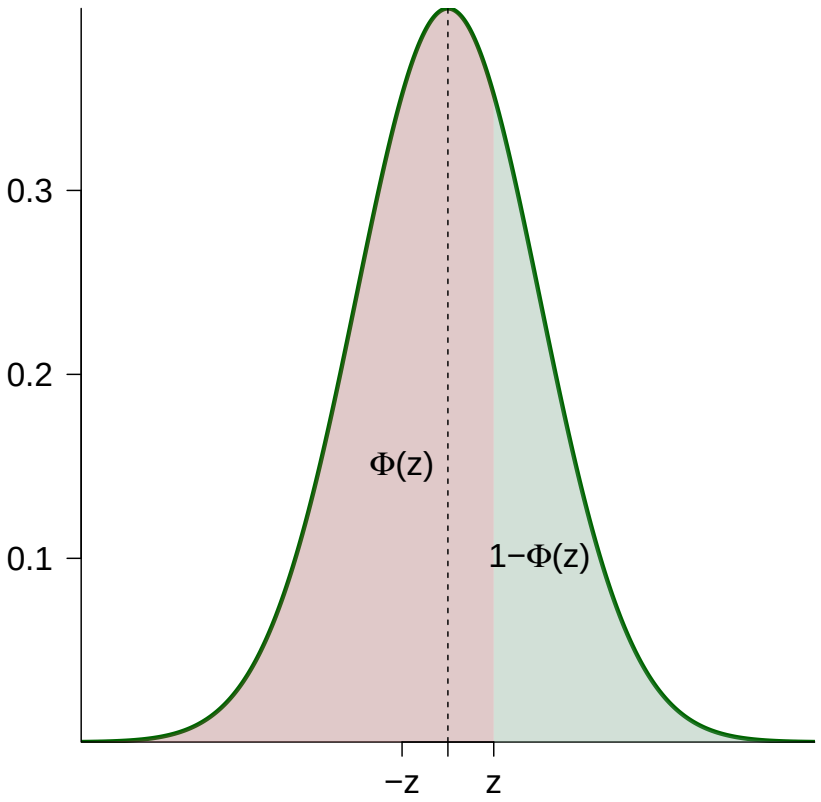
E i valori negativi?

È sufficiente conoscere $\Phi(z)$ per i valori positivi di z, se z è minore di 0 si usa la relazione

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Graficamente: a colori uguali corrispondono aree uguali





Alcuni esempi

Sia X distribuito secondo una normale standard

$$P(X \leq 1.34) = ?$$

La parte rilevante della tavola è

	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
1							
1.1		0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	
1.2		0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	
1.3		0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	
1.4		0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	
1.5		0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	
1.6							

Alcuni esempi (continua)

Sia X distribuito secondo una normale standard

$$P(X > -1.23) = ?$$

La parte rilevante della tavola è

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.9							
1		0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	
1.1		0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	
1.2		0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	
1.3		0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	
1.4		0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	
1.5							

Alcuni esempi (continua)

Sia X distribuito secondo una normale con media $\mu = 4$ e varianza $\sigma^2 = 16$

$$P(X \leq 13) = ?$$

Calcoliamo $z = (13 - 4)/4 = 2.25$, si ha allora

$$P(X \leq 13) = \Phi(2.25) = ?$$

La parte rilevante della tavola è

	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
1.9							
2		0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	
2.1		0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	
2.2		0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	
2.3		0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	
2.4		0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	
2.5							

Quantili della normale: z_q t.c. $\Phi(z_q) = q$

Poniamoci il problema inverso, vogliamo trovare $z_{0.9}$, tale che

$$\Phi(z_{0.9}) = 0.9$$

Faremo il lavoro inverso, cerchiamo sulla tavola un valore vicino a 0.9, e leggiamo il corrispondente valore di z

	0.06	0.07	0.08	0.09
0.9				
1		0.8577	0.8599	0.8621
1.1		0.8790	0.8810	0.8830
1.2		0.8980	0.8997	0.9015
1.3		0.9147	0.9162	0.9177
1.4		0.9292	0.9306	0.9319
1.5				

Quantili della normale: z_q t.c. $\Phi(z_q) = q$ (continua)

Sapendo che

$$\Phi(1.28) = 0.9$$

Possiamo trovare facilmente $z_{0.1}$ cioè il valore tale che

$$\Phi(z_{0.1}) = 0.1$$

Come?

Quantili della normale: z_q t.c. $\Phi(z_q) = q$ (continua)

Troviamo anche $z_{0.95}$, il valore tale che

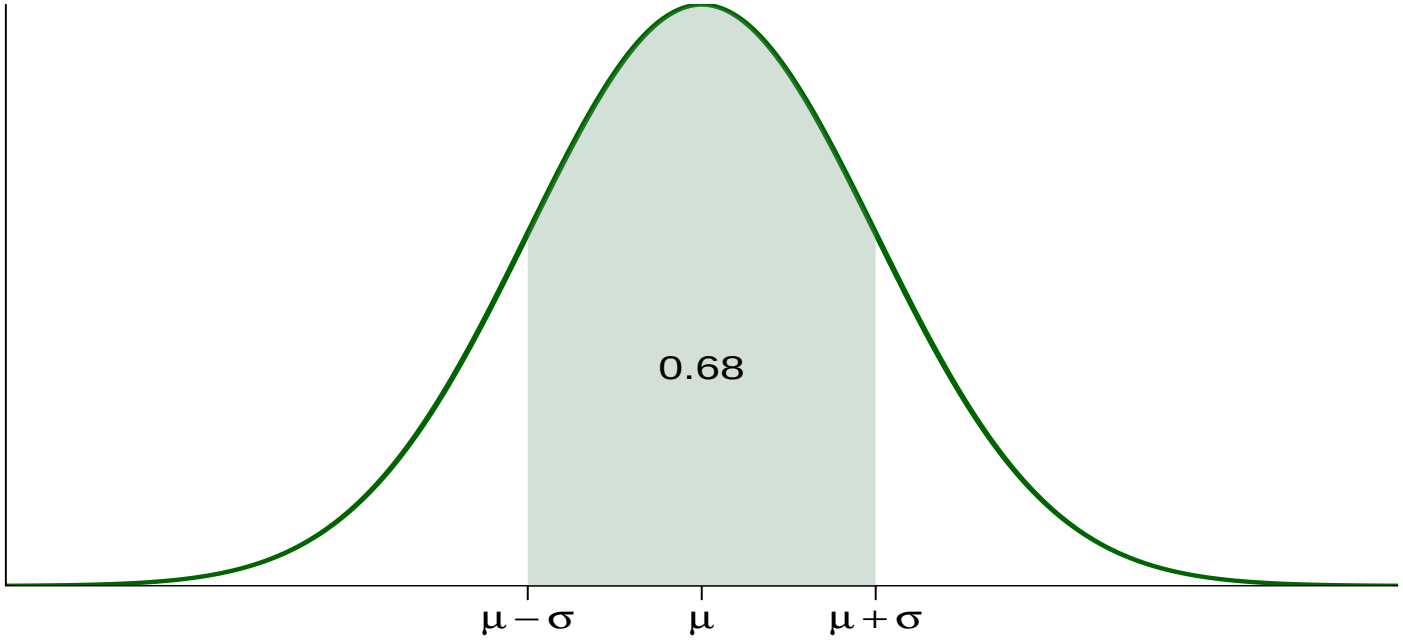
$$\Phi(z_{0.95}) = 0.95$$

Cerchiamo sulla tavola un valore vicino a 0.9, e leggiamo il corrispondente valore di z

	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
1.3							
1.4		0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	
1.5		0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	
1.6		0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	
1.7		0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	
1.8		0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	
1.9							

Intervalli di riferimento

L'intervallo da $\mu - \sigma$ a $\mu + \sigma$ comprende una probabilità pari a 0.68.



