Metodi Matematici per l'Ingegneria
Appunti su serie e trasformate di Fourier

Prof. Franco Obersnel

26 maggio 2022

Indice

1 Spazi con prodotto scalare.

1.1 Lo spazio $L^2([-\pi,\pi])$.

Per studiare l'approssimazione di funzioni mediante le serie di Fourier è molto comodo lavorare nello spazio di funzioni $L^2([-\pi,\pi])$ o, più in generale, $L^2([-T/2,T/2])$, con $T>0$, per lo studio di funzioni $T-$periodiche. Ciò che rende molto utile questo approccio è il fatto che $L^2([-T/2,T/2])$ è uno spazio di Hilbert, quindi è un ambiente in cui valgono molte proprietà geometriche.

Ricordiamo che con $L^2(E)$ denotiamo l'insieme quoziente $\frac{X^2(E)}{\sim}$, dove $X^2(E)$ è lo spazio delle funzioni (a valori complessi) a quadrato integrabile su E e $\sim$ è la relazione di equivalenza $f\sim g$ se e solo se $f(x)=g(x)$ q.o. su E.

Considereremo prevalentemente lo spazio

$$L^2([-\pi,\pi])=\frac{X^2([-\pi,\pi])}{\sim},$$

dove

$$X^2([-\pi,\pi])=\{f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}:\|f\|_2^2=\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt<+\infty\},$$

con il prodotto scalare (hermitiano) definito da

$$\langle f\,,\,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,$$

dove due funzioni che differiscono su un insieme di misura nulla sono considerate uguali. La norma nello spazio $L^2([-\pi,\pi])$ è definita da

$$\|f\|_2=\sqrt{\langle f\,,\,f\rangle}=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx}.$$

Considereremo anche funzioni $2\pi-$periodiche definite su $\mathbb{R}$. Spesso confonderemo la funzione periodica con la sua restrizione all'intervallo $[-\pi,\pi]$. Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ è $2\pi-$periodica, avrà quindi significato scrivere $f\in L^2([-\pi,\pi])$, intendendo con questo che $f|_{[-\pi,\pi]}\in L^2([-\pi,\pi])$.

1.2 Spazi di Hilbert.

Sia H uno spazio vettoriale. Diremo prodotto scalare (hermitiano) sullo spazio vettoriale H una funzione

$$\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_2:H\times H\to\mathbb{C}\,,$$

che verifica le seguenti proprietà:

- ⋆ $\langle f\,,\,f\rangle \geq 0$ (naturalmente questo significa che $\langle f\,,\,f\rangle \in \mathbb{R}$) per ogni $f \in H$. Inoltre $\langle f\,,\,f\rangle = 0$ se e solo se $f = 0$;
- ⋆ $\langle f\,,\,g\rangle = \overline{\langle g\,,\,f\rangle}$ per ogni $f, g \in H$;
- ⋆ $\langle \lambda f_1 + \mu f_2\,,\,g\rangle = \lambda\,\langle f_1\,,\,g\rangle + \mu\,\langle f_2\,,\,g\rangle$ per ogni $f_1, f_2, g \in H$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$;
- ⋆ $\langle f\,,\,\lambda g_1 + \mu g_2\rangle = \overline{\lambda}\,\langle f\,,\,g_1\rangle + \overline{\mu}\,\langle f\,,\,g_2\rangle$ per ogni $f, g_1, g_2 \in H$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Se in uno spazio vettoriale H è definito un prodotto scalare $\langle \cdot\,,\,\cdot\rangle$, si può definire una norma ponendo $\|v\| = \sqrt{\langle v\,,\,v\rangle}$. Ricordiamo che in ogni spazio vettoriale dotato di prodotto scalare (e quindi di norma) vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Pertanto si ha

$$|\,\langle f\,,\,g\rangle\,| \leq \|f\|\,\|g\|\,, \quad \forall f, g \in H\,.$$

Uno spazio vettoriale H su cui è definito un prodotto scalare è quindi anche uno spazio normato; se H come spazio normato è uno spazio di Banach (cioè è completo come spazio metrico, cioè ogni successione di Cauchy in H è convergente a qualche elemento di H), si dice che H è uno uno spazio di Hilbert.

• Teorema. $L^2(E)$ è uno spazio di Hilbert.

1.3 Famiglie ortonormali di uno spazio con prodotto scalare.

Sia H uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare $\langle\,,\,\rangle$. Due elementi $v, w \in H$ si dicono ortogonali se $\langle v\,,\,w\rangle = 0$.

• Teorema di Pitagora. Se v e w sono ortogonali si ha

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Infatti

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w\,,\,v+w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v\,,\,w\rangle + \langle w\,,\,v\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

L'uguaglianza si estende per induzione a un numero finito di addendi: se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono a due a due ortogonali, si ha

$$\|v_1 + v_2 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \ldots \|v_n\|^2.$$

Come vedremo fra poco, l'identità di Parseval estende il teorema anche al caso di un numero infinito di addendi.

Sia $\mathcal{N}$ un insieme finito o numerabile di indici (tipicamente $\mathcal{N} = \mathbb{N}$ oppure $\mathcal{N} = \mathbb{Z}$). Una famiglia $\{v_n : n \in \mathcal{N}\} \subset H$ si dice una famiglia ortogonale se

$$\langle v_n\,,\, v_m\rangle = 0 \qquad \text{per ogni } n \in \mathcal{N},\ n \neq m.$$

Una famiglia ortogonale si dice ortonormale se verifica anche $\|v_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathcal{N}$, cioè se

$$\langle v_n\,,\, v_m\rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 \text{ se } n \neq m, \\ 1 \text{ se } n = m. \end{cases}$$

(Il tensore $\delta_{n,m}$ è molto utile nelle notazioni e si dice delta di Kronecker).

• Esempio. La famiglia

$$\{\tfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\}$$

è ortonormale in $L^2([-\pi, \pi])$.