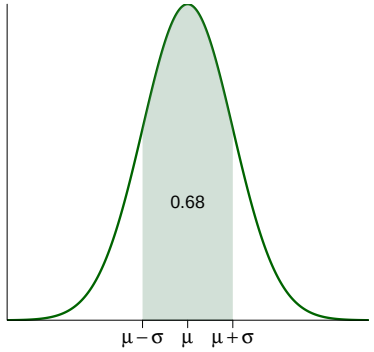
Come lo verifichiamo?

Intervalli di riferimento (continua)

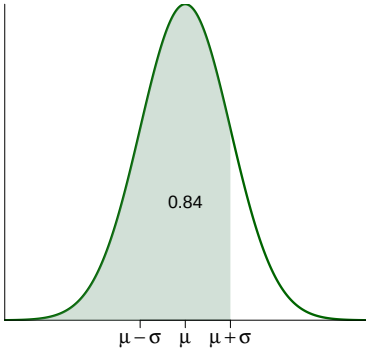
Un aiuto, la parte rilevante della tavola è

	0	0.01	0.02	0.03
0.7				
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	
1	0.8413	0.8438	0.8461	
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	
1.3				

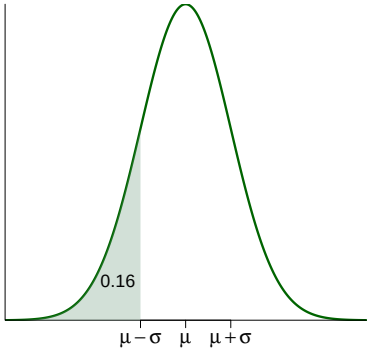
Intervalli di riferimento (continua)



=



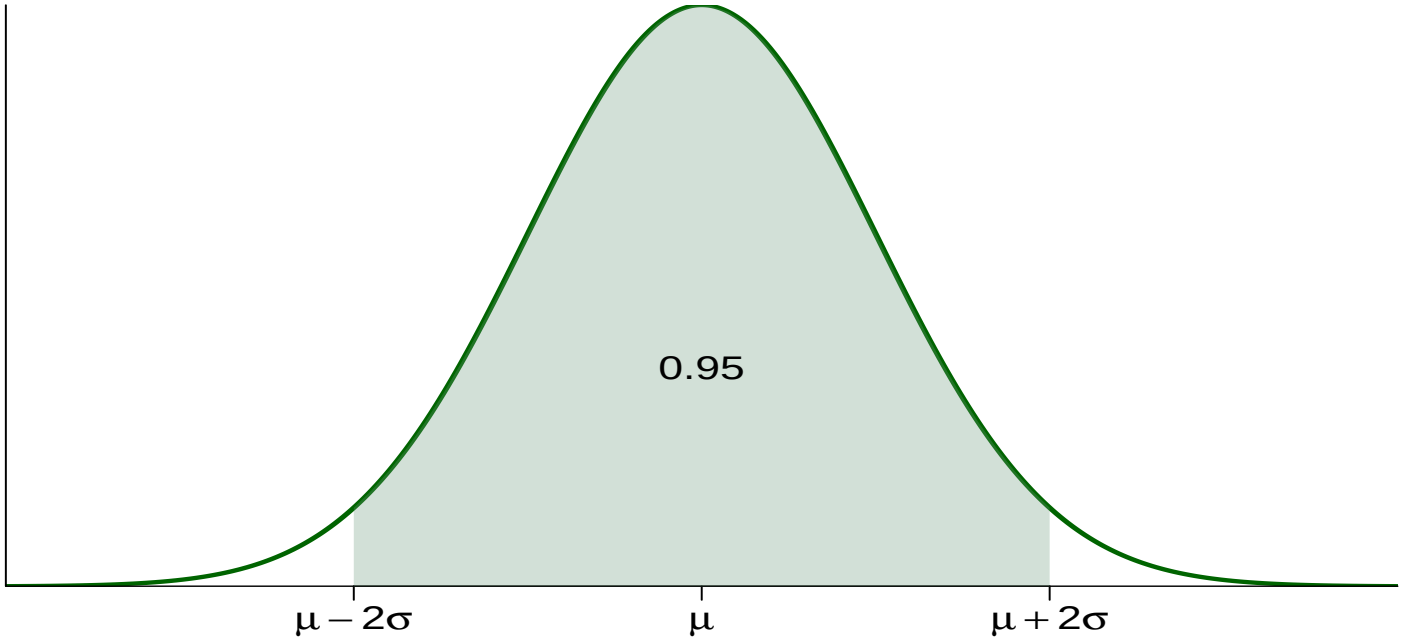
−



$$
\begin{aligned}
0.68 &= \Phi\left(\frac{(\mu+\sigma)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu-\sigma)-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&= 0.84 - 0.16
\end{aligned}
$$

Intervalli di riferimento (continua)

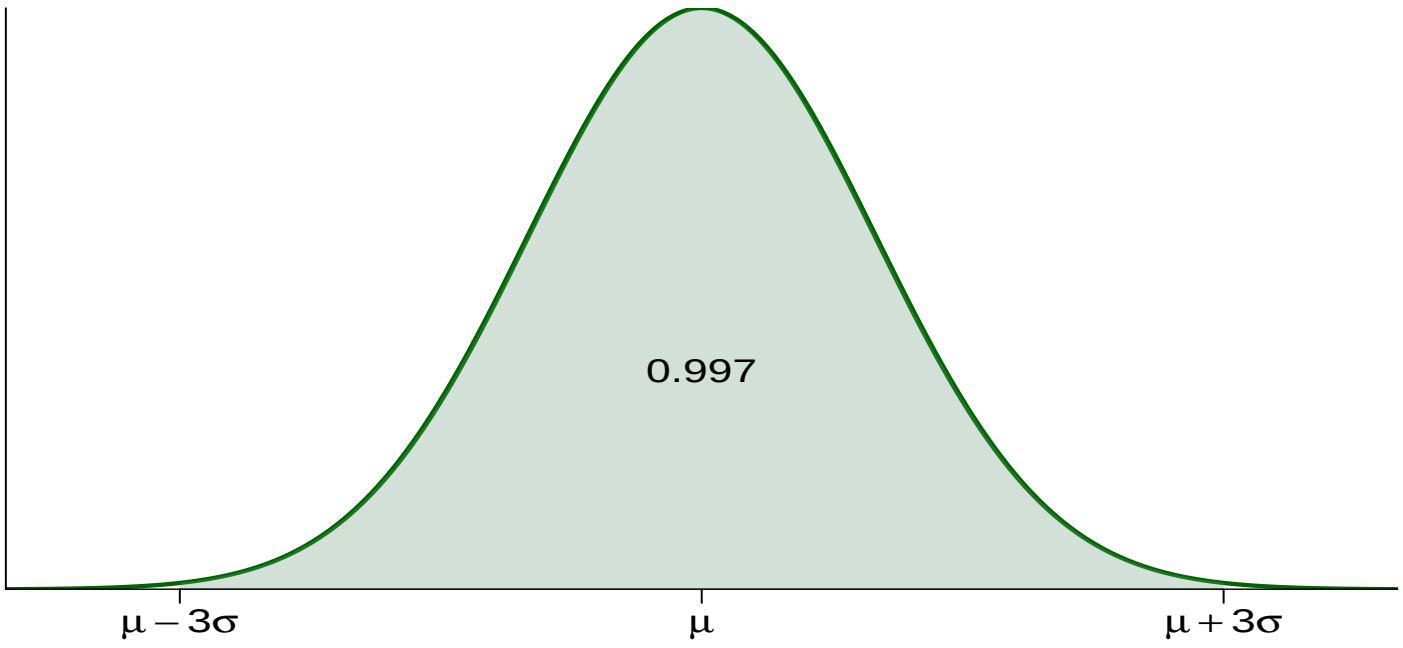
L'intervallo da $\mu - 2\sigma$ a $\mu + 2\sigma$ comprende una probabilità pari a 0.95.



Si verifica in maniera analoga. Provare!

Intervalli di riferimento (continua)

L'intervallo da $\mu - 3\sigma$ a $\mu + 3\sigma$ comprende una probabilità pari a 0.997.



La quasi totalità delle osservazioni dovrebbe trovarsi tra $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$

Esercizio: temperature a TS

- La temperatura media a Trieste in un giorno di aprile è una variabile aleatoria che è ben descritta da una normale di media 13.5.
- Sapendo che è 0.71 la probabilità che la temperatura sia inferiore a 15, possiamo ricavare la deviazione standard?

Esercizio: temperature a TS

- La temperatura media a Trieste in un giorno di aprile è una variabile aleatoria che è ben descritta da una normale di media 13.5.
- Sapendo che è 0.71 la probabilità che la temperatura sia inferiore a 15, possiamo ricavare la deviazione standard?
- La risposta è sì.

Esercizio: temperature a TS

- Ragioniamo così, sia σ la deviazione standard, non nota.
- Conoscendo σ, calcoleremmo la probabilità che la temperatura sia al di sotto di 15 come
$$\Phi\left(\frac{15-13.5}{\sigma}\right).$$
- Noi però sappiamo che questa è pari a 0.71.
- Guardiamo al solito la tavola:

Esercizio: temperature a TS

- Ragioniamo così, sia σ la deviazione standard, non nota.
- Conoscendo σ, calcoleremmo la probabilità che la temperatura sia al di sotto di 15 come
$$\Phi\left(\frac{15-13.5}{\sigma}\right).$$
- Noi però sappiamo che questa è pari a 0.71.
- Guardiamo al solito la tavola:

	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.2							
0.3		0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	
0.4		0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	
0.5		0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	
0.6		0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	
0.7		0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	
0.8							

Esercizio: temperature a TS

- Ragioniamo così, sia σ la deviazione standard, non nota.
- Conoscendo σ, calcoleremmo la probabilità che la temperatura sia al di sotto di 15 come
$$\Phi\left(\frac{15-13.5}{\sigma}\right).$$
- Noi però sappiamo che questa è pari a 0.71.
- Guardiamo al solito la tavola: $\Phi(0.55) = 0.71$ (approssimativamente).

Esercizio: temperature a TS

- Ragioniamo così, sia σ la deviazione standard, non nota.
- Conoscendo σ, calcoleremmo la probabilità che la temperatura sia al di sotto di 15 come
$$\Phi\left(\frac{15-13.5}{\sigma}\right).$$
- Noi però sappiamo che questa è pari a 0.71.
- Guardiamo al solito la tavola: $\Phi(0.55) = 0.71$ (approssimativamente).
- Allora abbiamo
$$\frac{15-13.5}{\sigma} = 0.55$$

Esercizio: temperature a TS

- Ragioniamo così, sia σ la deviazione standard, non nota.
- Conoscendo σ, calcoleremmo la probabilità che la temperatura sia al di sotto di 15 come
$$\Phi\left(\frac{15-13.5}{\sigma}\right).$$
- Noi però sappiamo che questa è pari a 0.71.
- Guardiamo al solito la tavola: $\Phi(0.55) = 0.71$ (approssimativamente).
- Allora abbiamo
$$\frac{15-13.5}{\sigma} = 0.55$$
- da cui
$$\sigma = \frac{15-13.5}{0.55} = 2.7$$
- La temperatura media giornaliera in aprile a Trieste è quindi distribuita secondo una normale con media 13.5 e deviazione standard 2.7.

Temperature a TS

Sapendo ora che la temperatura media giornaliera in aprile a Trieste è quindi distribuita secondo una normale con media 13.5 e deviazione standard 2.7.

1. S'individui un intervallo di temperature che, al 99% contiene la temperatura media.
2. Qual è la probabilità che la temperatura media in un dato giorno sia pari a 3.0 gradi?
3. Qual è la probabilità che la temperatura media in un dato giorno sia inferiore a 3 gradi?
4. Qual è la probabilità che la temperatura media in un dato giorno sia inferiore o uguale a 3 gradi?

Trasformazioni e normalità

Trasformato di una normale

Se X è distribuito secondo una $N(\mu, \sigma^2)$, e a, b sono due numeri reali, allora

$$Y = aX + b$$

è distribuito secondo una $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

- Se il valore di un azione in borsa in un dato giorno espresso in euro è $N(14, \sigma^2 = 2)$ allora il valore espresso in dollari (1\$=0.78€) è normale con media 0.78×14 e varianza $2 \times (0.78)^2$.

Esempio: temperature e trasformazioni

La temperatura media giornaliera in una località, espressa in gradi Farenheit è distribuita secondo una $N(68, \sigma^2 = 9)$, qual è la probabilità che si superino i 20 gradi Celsius?