• Esempio. La famiglia

$$\{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \tfrac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \tfrac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}} : n \in \mathbb{N}^+\}$$

è ortonormale in $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.

Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Sia H uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare (non necessariamente completo) e sia assegnato un insieme finito di vettori linearmente indipendenti $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Esiste allora una famiglia ortonormale $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ tale che, per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ si ha

$$e_k \in \mathit{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}.$$

Poniamo

$$z_1 = v_1, \quad e_1 = \tfrac{z_1}{\|z_1\|}.$$

Naturalmente $e_1 \in \mathit{span}\{v_1\}$, $\|e_1\| = 1$. Poniamo poi

$$z_2 = v_2 - \langle v_2\,,\, e_1\rangle\, e_1, \quad e_2 = \tfrac{z_2}{\|z_2\|}.$$

Si ha $e_2 \in \mathit{span}\{v_1, v_2\}$ e $\langle e_2\,,\, e_1\rangle = 0$. Per induzione definiamo

$$z_k = v_k - \langle v_k\,,\, e_1\rangle\, e_1 - \langle v_k\,,\, e_2\rangle\, e_2 - \cdots - \langle v_k\,,\, e_{k-1}\rangle\, e_{k-1}, \quad e_k = \tfrac{z_k}{\|z_k\|}$$

Si ha $e_k \in span\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Inoltre, se $i \neq j$,

$$\langle e_i\,,\, e_j\rangle = \tfrac{1}{\|z_i\|}\Big\langle v_i - \langle v_i\,,\, e_1\rangle\, e_1 - \ldots \langle v_i\,,\, e_j\rangle\, e_j - \cdots - \langle v_i\,,\, e_{j-1}\rangle\, e_{j-1}, e_j\Big\rangle =$$

$$= \tfrac{1}{\|z_i\|}\Big(\langle v_i\,,\, e_j\rangle - \langle v_i\,,\, e_1\rangle\langle e_1\,,\, e_j\rangle - \cdots - \langle v_i\,,\, e_j\rangle\langle e_j\,,\, e_j\rangle - \ldots$$

$$\cdots - \langle v_i\,,\, e_{j-1}\rangle\langle e_{j-1}\,,\, e_j\rangle\Big) = \tfrac{1}{\|z_i\|}\Big(\langle v_i\,,\, e_j\rangle - \langle v_i\,,\, e_j\rangle\Big) = 0.$$

Teorema di migliore approssimazione (proiezione ortogonale). Sia H uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare. Sia W un sottospazio vettoriale di H di dimensione N. Allora, per ogni $v \in H$ esiste uno ed un solo $w \in W$ tale che

$$\|v - w\| = \min\{\|v - z\| : z \in W\}.$$

Il vettore w è la proiezione ortogonale di v su W.

Sia $\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ una base ortonormale per W (che esiste per Gram-Schmidt); poniamo

$$w = \sum_{k=1}^{N} \langle v\,,\, e_k\rangle\, e_k.$$

Osserviamo che, per ogni $j = 1, 2, \ldots, N$, si ha

$$\langle v - w\,,\, e_j\rangle = \langle v\,,\, e_j\rangle - \sum_{k=1}^{N} \langle v\,,\, e_k\rangle\langle e_k\,,\, e_j\rangle = \langle v\,,\, e_j\rangle - \langle v\,,\, e_j\rangle = 0.$$

Pertanto, il vettore $v - w$ è ortogonale a W. Per ogni $z \in W$ il vettore $w - z$ appartiene a W, pertanto

$$\langle v - w\,,\, w - z\rangle = 0$$

e quindi, per Pitagora,

$$\|v - z\|^2 = \|v - w + w - z\|^2 = \|v - w\|^2 + \|w - z\|^2 \geq \|v - w\|^2$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $z = w$. Questo significa che $\|v - w\| = \min\{\|v - z\| : z \in W\}$.

Si osservi che, dal Teorema di Pitagora, per l'ortonormalità della base, si ha

$$\|w\|^2 = \Big\|\sum_{k=1}^{N} \langle v\,,\, e_k\rangle\, e_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\,\langle v\,,\, e_k\rangle\,|^2.$$

Disuguaglianza di Bessel e identità di Parseval. Sia H uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare. Sia $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia ortonormale in H (più in generale si può considerare una famiglia ortonormale $\{e_n : n \in \mathcal{N}\}$, con $\mathcal{N}$ insieme numerabile arbitrario). Per ogni $N \in \mathbb{N}$ e per ogni $v \in H$ poniamo

$$v_N = \sum_{k=1}^{N} \langle v\,,\, e_k\rangle\, e_k.$$

Si ha $\langle v - v_N\,,\, v_N\rangle = 0$, quindi

$$\|v\|^2 = \|v - v_N\|^2 + \|v_N\|^2 \geq \|v_N\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\,\langle v\,,\, e_n\rangle\,|^2, \text{ cioè}$$

$$\sum_{n=1}^{N} |\,\langle v\,,\, e_n\rangle\,|^2 \leq \|v\|^2.$$

Essendo limitata e crescente, la successione $(v_N)_N$ è convergente e si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\,\langle v\,,\, e_n\rangle\,|^2 \leq \|v\|^2 \text{ (Disuguaglianza di Bessel)}.$$

Dall'uguaglianza $\|v\|^2 = \|v - v_N\|^2 + \|v_N\|^2$ si osserva inoltre che

$$\lim_{N\to+\infty} \|v - v_N\| = 0 \text{ se e solo se } \lim_{N\to+\infty} \|v_N\|^2 = \|v\|^2$$

se e solo se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\,\langle v\,,\, e_n\rangle\,|^2 = \|v\|^2 \text{ (Identità di Parseval)}.$$

Una famiglia ortonormale $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ in uno spazio di Hilbert H si dice una base ortonormale se ogni elemento f di H si può rappresentare come somma di una serie del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, e_n$ (la convergenza considerata è naturalmente quella della metrica indotta dal prodotto scalare).

2 Polinomi trigonometrici e polinomi di Fourier.

2.1 Funzioni periodiche

Sia $T \in \mathbb{R}, T > 0$. Una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice $T-$*periodica* se per ogni $x \in E$ si ha $x - T \in E$, $x + T \in E$ e $f(x + T) = f(x)$.

Si parla talvolta di funzione $T-$periodica anche nel caso $T \in \mathbb{C}$, come ad esempio per la funzione esponenziale e^z che è $2\pi i-$periodica. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è $T-$periodica, possiamo studiare la funzione su un qualsiasi intervallo di ampiezza T. In particolare, scriveremo $f \in L^p([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$, intendendo con questo che $f|_{[\frac{T}{2},\frac{T}{2}]} \in L^p([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$. Se f è una funzione $T-$periodica, è naturalmente anche $kT-$periodica per ogni $k \in \mathbb{N}$. Talvolta, ma non sempre, è possibile definire il periodo minimo della funzione, cioè il numero positivo T tale che f è $T-$periodica ma non è $P-$periodica per alcun $0 < P < T$. Le funzioni costanti e la funzione di Dirichlet sono esempi di funzioni periodiche che non hanno un periodo minimo definito.

Il numero $\nu = \frac{1}{T}$ si dice la frequenza della funzione. Il numero $\omega = \frac{2\pi}{T}$ è detto la frequenza angolare di f. Se f è $T-$periodica e $\alpha > 0$, la funzione $g(x) = f(\alpha x)$ è $\frac{T}{\alpha}-$periodica. Infatti si ha

$$g(x + \tfrac{T}{\alpha}) = f(\alpha\big(x + \tfrac{T}{\alpha}\big)) = f(\alpha x + T) = f(\alpha x) = g(x)$$

per ogni x.

Di particolare interesse sono le funzioni $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$, che hanno periodo minimo 2π. Pertanto, ci concentreremo prevalentemente su funzioni $2\pi-$periodiche, sapendo che è facile ricondurre ogni funzione $T-$periodica a una funzione $2\pi-$periodica con un cambio di variabile. In particolare, le funzioni $\operatorname{sen}(\omega x)$ e $\cos(\omega x)$ sono periodiche di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Osservazione. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $T-$periodica. Allora, l'integrale $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx$ non dipende dal punto x_0. Infatti, si ha, usando la formula di Chasles e il cambio di variabile $\tau = x + T$, nonché la periodicità della f:

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{0} f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{x_0+T} f(x)\,dx$$

$$= \int_{x_0+T}^{T} f(\tau - T)\,d\tau + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{x_0+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

2.2 Polinomi trigonometrici.

Sia $T > 0$. Diremo polinomio trigonometrico di ordine N una funzione $T-$periodica del tipo

$$p_N(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(n\omega x + \varphi_n); \quad A_0 \in \mathbb{R}, A_n \in [0, +\infty[, \varphi_n \in] - \pi, \pi].$$

Ogni addendo del polinomio si dice un'armonica elementare del polinomio. $\omega = \frac{2\pi}{T} > 0$ è la frequenza angolare, A_n, per $n \geq 1$, sono le ampiezze, φ_n le fasi. Il polinomio $p_N(x)$ si può anche rappresentare nel modo seguente:

$$p_N(x) = a_0\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}(n\omega x); \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

oppure, in forma complessa,

$$p_N(x) = \sum_{-N}^{N} c_n\, e^{in\omega x}; \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Si osservi che, se $p \in \mathbb{C}[z]$ è un polinomio a coefficienti complessi di grado N, allora la funzione $p(e^{in\omega x})$ è un polinomio trigonometrico di ordine N.

• Esercizio. Si provi che per polinomi trigonometrici a valori reali le tre rappresentazioni sono equivalenti, e si scrivano le relazioni tra i coefficienti.

Diremo spettro di ampiezze del polinomio il vettore $N+1-$dimensionale

$$(|A_0|, A_1, A_2, \ldots, A_N)$$

o, nella seconda rappresentazione,

$$(\frac{|a_0|}{2}, \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \ldots, \sqrt{a_N^2 + b_N^2}),$$

o ancora, nella terza rappresentazione, il vettore $2N+1-$dimensionale

$$(|c_{-N}|, \ldots, |c_0|, \ldots, |c_N|).$$

Diremo spettro di fase il vettore $N+1-$dimensionale

$$(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$$

($\varphi_0 = 0$ se $a_0 \geq 0$, $\varphi_0 = \pi$ se $a_0 < 0$) o, in forma complessa, il vettore $2N+1-$dimensionale

$$(-\varphi_N, \ldots, -\varphi_1, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N).$$

(Nel caso in cui l'ampiezza sia nulla, la fase non è definita; per convenzione poniamo $\varphi = 0$).

Si definisce energia del polinomio $p_N(x)$ il numero

$$\|p_N(x)\|_2^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |p_N(x)|^2\, dx.$$

Sfruttando l'ortogonalità delle armoniche elementari e il Teorema di Pitagora si può calcolare facilmente

$$\|p_N(x)\|_2^2 = T \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 = \frac{T}{2}\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\Big).$$

- Esercizio. Si provi quanto affermato sopra.

- Esercizio. Si consideri il polinomio trigonometrico di ordine 3 ($T = 2\pi$):

$$p_3(x) = -2 + 3\cos(2x) - 2\mathrm{sen}\,(3x) + 2\sqrt{3}\cos(3x).$$

Si determinino l'energia e gli spettri di ampiezza e di fase del polinomio. Si scriva il polinomio nelle altre due rappresentazioni.