- Dovremo anzitutto tenere conto che la temperatura in gradi Celsius si ottiene, a partire da quella in gradi Farhenheit come

$$C = (5/9) \times (F - 32)$$

  si ha dunque una trasformazione del tipo $aX + b$ con $a = 5/9$ e $b = -(5/9) \times 32$.
- Applicando la regola sopra si ottiene quindi che la tempratura in gradi Celsius è distribuita seocndo una $N(20, \sigma^2 = 2.78)$.
- (Infatti $(5/9)(68 - 32) = 20$ e $(5/9)^2 \times 9 = 2.78$.)
- Qual è dunque la probabilità richiesta?

Normalità della somma

Somma di normali

Se X_1 è distribuito secondo una $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, e X_2 secondo una $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ e X_1, X_2 sono indipendenti, allora

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2$$

è distribuito secondo una

$$N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2).$$

Esempio: somme

Supponiamo che gli individui di una popolazione abbiano peso (espresso in kg) distribuito secondo una $N(70, \sigma^2 = 50)$.
Due individui, presi a caso nella popolazione, salgono su un montacarichi che porta al più $160kg$, qual è la probabilità che la coppia non superi tale peso?

- Per un individuo a caso, dunque il peso è una $N(70, \sigma^2 = 50)$.
- Il peso totale dei due, $X_1 + X_2$ è distribuito secondo una

$$N(70 + 70 = 140, 50 + 50)$$

- la probabilità cercata è allora

$$\Phi\left(\frac{160 - 140}{10}\right) = \Phi(2) = 0.98$$

Esempio: somme

Supponiamo che gli individui di una popolazione abbiano peso (espresso in kg) distribuito secondo una $N(70, \sigma^2 = 50)$.
Come cambia la risposta se gli individui sono tre?

- Il peso totale dei tre, $X_1 + X_2 + X_3$ è distribuito secondo una

$$N(70 + 70 + 70 = 210, 50 + 50 + 50 = 150)$$

- la probabilità cercata è allora

$$\Phi\left(\frac{160 - 210}{12.25}\right) = \Phi(-4.1) \approx 0$$

Esempio: somme

Supponiamo che gli individui di una popolazione abbiano peso (espresso in kg) distribuito secondo una $N(70, \sigma^2 = 50)$.
Come cambia la risposta se gli individui sono n?

- Il peso totale dei tre, $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$ è distribuito secondo una

$$N(70n, 50n)$$

Esempio: somme

Supponiamo che gli individui di una popolazione abbiano peso (espresso in kg) distribuito secondo una $N(70, \sigma^2 = 50)$.
Come cambia la risposta se gli individui sono n?

- Il peso totale dei tre, $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$ è distribuito secondo una

$$N(70n, 50n)$$

- Cosa possiamo dire della media?
- La media è la somma moltiplicata $1/n$: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, pertanto è distribuita secondo una

$$N\left(70, \frac{50}{n}\right)$$

Normalità della somma

Somma di normali

Siano $X_1, \ldots, X_n$ normali con media μ_i e varianza σ_i^2 indipendenti, allora

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

è distribuito secondo una

$$N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

Normalità della somma

Somma di normali

Siano $X_1, \ldots, X_n$ normali con media μ_i, varianza σ_i^2 e covarianze $\text{cov}(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$, allora

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

è distribuito secondo una

$$N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i>j} \sigma_{ij}\right).$$

Caso di normali identiche

È interessante considerare il caso particolare in cui le variabili X_i sono indipendenti e hanno la medesima distribuzione

Somma e media di n normali iid

Siano $X_1, \ldots, X_n$ indipendenti e

$$X_i \sim (\mu, \sigma^2), \quad i = 1, \ldots, n$$

allora

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Esempio: rendimenti finanziari

Supponiamo di acquistare un titolo finanziario (azione, obbligazione, ...), indichiamo con X_1 il rendimento (percentuale) che riceveremo in un anno, questo è evidentemente aleatorio, supponiamo di sapere anche che

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$

In media, dunque guadagneremo μ_1, mentre σ_1^2 misura quanto rischioso è l'investimento.

Potremo calcolare, ad esempio, la probabilità di subire una perdita:

$$P(X_1 < 0) = \Phi\left(\frac{-\mu_1}{\sigma_1}\right)$$

Se $\mu_1 > 0$ la probabilità di subire una perdita è

- minore di 0.5
- crescente con σ_1

Esempio: rendimenti finanziari

Supponiamo di acquistare un titolo finanziario (azione, obbligazione, ...), indichiamo con X_1 il rendimento (percentuale) che riceveremo in un anno, questo è evidentemente aleatorio, supponiamo di sapere anche che

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$

In media, dunque guadagneremo μ_1, mentre σ_1^2 misura quanto rischioso è l'investimento.

Naturalmente noi, avidi, vorremmo che il rendimento fosse in media il più grande possibile, con un rischio il più basso possibile.

Sul mercato, i titoli con rendimento medio maggiore sono anche più rischiosi.

Esempio: due titoli

Supponiamo ora che ci sia un secondo titolo che possiamo comprare, e che il suo rendimento sia $X_2 \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$, supponiamo anche che questo rendimento sia indipendente dal primo, sia $\mu_2 < \mu_1$ e $\sigma_2^2 < \sigma_1^2$.

Il titolo 2 è allora meno rischioso ma porta a un minore rendimento.

Se voglio stare più tranquillo investo nel titolo 2, mi accontento di qualcosa di meno in termini di rendimento medio, ma la variabilità (e quindi la probabilità di andare in perdita) è minore.

Oppure posso fare qualcosa di meglio per le mie tasche?

Esempio: portafoglio finanziario

Possiamo acquistare i due titoli con rendimenti

$$X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$$

con $\mu_2 < \mu_1$ e $\sigma_2^2 < \sigma_1^2$.

Se suddivido il patrimonio in una quota α nel titolo 1 e $1-\alpha$ nel titolo 2 il rendimento che ottengo è

$$Y = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$$

e per quanto visto è

$$Y \sim \mathcal{N}\left(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2, \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2\right)$$

La probabilità di andare in perdita è allora

$$P(Y<0) = \Phi\left(\frac{-\alpha\mu_1 - (1-\alpha)\mu_2}{\sqrt{\alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2}}\right)$$

Esempio: portafoglio finanziario

Il nostro portafoglio ci dà quindi

- un rendimento medio che è una media dei rendimenti

$$\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$$

  e, si noti, è compreso tra μ_1 e μ_2 qualunque sia α.
- a fronte del rendimento sopra, il rischio è misurato da

$$\alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2$$

La cosa interessante è che esiste $\alpha \in [0,1]$ tale che

$$\alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 < \sigma_i^2, \quad i = 1.2$$

cioè esiste una combinazione dei due titoli che è meno rischiosa del meno rischioso dei due.

Avvertenze

L'esempio sopra è alla base della gestione di un portafoglio finanziario, anche se la realtà è più complessa.