2.3 Polinomi trigonometrici in $L^2([-\pi, \pi])$.

Per semplicità di notazioni considereremo per il momento il caso $T = 2\pi$, quindi $\omega = 1$. Consideriamo lo spazio di Hilbert $H = L^2([-\pi, \pi])$. Si è visto che la famiglia $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\}$ è ortonormale in $L^2([-\pi, \pi])$. Per ogni $N \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\mathcal{F}_N = span\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}, |n| \leq N\}.$$

$\mathcal{F}_N$ è uno spazio vettoriale di dimensione $2N + 1$ ed è lo spazio vettoriale dei polinomi trigonometrici di ordine $\leq N$, cioè delle funzioni del tipo

$$p_N(x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}; \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Possiamo rappresentare lo spazio $\mathcal{F}_N$ in modo alternativo, come

$$\mathcal{F}_N = span\{\tfrac{1}{2}, \cos(nx), \mathrm{sen}\,(nx) : n \in \mathbb{N}, |n| \leq N\}.$$

Infatti, dalle formule di Eulero

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\,\mathrm{sen}\,(nx);$$

$$\cos(nx) = \frac{1}{2}e^{inx} + \frac{1}{2}e^{-inx}, \ \mathrm{sen}\,(nx) = \frac{1}{2i}e^{inx} - \frac{1}{2i}e^{-inx}$$

si ottiene

$$\sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} = a_0\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=x1}^{N} b_n \mathrm{sen}\,(nx)$$

se e solo se

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n}; \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, o, equivalentemente,

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0; \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n); \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

Come già visto nel paragrafo precedente, per il Teorema di Pitagora, usando l'ortogonalità delle basi di $\mathcal{F}_N$ considerate, si ha

$$\|p_N(x)\|_2^2 = \Big\| \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \Big\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-N}^{N} c_n^2$$

$$= \|a_0\tfrac{1}{2}\|_2^2 + \sum_{n=1}^{N} \Big(\|a_n \cos(nx)\|_2^2 + \|b_n \mathrm{sen}\,(nx)\|_2^2 \Big)$$

$$= \pi \Big(\tfrac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{N} \big(|a_n|^2 + |b_n|^2\big) \Big)$$

2.4 Polinomi di Fourier.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $2\pi-$periodica e tale che $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^2([-\pi,\pi])$. Per ogni $N \in \mathbb{N}$ fissato, il teorema di migliore approssimazione garantisce l'esistenza di uno e un solo polinomio trigonometrico $s_N \in \mathcal{F}_N$ (la proiezione ortogonale di f su $\mathcal{F}_N$) che verifica

$$\|s_N - f\|_2 = \min\{\|p_N - f\|_2 : p_N \in \mathcal{F}_N\}.$$

Si ha inoltre

$$s_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \langle f \,,\, e_k \rangle\, e_k = \sum_{k=-N}^{N} \left\langle f \,,\, \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx},$$

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle f\,,\, \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

I polinomi $s_N(x)$ sono detti polinomi di Fourier di grado N e i numeri c_k coefficienti di Fourier della funzione f.

Lavorando con la base alternativa $\{\frac{1}{2}, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx) : n \in \mathbb{N}, n \leq N\}$ si ottiene, in modo equivalente,

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\Big),$$

con i coefficienti

$$a_0 = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \left\langle f\,,\, \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx;$$

$$a_k = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \left\langle f\,,\, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx;$$

$$b_k = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \left\langle f\,,\, \frac{\operatorname{sen}(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\, dx.$$

(Si osservi che inserendo $k = 0$ nella seconda formula (quella per il coseno) si riottiene correttamente il valore a_0. Questo è il motivo per cui si preferisce considerare la funzione costante $\frac{1}{2}$ anziché la funzione 1 nella base).

3 Serie di Fourier e convergenza in energia.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $2\pi-$periodica e tale che $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^2([-\pi, \pi])$. Per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$s_{N+1} = s_N(x) + c_{-(N+1)} e^{-(N+1)x} + c_{N+1} e^{i(N+1)x}$$

o, equivalentemente,

$$s_{N+1} = s_N(x) + a_{N+1} \cos((N+1)x) + b_{N+1} \operatorname{sen}((N+1)x).$$

La successione $(s_N)_N$ si può quindi interpretare come la successione delle somme parziali di una serie, detta serie di Fourier della funzione f:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\Big).$$

• Osservazione. La serie di Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ è una serie bilatera. Per definizione poniamo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Questa non è l'usuale definizione di somma di una serie bilatera $\sum_{-\infty}^{+\infty} z_n$, che si dice convergente se convergono entrambe le serie usuali

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_{-n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} z_n.$$

Le due definizioni sono equivalenti se tutte le serie coinvolte sono convergenti.

• Per definire la serie di Fourier non è necessario che la funzione f appartenga allo spazio $L^2([-\pi,\pi])$. Affinché i coefficienti siano definiti è infatti sufficiente assumere $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Infatti, si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$

$$|a_0|, |a_k|, |b_k| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx.$$

Tuttavia, se f non è L^2, non possiamo più lavorare in modo geometrico, in particolare la ridotta $N-$esima della serie non è più la proiezione ortogonale della funzione sullo spazio $\mathcal{F}_N$.

• Esercizi. Si determini la serie di Fourier delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite come estensioni $2\pi-$periodiche delle funzioni

(*i*) $f(x) = \chi|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$, $x \in]-\pi,\pi]$;

(*ii*) $f(x) = x$, $x \in]-\pi,\pi]$;

(*iii*) $f(x) = |x|$, $x \in]-\pi,\pi]$;

(*iv*) $f(x) = x^2$, $x \in]-\pi,\pi]$.

Soluzioni:

$$(i) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} \text{sen}\,(n\pi/2)\, \cos(nx); \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} \text{sen}\,(n\pi/2)\, e^{inx}.$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\mathrm{sen}\,(nx); \qquad \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} i\frac{1}{n}(-1)^n\, e^{inx}.$$

$$(iii) \quad \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x). \qquad (iv) \quad \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx).$$

• Esempio. Consideriamo la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cos(7^n \pi x).$$

La serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$. Infatti si ha

$$\left|\left(\tfrac{3}{4}\right)^n \cos(7^n\pi x)\right| \leq \left(\tfrac{3}{4}\right)^n$$

e quindi la serie converge totalmente per l'M-test di Weierstrass. Osserviamo che la serie delle derivate non converge. La funzione somma $f(x)$ è un esempio di funzione di Weierstrass. È una funzione continua su $\mathbb{R}$ che non è derivabile in alcun punto di $\mathbb{R}$.

3.1 Disuguaglianza di Bessel e identità di Parseval per le serie di Fourier.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $2\pi-$periodica e tale che $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^2([-\pi,\pi])$. Siano c_n, a_n e b_n i suoi coefficienti di Fourier. Applicando la disuguaglianza di Bessel al nostro caso particolare, si ottengono le disuguaglianze

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\left\langle f\,,\, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle\right|^2 \leq \|f\|_2^2$$

e

$$\pi\Big(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)\Big) =$$

$$= \left|\left\langle f\,,\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle\right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\left|\left\langle f\,,\, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle f\,,\, \frac{\mathrm{sen}\,(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\rangle\right|^2\Big) \leq \|f\|_2^2$$

Applicando l'identità di Parseval al nostro caso particolare, si ottiene

$$\lim_{N\to+\infty} \|f - s_N\|_2 = 0 \text{ se e solo se } \lim_{N\to+\infty} \|s_N\|_2 = \|f\|_2.$$

Questo significa che la serie di Fourier di f converge in $L^2([-\pi,\pi])$ a f se e solo se

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \pi\Big(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(|a_n|^2 + |b_n|^2\big)\Big) = \|f\|_2^2.$$

Resta da capire quando questa circostanza accade.

• Notazione. Indicheremo con $\hat{f}(n) = c_n$ i coefficienti di Fourier relativi alla funzione f:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx.$$

Indicheremo con $\hat{f}$ la successione dei coefficienti di Fourier: $\hat{f} = \big(\hat{f}(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$.

3.2 Il teorema di convergenza in media quadratica.

Sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Allora la serie di Fourier di f converge in $L^2([-\pi,\pi])$ alla funzione f e vale l'identità di Parseval:

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2.$$

La convergenza in $L^2([-\pi,\pi])$ viene anche detta convergenza in media quadratica o convergenza in energia. Si dice energia della funzione f il quadrato della sua norma $\|f\|_2^2$.

Per dimostrare il teorema si prova dapprima che esiste $g \in L^2([-\pi,\pi])$ tale che $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e la serie di Fourier di g converge a g (questa è una conseguenza del Teorema di Riesz-Fischer, si può vedere la Proposizione 3.4-1 nel libro di G.C. Barozzi)). Si verifica poi (conseguenza del Teorema di Fejer, si può vedere la Proposizione 3.3-2 nel libro di G.C. Barozzi) che se $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, allora $f(x) = g(x)$ q.o. in $[-\pi,\pi]$.

La "trasformata di Fourier" tra $L^2([-\pi,\pi])$ e ℓ^2. Ad ogni funzione $f \in L^2([-\pi,\pi])$ può essere associata in maniera univoca la successione dei suoi coefficienti di Fourier $\mathcal{F}(f) = \hat{f} = \big(\hat{f}(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$. Si osservi che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2 < +\infty.$$

Viceversa, presa una successione $\big(c_n\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ che verifica $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$ si può considerare la funzione f definita da $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$. Si ottiene quindi una corrispondenza biunivoca $\mathcal{F}$ tra lo spazio $L^2([-\pi,\pi])$ e lo spazio di Hilbert ℓ^2 così definito:

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \|(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\ell_2} = \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty\}$$

con prodotto scalare definito da

$$\langle (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (d_n)_{n\in\mathbb{Z}}\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\overline{d_n}.$$

Si osservi che l'operatore $\mathcal{F} : L^2([-\pi,\pi]) \to \ell^2$ è lineare (come applicazione tra spazi vettoriali), cioè verifica

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $f, g \in L^2([-\pi,\pi])$; inoltre $\mathcal{F}$ conserva anche le norme, a meno della costante moltiplicativa $\sqrt{2\pi}$ (identità di Parseval)

$$\sqrt{2\pi}\|\mathcal{F}(f)\|_{\ell^2} = \|f\|_{L^2([-\pi,\pi])}.$$

L'operatore $\mathcal{F} : L^2([-\pi,\pi]) \to \ell^2$ è quindi un isomorfismo.

Assegnata una funzione $f \in L^2([-\pi,\pi])$, sia $\hat{f}(n) = \rho_n e^{i\vartheta_n}$. Si chiama spettro di ampiezza di f la successione $(\rho_n)_n$ e spettro di fase di f la successione $(\vartheta_n)_n$.

Funzioni pari e dispari. Sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Se f è pari si ha

$$b_n = 0; \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx.$$

Se f è dispari si ha

$$a_n = 0; \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx.$$

• Esempio. Si scriva la serie di Fourier della funzione $2\pi-$periodica definita da $f(x) = \chi|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}(x)$, cioè

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ 0 \text{ se } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup[\frac{\pi}{2}, \pi[\end{cases}$$

estesa a $\mathbb{R}$ per $2\pi-$periodicità.

La funzione f è pari, si ha quindi $b_n = 0$ per ogni n. Inoltre

$$a_0 = \tfrac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \; = 1; \quad a_n = \tfrac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi n} \text{sen}\,(\tfrac{n\pi}{2}).$$

Si osservi che $\text{sen}\,(\frac{n\pi}{2}) = 0$ se n è pari, $\text{sen}\,(\frac{n\pi}{2}) = 1$ se $n = 4k+1$, $\text{sen}\,(\frac{n\pi}{2}) = -1$ se $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$.

La serie di Fourier di f è quindi

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{2n+1} \cos\big((2n+1)x\big).$$

• Esempio. Si scriva la serie di Fourier della funzione $2\pi-$periodica definita da $f(x) = |x|$ su $]-\pi, \pi]$, estesa a $\mathbb{R}$ per $2\pi-$periodicità.