- l'ipotesi di indipendenza non è sempre valida
- l'ipotesi di normalità non è sempre valida
- la varianza non è l'unica misura di rischio da considerare

Indice

Variabili aleatorie continue

La distribuzione normale

Risultati asintotici del calcolo delle probabilità

Variabili aleatorie doppie continue

Riepilogo

Limiti e probabilità

Consideriamo una successione (cioè un infinità numerabile) di v.a.

$$X_1, \ldots, X_n, \ldots$$

dove indichiamo con

$$F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}, \ldots$$

le rispettive distribuzioni.

Ha senso considerare il comportamento della successione al limite.

L'idea è analoga a quella dei limiti in analisi (e di fatto si definiscono i limiti per successioni di v.a. sula bse di limiti di successioni numeriche.)

Si definiscono in CdP diversi tipi di limite per successioni di v.a., ne considereremo due.

Convergenza in probabilità

Convergenza in probabilità

Si dice che X_n converge in probabilità a X e si indica con $X_n \underset{p}{\rightarrow} X$ se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

qualunque sia $\varepsilon > 0$.

Di particolare rilievo il caso in cui X è una costante c.
In tal caso, $X_n \underset{p}{\rightarrow} c$ significa che per n sufficientemente grande è arbitrariamente vicina a 1 la probabilità che X_n sia in un intorno di c arbitrariamente piccolo.

Convergenza in distribuzione

Convergenza in distribuzione

Si dice che X_n converge in distribuzione a $X \sim F$ e si indica con $X_n \underset{d}{\rightarrow} X$ se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Il sapere che una successione converge in distribuzione consente di usare la distribuzione limite come approssimazione per n grande.
A margine notiamo che una ragione per cui la normale è usata molto di frequente, è che è una valida approssimazione per molte situazioni.

Indice

Variabili aleatorie continue

La distribuzione normale

Risultati asintotici del calcolo delle probabilità

Normale come approssimazione della binomiale

Leggi dei grandi numeri

Teorema del limite centrale: normale come approssimazione della media

Variabili aleatorie doppie continue

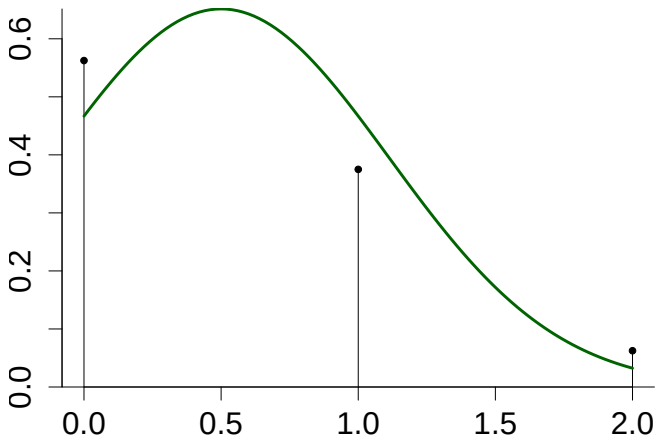
Riepilogo

Normale come approssimazione della binomiale

Consideriamo una binomiale di dimensione n e probabilità p

$$P(S = s) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}.$$

Questa converge in distribuzione a una normale di media np e varianza $np(1-p)$.



Normale come approssimazione della binomiale

In pratica, cosa significa?

Se $S \sim \text{Binom}(n, p)$, ed n è sufficientemente grande, allora **approssimativamente**

$$P(S \leq s) \approx \Phi\left(\frac{s - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

cioè posso usare la normale per calcolare le probabilità riferite alla binomiale.

È interessante scrivere lo stesso risultato anche per la proporzione, cioè per $X = S/n$

$$P(X \leq x) = P(S \leq nx) \approx \Phi\left(\frac{x - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right)$$

Vincere alla *roulette*, approssimazione normale

- Abbiamo calcolato, usando la binomiale, la probabilità di un saldo positivo su 1000 giocate di una quartina, cioè di vincere almeno 112 volte

$$P(N > 0) = \sum_{v=112}^{1000} \binom{1000}{v} \left(\frac{4}{37}\right)^{v} \left(1 - \frac{4}{37}\right)^{1000-v} = 0.3605118$$

- Usando l'approssimazione normale, il numero di vittorie è approssimativamente una normale con media $1000\frac{4}{37} = 108.1081081$ e varianza $1000\frac{4}{37}\frac{33}{37} = 96.4207451$.
- La probabilità che ci siano almeno 112 vittorie è allora

$$1 - \Phi\left(\frac{111.5 - 108.1081081}{\sqrt{96.4207451}}\right) = 1 - \Phi\left(0.3454274\right) = 0.3648865$$

Applicazione binomiale: *overbooking*

Una compagnia aerea accetta prenotazioni per un aereo con 200 posti, sa che delle persone che prenotano un viaggio, il 10% non si presenta.

(1) Si dica qual è la probabilità che l'aereo viaggi pieno se ci sono state 200 prenotazioni.

La compagnia accetta più di 200 prenotazioni (cosiddetto *overbooking*), sperando che non si presentino più di 200 persone.

(2) Si dica qual è la probabilità che qualche passeggero che ha prenotato resti a terra se sono state accettate 220 prenotazioni.

(3) Si dica qual è la probabilità che qualche passeggero che ha prenotato resti a terra se sono state accettate 210 prenotazioni.

Applicazione binomiale: *overbooking*

Il numero di passeggeri che si presenta, X, è

$$X \sim \text{Binom}(m, p) \underset{d}{\rightarrow} N\left(mp, mp(1-p)\right)$$

dove m è il numero di prenotazioni e p la probabilità di presentarsi.

(1) L'aereo viaggia pieno essendo stati prenotati 200 posti con probabilità $0.9^{200} = 7.0550791 \times 10^{-10}$ (senza approssimazione)

(2) Se le prenotazioni sono state $m = 220$ la probabilità che si presentino 200 o meno è

$$\Phi\left(\frac{200.5 - mp}{\sqrt{200p(1-p)}}\right) = 0.71289 \quad \text{[Esatto: 0.7057]}$$

(2) Se le prenotazioni sono state $m = 210$

$$\Phi\left(\frac{200.5 - mp}{\sqrt{200p(1-p)}}\right) = 0.99592 \quad \text{[Esatto: 0.998129]}$$

Elezioni: elettori M5S e approssimazione binomiale

- Abbiamo visto che, preso un votante, la probabilità che abbia votato M5S alle ultime elezioni politiche è 0.2464.
- Supponiamo di prendere 1000 elettori, il numero di persone che hanno votato M5S è una binomiale con media 246.4 e varianza 185.68704.
- (In realtà questa è un'approssimazione che presuppone di estrarre con rimpiazzo, cioè di poter estrarre due volte la stessa persona, l'effetto di questa approssimazione è però trascurabile.)