La funzione f è pari, si ha quindi $b_n = 0$ per ogni n. Inoltre $a_0 = \pi$, $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$ se n è dispari, $a_n = 0$ se nè pari.

La serie di Fourier di f è quindi

$$\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{(2n-1)^2} \cos\big((2n-1)x\big).$$

4 Serie di Fourier di funzioni $T-$periodiche.

Finora abbiamo considerato soprattutto funzioni $2\pi-$periodiche. Per studiare funzioni $T-$periodiche con $T > 0$, sarà sufficiente un cambio di variabile per ricondurci facilmente al caso già studiato. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $T-$periodica. Poniamo $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Le basi ortonormali in $L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ che consideriamo sono in questo caso

$$\left\{ \tfrac{e^{in\omega x}}{\sqrt{T}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

oppure

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{\cos(n\omega x)}{\sqrt{T/2}}, \frac{\operatorname{sen}(n\omega x)}{\sqrt{T/2}} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

I coefficienti $\hat{f}(n)$ di Fourier diventano

$$c_n = \tfrac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx$$

in forma esponenziale, oppure

$$a_n = \tfrac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, \cos(n\omega x)\, dx, \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \tfrac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \operatorname{sen}(n\omega x)\, dx \text{ con } n \in \mathbb{N}^+$$

in forma trigonometrica.

5 Regole di calcolo: linearità, traslazioni, dilatazioni.

5.1 Linearità.

Siano $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funzioni $T-$periodiche, $f_1, f_2 \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$, con coefficienti di Fourier rispettivamente $\hat{f}_1(n)$ e $\hat{f}_2(n)$. Sia f una combinazione lineare di f_1 e f_2:

$$f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Allora i coefficienti di Fourier di f sono

$$\hat{f}(n) = \lambda_1 \hat{f}_1(n) + \lambda_2 \hat{f}_2(n).$$

La dimostrazione è immediata conseguenza della linearità dell'integrale.

5.2 Traslazione.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $T-$periodica, $f \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$, con coefficienti di Fourier $\hat{f}(n)$. Sia g una traslazione di f:

$$g(x) = f(x - \tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Allora, i coefficienti di Fourier di g sono

$$\hat{g}(n) = e^{-in\omega\tau}\hat{f}(n).$$

Infatti, usando il cambio di variabile $\xi = x - \tau$ e la periodicità della funzione, per cui l'integrale non cambia se viene calcolato su un intervallo di lunghezza T, si ottiene

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x-\tau)\, e^{-in\omega x}\, dx = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}-\tau} f(\xi)\, e^{-in\omega(\xi+\tau)}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\xi)\, e^{-in\omega(\xi+\tau)}\, d\xi = e^{-in\omega\tau}\hat{f}(n).$$

5.3 Dilatazione/compressione in frequenza.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $T-$periodica, $f \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$, con coefficienti di Fourier $\hat{f}(n)$. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(\alpha\, x).$$

Diremo che g è una dilatazione di f se $\alpha > 1$ e che g è una compressione di f se $0 < \alpha < 1$.

Si osservi che la funzione g è periodica di periodo $\tilde{T} = \frac{T}{\alpha}$ e frequenza angolare $\tilde{\omega} = \omega\alpha$. Proveremo che i coefficienti di Fourier di g sono uguali a quelli di f:

$$\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$$

e la serie di Fourier di g è

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{in\tilde{\omega}x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{in\alpha\omega x}.$$

Infatti, usando il cambio di variabile $\xi = \alpha\, x$, si ottiene

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{\tilde{T}}\int_{-\frac{\tilde{T}}{2}}^{\frac{\tilde{T}}{2}} g(x)\, e^{-in\tilde{\omega}x}\, dx = \frac{\alpha}{T}\int_{-\frac{T}{2\alpha}}^{\frac{T}{2\alpha}} f(x\,\alpha)\, e^{-in\omega\alpha x}\, dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\xi)\, e^{-in\omega\xi}\, d\xi = \hat{f}(n).$$

Il caso $\alpha < 0$. Supponiamo ora $\alpha < 0$ e

$$g(x) = f(\alpha\, x).$$

La funzione g è periodica di periodo $\tilde{T} = -\frac{T}{\alpha}$ e frequenza $\tilde{\omega} = -\omega\alpha$. Si ha allora

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{\tilde{T}} \int_{-\frac{\tilde{T}}{2}}^{\frac{\tilde{T}}{2}} g(x)\, e^{-in\tilde{\omega}x}\, dx = \frac{-\alpha}{T} \int_{\frac{T}{2\,\alpha}}^{-\frac{T}{2\,\alpha}} f(x\,\alpha)\, e^{in\omega\alpha x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} f(\xi)\, e^{in\omega\xi}\, dx = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\xi)\, e^{-i(-n)\omega\xi}\, d\xi = \hat{f}(-n).$$

Pertanto la serie di Fourier di g è

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(-n) e^{-in\tilde{\omega}x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(-n) e^{in\alpha\omega x}\,.$$

6 Il Lemma di Riemann-Lebesgue.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $2\pi-$periodica e tale che $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^2([-\pi, \pi])$. Siano c_n, a_n e b_n i suoi coefficienti di Fourier. Poiché le serie a termini positivi

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad \text{e} \quad \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

convergono, devono essere infinitesime le successioni dei termini generali. Come immediata conseguenza si ottiene il seguente risultato, noto come Lemma di Riemann-Lebesgue: sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$, allora

$$\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

Scrivendo i coefficienti in modo esplicito si ha

$$\lim_{n\to\pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{sen}\,(nx)\, dx = 0.$$

Abbiamo dimostrato il lemma di Riemann-Lebesgue per funzioni $f \in L^2([-\pi, \pi])$. In realtà è possibile dimostrare che il teorema continua a sussistere nell'ipotesi più generale $f \in L^1([-\pi, \pi])$.