- Qual è la probabilità che, tra i 1000 più di 230 abbiano votato M5S
- Usando l'approssimazione normale, è

$$p = 1 - \Phi\left(\frac{230.5 - 246.4}{\sqrt{185.68704}}\right) = 1 - \Phi\left(-1.1668266\right) = 0.8783598$$

Elezioni: elettori M5S e approssimazione binomiale (continua)

- Qual è la probabilità che la percentuale di votanti il M5S sia compresa tra 23 e 27 %?
- Possiamo ragionare osservando che, se il numero di votanti è

$$N(n\pi, n\pi(1-\pi))$$

allora la percentuale campionaria è

$$N(\pi, \pi(1-\pi)/n)$$

- la probabilità richiesta è allora

$$\begin{aligned} p &= \Phi\left(\frac{0.27-0.2464}{\sqrt{0.0001857}}\right) - \Phi\left(\frac{0.23-0.2464}{\sqrt{0.0001857}}\right) = \\ &= \Phi\left(1.7318936\right) - \Phi\left(-1.2035193\right) = \\ &= 0.9583537 - 0.1143877 = 0.843966 \end{aligned}$$

Indice

Variabili aleatorie continue

La distribuzione normale

Risultati asintotici del calcolo delle probabilità

- Normale come approssimazione della binomiale
- Leggi dei grandi numeri
- Teorema del limite centrale: normale come approssimazione della media

Variabili aleatorie doppie continue

Riepilogo

Comportamento limite della media

Data una successione di v.a. $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ si considera la successione delle medie

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_i$$

Sotto certe condizioni sulle variabili X_i la successione delle medie ha un comportamento regolare.

Legge debole dei grandi numeri

Legge debole dei grandi numeri

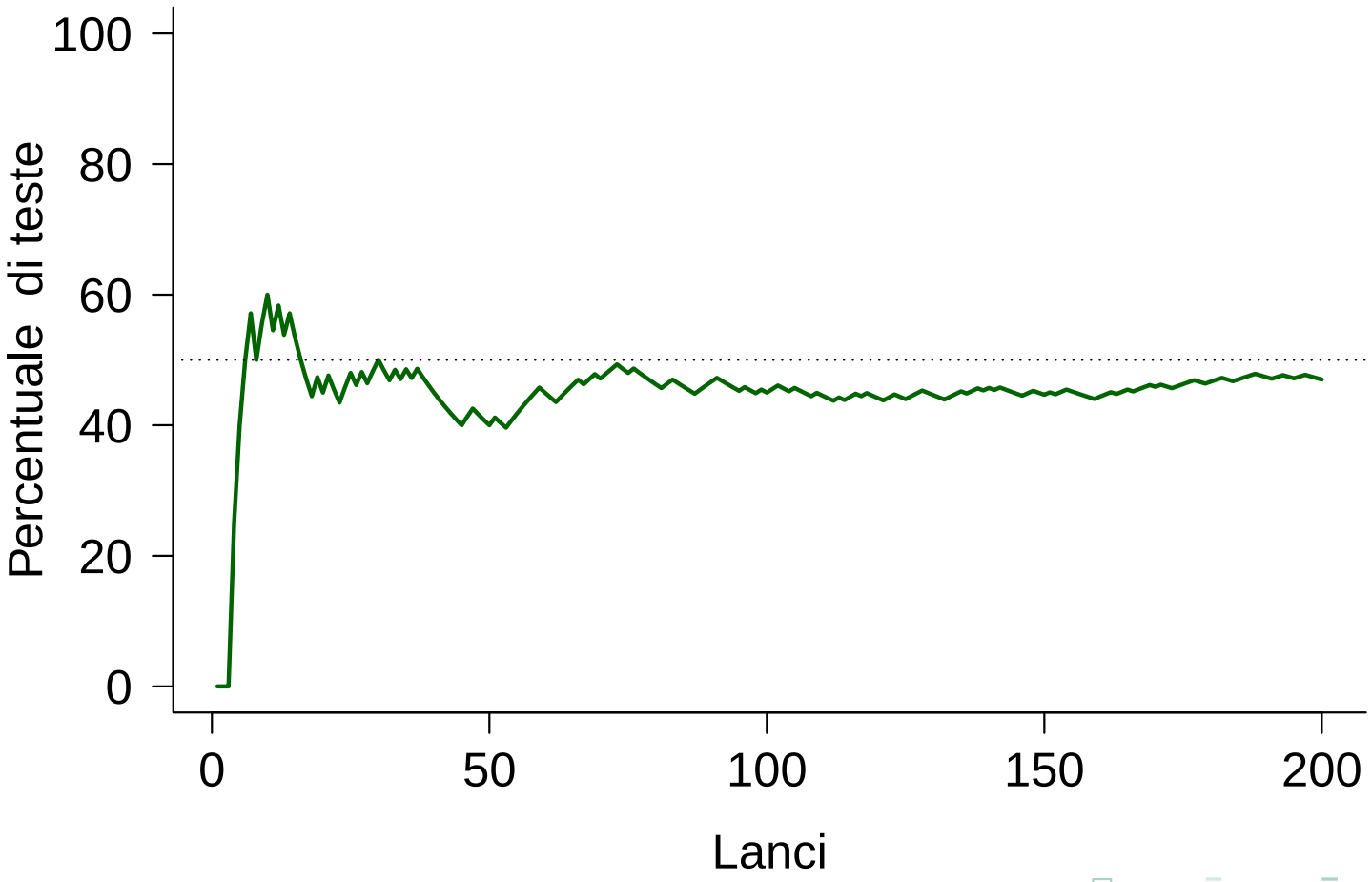
Se $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ hanno la stessa media $E(X_i) = \mu$ e la stessa varianza $V(X_i) = \sigma^2$ finita e sono indipendenti, allora

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \underset{p}{\rightarrow} \mu$$

(Si noti che, evidentemente, esiste una legge forte, che riguarda un diverso tipo di convergenza, più forte della convergenza in probabilità.)

Ricorda qualcosa?

L'interpretazione frequentista è la legge dei grandi numeri applicata a indicatori.



Ricorda qualcosa?

L'interpretazione frequentista è la legge dei grandi numeri applicata a indicatori.
L'idea è che

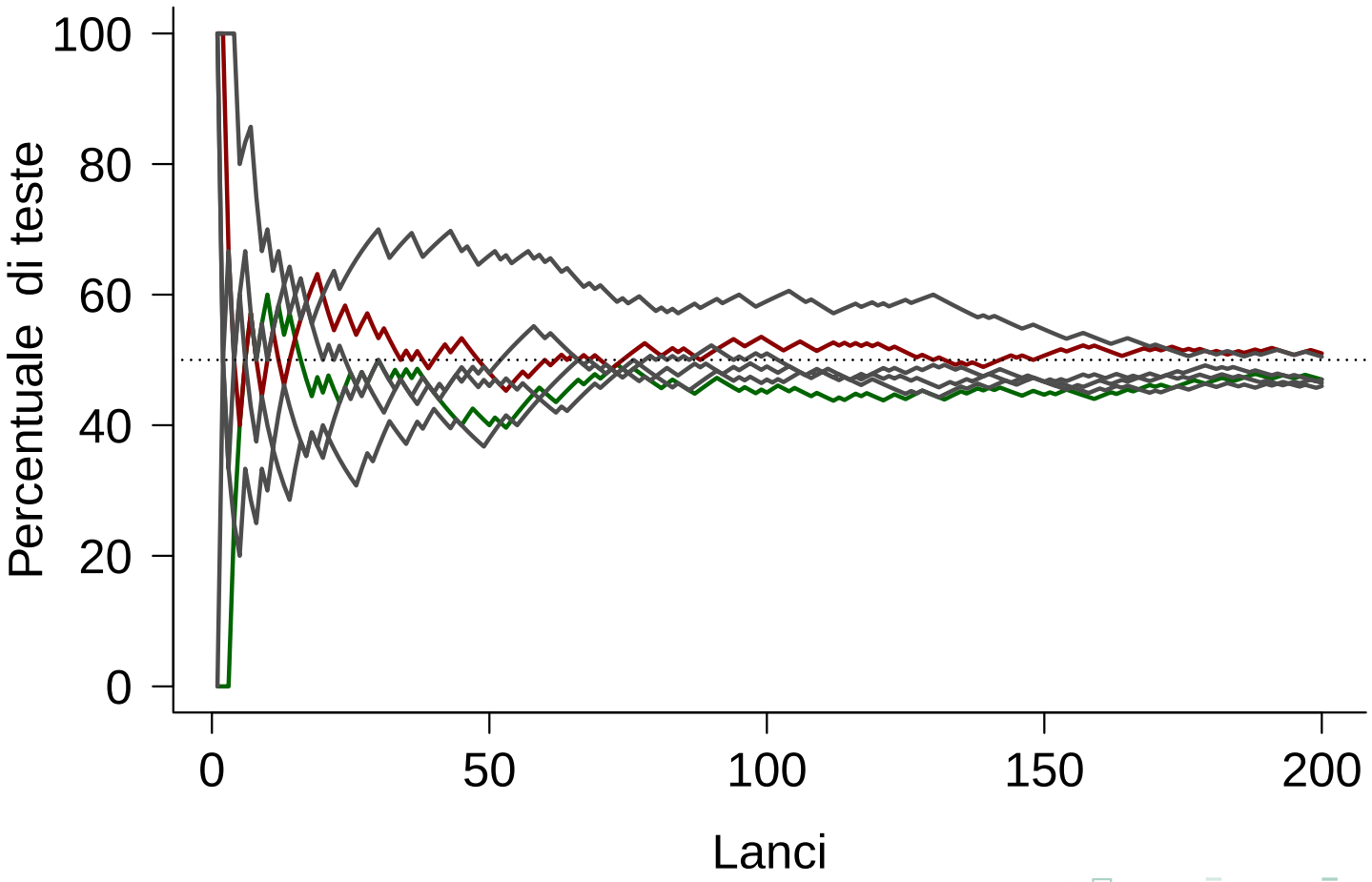
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se testa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora

- la media $\bar{X}_n$ è la percentuale di teste.
- $E(X_i) = P(\text{testa})$.

Ricorda qualcosa?

L'interpretazione frequentista è la legge dei grandi numeri applicata a indicatori.



LGN in pratica

Da un'urna con una porzione $p = 0.5$ di palline bianche estraggo $n_1 = 10$ palline con reimbussolamento.

Il risultato atteso è che $pn_1 = 5$ delle palline estratte siano bianche (media della binomiale), ovvero che la percentuale di bianche estratte sia $p = 0.5$.

Di fatto però non è detto che questo sia esattamente il risultato, possiamo calcolarne la probabilità, detta S_1 la proporzione di palline bianche estratte

$$P(S_1 = 0.5) = 0.246$$

d'altro canto la proporzione potrebbe essere 0.4 o 0.6 con probabilità rispettivamente

$$P(S_1 = 0.4) = 0.205, \quad P(S_1 = 0.6) = 0.205$$

In definitiva, abbiamo una probabilità pari a 0.656 che la proporzione che osservo cada a una distanza non superiore di 0.1 da quella attesa.

LGN in pratica

Se effettuo 10 estrazioni la proporzione che osservo cade a una distanza non superiore di 0.1 da quella attesa con probabilità 0.656.

LGN in pratica

Se effettuo 10 estrazioni la proporzione che osservo cade a una distanza non superiore di 0.1 da quella attesa con probabilità 0.656.

E se le estrazioni fossero 20?

Allora la proporzione di bianche S_2 cade a una distanza non superiore di 0.1 da quella attesa se il numero di bianche è tra 8 e 12, possiamo calcolarne la probabilità e risulta

$$P(0.4 \leq S_2 \leq 0.6) = 0.737$$

LGN in pratica

Se effettuo 10 estrazioni la proporzione che osservo cade a una distanza non superiore di 0.1 da quella attesa con probabilità 0.656.

E se le estrazioni fossero 20?

Allora la proporzione di bianche S_2 cade a una distanza non superiore di 0.1 da quella attesa se il numero di bianche è tra 8 e 12, possiamo calcolarne la probabilità e risulta

$$P(0.4 \leq S_2 \leq 0.6) = 0.737$$

E se le estrazioni fossero 50?

Allora la proporzione di bianche S_3 cade a una distanza non superiore di 0.1 da quella attesa se il numero di bianche è tra 20 e 30, possiamo calcolarne la probabilità e risulta

$$P(0.4 \leq S_3 \leq 0.6) = 0.881$$

LGN in pratica

Se effettuo 10 estrazioni la proporzione che osservo cade a una distanza non superiore di 0.1 da quella attesa con probabilità 0.656.

E se le estrazioni fossero 50?

Allora la proporzione di bianche S_3 cade a una distanza non superiore di 0.1 da quella attesa se il numero di bianche è tra 20 e 30, possiamo calcolarne la probabilità e risulta

$$P(0.4 \leq S_3 \leq 0.6) = 0.881$$

Una prima cosa che ci dice la LGN è che al crescere di n questa probabilità continua ad aumentare.

Più precisamente, aumenta la probabilità che la proporzione osservata cada in un intervallo, di ampiezza fissata, centrato sulla proporzione attesa.

LGN, un altro punto di vista

Possiamo vedere la cosa in un altro modo, invertendo i termini del problema.

Supponiamo di volere che la proporzione di bianche estratte sia a una prefissata distanza da 0.1, diciamo 0.1 come sopra, con una fissata probabilità, diciamo 0.99 (cioè vorrei essere "quasi sicuro" che, fatte le mie estrazioni, la proporzione cada lì dentro.