Lemma di Riemann-Lebesgue per funzioni L^1. Sia $f \in L^1([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$, allora

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = 0,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(\lambda x)\, dx = 0\,, \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \mathrm{sen}\,(\lambda x)\, dx = 0\,.$$

Dimostrazione. Il risultato è facilmente dimostrato nel caso in cui la funzione f sia la funzione caratteristica di un intervallo $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$. Infatti, in questo caso si ha

$$\left|\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx\right| = \left|\int_a^b e^{i\lambda x}\, dx\right| = \frac{1}{|\lambda|} \left|e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}\right|.$$

Inoltre grazie alla linearità, la tesi è provata anche per una combinazione lineare di funzioni caratteristiche, cioè per ogni funzione a scala del tipo

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, \chi_{[a_k, b_k]}(x)\,,$$

con $a_k < b_k$ e $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

Poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$, esiste una successione di funzioni a scala $(\varphi_n)_n$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad \text{q.o. in } \mathbb{R} \qquad \text{e} \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|_1 = 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\bar{n}$ tale che

$$\|\varphi_{\bar{n}} - f\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Poiché, per questo $\bar{n}$ fissato, si ha

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi_{\bar{n}}(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = 0,$$

esiste λ_0 tale che, per ogni $|\lambda| > \lambda_0$, si ha

$$\left|\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi_{\bar{n}}(x)\, e^{i\lambda x}\, dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Si ottiene pertanto, se $|\lambda| > \lambda_0$,

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx\right| &= \left|\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big(f(x) - \varphi_{\bar{n}}(x)\Big)\, e^{i\lambda x}\, dx + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi_{\bar{n}}(x)\, e^{i\lambda x}\, dx\right| \\ &= \|f - \varphi_{\bar{n}}\|_1 + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon\,. \end{aligned}$$

7 Il problema della convergenza puntuale.

Sappiamo che se $f \in L^2([-\pi, \pi])$, allora la serie di Fourier associata a f converge a f in media quadratica, cioè

$$\lim_{N \to +\infty} \|f - s_N\|_2 = 0$$

dove

$$s_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}.$$

Tuttavia non possiamo aspettarci che la serie coverga puntualmente a f.

• Esempio. Consideriamo la funzione $2\pi-$periodica definita da $f(x) = x$ su $]-\pi, \pi]$, estesa a $\mathbb{R}$ per $2\pi-$periodicità. La serie di Fourier di f è

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen}(nx).$$

Si osservi che la somma della serie nei punti $-\pi$ e π assume il valore 0, diverso da $f(-\pi) = f(\pi) = \pi$.

Esistono anche esempi di funzioni continue e $2\pi-$periodiche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ per le quali la serie non converge puntualmente a f. Paul Du Bois-Reymond nel 1873 ha costruito un esempio di funzione continua f tale che la sua serie di Fourier calcolata in 0 non converge a $f(0)$.

La situazione è ben più complicata, come mostra il seguente risultato:

• Teorema di Yitzhak Katznelson e Jean-Pierre Kahane (1966). Per ogni insieme di misura nulla (secondo Lebesgue) $E \subset [-\pi, \pi]$, esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua e $2\pi-$periodica tale che, per ogni $x \in E$, la sua serie di Fourier calcolata in x non converge a $f(x)$.

Se ci accontentiamo di convergenza quasi ovunque, le cose vanno un po' meglio. Vale infatti il seguente risultato:

• Teorema di Lennart Carleson (1966). Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Allora, per quasi ogni $x \in [-\pi, \pi]$ si ha

$$\lim_{N \to +\infty} s_N(x) = f(x).$$

Un anno più tardi, Richard Allen Hunt ha dimostrato che lo stesso teorema vale per una funzione $f \in L^p([-\pi, \pi])$, con $p > 1$.

Ci si può chiedere se il risultato continua a valere anche se $f \in L^1([-\pi, \pi])$. La risposta è negativa, come provato dal seguente teorema:

• Teorema di Andrej Nikolaevič Kolmogorov (1926). Esiste una funzione $f \in L^1([-\pi, \pi])$ tale che, per ogni $x \in [-\pi, \pi]$, la sua serie di Fourier calcolata in x non converge a $f(x)$.

Per una funzione $f \in L^1([-\pi, \pi])$, non è neppure vero in generale che la serie di Fourier converge alla funzione in norma L^1.

Abbiamo visto che neppure la continuità della funzione garantisce la convergenza puntuale della serie di Fourier. Cerchiamo ora di trovare alcuni criteri che garantiscono tale convergenza.

7.1 Il Teorema di Dirichlet-Weierstrass (enunciato).

• Criterio di Dirichlet-Weierstrass. Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto nel quale esistono finiti i seguenti limiti

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-); \qquad \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0^+);$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0} = f'(x_0^-); \qquad \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} = f'(x_0^+).$$

Allora si ha

$$\lim_{N \to +\infty} s_N(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2},$$

cioè la serie di Fourier di f calcolata in x_0 converge al valore medio $\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$.

(I numeri $f'(x_0^-)$ $f'(x_0^+)$ vengono detti pseudoderivate sinistra e destra e potrebbero essere diversi dalle derivate).

In particolare, se la funzione f è continua in x_0 e in tale punto esistono le derivate destra e sinistra di f, allora la serie di Fourier di f in x_0 converge a $f(x_0)$.

Le funzioni più comuni che verificano il criterio di Dirichlet-Weierstrass sono le funzioni C^1 a tratti. Ricordiamo le seguenti definizioni.

• Funzioni continue a tratti. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ si dice continua a tratti se esiste una partizione

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

dell'intervallo $[a, b]$ per cui:

- ⋆ la restrizione di f all'intervallo aperto $]x_{k-1}, x_k[$ è continua per ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$,

⋆ per ogni $k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $h \in \{1, \dots, n\}$ esistono finiti i seguenti limiti

$$f(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} f(x)\,, \quad f(x_h^-) = \lim_{x \to x_k^-} f(x)\,.$$

Notiamo che una funzione continua a tratti ammette solo punti di discontinuità di tipo *salto*. Inoltre, una funzione continua a tratti è limitata, quindi appartiente a $L^p([a,b])$ per ogni $p \in [1, +\infty]$, in particolare $f \in L^2([a,b])$.