La LGN mi garantisce che qualunque sia la distanza e qualunque sia la probabilità (minore di 1), trovo una numerosità campionaria che soddisfa la condizione

Cioè esiste certamente n tale che

$$P(0.4 \leq S_n \leq 0.6) \geq 0.99$$

Come ricavo n?

Come ricavo n?

Ricavare n non è semplice, a meno che non possa fare ricorso all'approssimazione normale per la binomiale. Assumendo sia così ricordiamo che la proporzione osservata è approssimativamente distribuita secondo una normale

$$S_n \sim \mathcal{N}\left(0.5, \frac{0.25}{n}\right)$$

allora

$$\begin{aligned} P(0.4 \leq S_n \leq 0.6) &\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(0.6-0.5)}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(0.4-0.5)}{0.5}\right) \\ &= \Phi(\sqrt{n}/5) - \Phi(-\sqrt{n}/5) = 1 - 2\Phi(-\sqrt{n}/5) \end{aligned}$$

Se vogliamo che questo sia pari a 0.99 basta impostare l'equazione

$$1 - 2\Phi(-\sqrt{n}/5) = 0.99$$

da cui

$$n = \left(-5\Phi^{-1}\left((1-0.99)/2\right)\right)^2 = 165.9$$

Come ricavo n più in generale?

Se la proporzione dell'urna è p e vogliamo che la proporzione sia compresa tra $p - \delta$ e $p + \delta$ con probabilità c avremo che

$$S_n \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

e impostiamo l'equazione

$$\begin{aligned} c = P(p - \delta \leq S_n \leq p + \delta) &\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\delta}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &= 1 - 2\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\delta}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \end{aligned}$$

da cui

$$n = \left(-\frac{\sqrt{p(1-p)}\Phi^{-1}((1-c)/2)}{\delta}\right)^2$$

Indice

Variabili aleatorie continue

La distribuzione normale

Risultati asintotici del calcolo delle probabilità

- Normale come approssimazione della binomiale
- Leggi dei grandi numeri
- Teorema del limite centrale: normale come approssimazione della media

Variabili aleatorie doppie continue

Riepilogo

Teorema del limite centrale

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ hanno la stessa media $E(X_i) = \mu$ e la stessa varianza $V(X_i) = \sigma^2$ finita e sono indipendenti e identicamente distribuiti, allora

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \underset{d}{\to} N(0,1)$$

In pratica questo significa che

$$\bar{X}_n \overset{\bullet}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

dove $\overset{\bullet}{\sim}$ sta per "è approssimativamente distribuito come".

Esempio

Supponiamo che gli individui di una popolazione abbiano peso (espresso in kg) distribuito identicamente con media 70 e varianza $\sigma^2 = 50$.

Chiediamoci qual è la proabilità che la media del peso di 25 individui sia compresa tra 68 e 72 kg.

In base al teorema del limite centrale il peso medio dei 50, $\bar{X}_{50}$, è approssimativamente distribuito come una

$$N\left(70, \frac{50}{25}\right)$$

quindi la probabilità cercata è ...

Un'applicazione

Supponiamo che io abbia un gregge di pecore, ... tante pecore.

—

Vorrei sapere quanto vale il gregge e mi serve quindi sapere quanto pesano in media (sia μ il peso medio del gregge).

Le pecore sono tante e non ho tempo per pesarle tutte, se ne peso una mi dice poco.

E se ne peso n?

Per il TLC, il peso medio di n pecore è approssimativamente distribuito come una

$$\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right)$$

dove σ^2 è la varianza del gregge, sia pari a 100.

Peso di una pecora

Sulla base di quello che sappiamo della normale, sono sicuro al 95% che la media del peso delle n pecore cada nell'intervallo

$$\left[\mu - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Se allora peso 100 pecore, al 95% il peso medio cade in

$$[\mu - 2, \mu + 2]$$

cioè sono entro i $2kg$ dal peso medio del gregge.

Indice

Variabili aleatorie continue

La distribuzione normale

Risultati asintotici del calcolo delle probabilità

Variabili aleatorie doppie continue

Riepilogo

Variabili aleatorie congiunte

Anche nel caso di variabili continue, siamo interessati alla distribuzione congiunta.

Funzione di densità congiunta

Date due v.a. X e Y la funzione di densità congiunta $f(x, y)$ è una funzione a valori non negativi tale che

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

Dalla congiunta alle marginali e condizionate

Dalla funzione di densità congiunta si ricavano le funzioni di densità delle singole v.a. (marginali)

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy, \qquad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$$

e si definiscono le funzioni di densità condizionate

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \qquad f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Le due variabili X e Y sono indipendenti se e solo se

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Speranza matematica

Speranza matematica (v.a. continue)

Si definisce speranza matematica di $h(X, Y)$ con (X, Y) avente funzione di densità congiunta $f(x, y)$, la quantità

$$E(h(X, Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) f(x, y) dx dy$$

Resta definita la covarianza.

Indice

Variabili aleatorie continue

La distribuzione normale

Risultati asintotici del calcolo delle probabilità

Variabili aleatorie doppie continue

Riepilogo

Riepilogo

Una v.a. X è distribuita secondo una normale con media 1 e varianza 4. Sono vere o false le seguenti affermazioni?

1. È più probabile che X sia compreso tra 1 e 2 che non che sia compreso tra 2 e 3.
2. È più probabile che X sia compreso tra 1 e 2 che non che sia compreso tra 1 e 2.
3. La probabilità che X sia minore o uguale a 1 è 1/2.

Riepilogo (continua)

Della v.a. X si sa che è normale e che

$$P(X > 2) = 0.5;$$

$$P(0 \leq X \leq 4) = 0.68.$$

Quanto valgono media e varianza?

Riepilogo (continua)

Il MENSA è un'organizzazione i cui membri hanno un QI superiore al 98% della popolazione. Si sa che i QI, nella popolazione, sono distribuiti secondo una normale con media 100. Se il QI minimo per entrare nel MENSA è 132, qual è la deviazione standard (σ) del QI nella popolazione?

1. 2.05
2. 3.2
3. 15.61
4. 32

	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
1.7							
1.8		0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	
1.9		0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	
2		0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	
2.1		0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	
2.2		0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	
2.3							

Riepilogo (continua)

(Agresti, Finlay es. 4.33)
I punteggi dell'Indice di Sviluppo Psicomotorio per misurare lo sviluppo infantile sono approssimativamente normali con media 100 e deviazione standard 15.

1. Selezionando a caso un bambino trova la probabilità che l'indice sia inferiore a 90.
2. Uno studio fa riferimento a un campione casuale di 25 bambini. Qual è la distribuzione della media del campione? Qualè la probabilità che la media del campione sia inferiore a 90.
3. Saresti sorpreso di trovare un individuo con punteggio pari a 90? Saresti sorpreso di trovare una media del campione pari a 90?