• Funzioni C^1 a tratti. Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ si dice C^1 a tratti se è continua a tratti ed esiste una partizione

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{m-1} < \tau_m = b$$

dell'intervallo $[a,b]$ per cui:

⋆ la restrizione di f all'intervallo aperto $]\tau_{k-1}, \tau_k[$ è C^1 per ogni $k \in \{1, \dots, m\}$,

⋆ per ogni $k \in \{0, \dots, m-1\}$ e $h \in \{1, \dots, m\}$ esistono reali i seguenti limiti

$$f'(\tau_k^+) = \lim_{x \to \tau_k^+} f'(t)\,, \quad f'(\tau_h^-) = \lim_{x \to \tau_k^-} f'(t)\,.$$

Criterio per le funzioni C^1 a tratti. Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ una funzione C^1 a tratti. Allora si ha

$$\lim_{N \to +\infty} s_N(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2},$$

per ogni $x_0 \in]-\pi, \pi[$, e

$$\lim_{N \to +\infty} s_N(\pi) = \lim_{N \to +\infty} s_N(-\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2},$$

cioè la serie di Fourier di f calcolata in x_0 converge al valore medio $\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$.

• Funzioni regolarizzate. Sia $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua a tratti. Diremo regolarizzata di f una funzione $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ che soddisfa, in ogni punto $x_0 \in E$,

$$\tilde{f}(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}.$$

Con questa terminologia, si può dire che, se f è una funzione periodica C^1 a tratti, allora la sua serie di Fourier converge puntualmente alla sua regolarizzata $\tilde{f}$.

7.2 Il nucleo di Dirichlet.

Per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ definiamo la funzione $D_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} & \text{se } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \\ \frac{2N+1}{2\pi} & \text{se } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La funzione D_N si dice $N-$esimo nucleo di Dirichlet.

• Osservazione. Per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ la funzione D_N è pari e $2\pi-$periodica. Si ha infatti

$$D_N(-x) = D_N(x); \qquad D_N(x + 2\pi) = D_N(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

• Osservazione. Per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ e $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(N+1)ix} - e^{-Nix}}{e^{ix} - 1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}.$$

Infatti, calcoliamo, usando la nota formula per le progressioni geometriche,

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = e^{-iNx}\Big(1 + e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{2Nix}\Big) = e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1}$$

$$= \frac{e^{(N+1)ix} - e^{-Nix}}{e^{ix} - 1}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $e^{-\frac{1}{2}ix}$ e usando le formule per il seno si ottiene infine:

$$= \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}} = \frac{\operatorname{sen}\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

• Osservazione. Per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ si ha

$$\int_0^{\pi} D_N(x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

Infatti, poiché la funzione D_N è pari, si ha $\displaystyle\int_0^{\pi} D_N(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\, dx$. Inoltre, per ogni n con $-N \leq n \leq N$ e $n \neq 0$, si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, dx = 0.$$

Teorema. Rappresentazione della ridotta mediante il nucleo di Dirichlet. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una funzione $2\pi-$periodica e tale che $f|_{[-\pi,\pi]}\in L^1([-\pi,\pi])$. Allora, per ogni $N\in\mathbb{N}^+$, la ridotta $N-$esima della serie di Fourier

$$S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{-int}\,dt\right)e^{inx}$$

si può rappresentare in modo compatto mediante la funzione integrale

$$S_N(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,D_N(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,D_N(x-t)\,dt.$$

Infatti, cambiando variabile $t\to\tau=t-x$ nell'integrale, si calcola

$$S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{-in(t-x)}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+\tau)\,e^{-in\tau}\,d\tau$$

e, usando la periodicità delle funzioni e la simmetria di D_N rispetto alla n,

$$=\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\left(f(x+\tau)\,\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}e^{-in\tau}\right)d\tau=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+\tau)\,\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}e^{in\tau}\right)d\tau$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\tau)\,D_N(\tau)\,d\tau.$$

7.3 Il Teorema di Dirichlet-Weierstrass (dimostrazione).

Dimostriamo il teorema nell'ipotesi semplificata che f sia continua. In questo caso $f(x_0^+)=f(x_0)=f(x_0^-)$ e le pseudoderivate coincidono con le derivate (destra e sinistra rispettivamente). La dimostrazione nel caso generale è leggermente più complicata nelle notazioni, ma è essenzialmente la stessa.

Sia $x_0\in[-\pi,\pi]$. Ricordiamo che con $D_N(x)$ indichiamo il nucleo di Dirichlet. Si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)\,dt=1 \text{ e } S_N(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,D_N(t)\,dt,$$

quindi possiamo scrivere

$$S_N(x_0)-f(x_0)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+t)\,D_N(t)\,dt-f(x_0)\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x_0+t)-f(x_0)\right)\,D_N(t)\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x_0+t)-f(x_0)\right)\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{(N+1)it}-e^{-Nit}}{e^{it}-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}\,\frac{t}{e^{it}-1}\left(e^{(N+1)it}-e^{-Nit}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,e^{(N+1)it}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,e^{-Nit}\,dt,$$

dove abbiamo posto
$$g(t) = \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}\,\frac{t}{e^{it}-1}.$$

La funzione $\frac{t}{e^{-ix}-1}$ è limitata (limite notevole!) e, per ipotesi, anche il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$ è limitato (perché esistono le derivate destra e sinistra). Perciò $g \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ e vale il lemma di Riemann-Lebesgue. Si ha quindi

$$\lim_{N\to+\infty}\left(S_N(x_0)-f(x_0)\right)$$
$$= \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,e^{-(-N-1)it}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,e^{-Nit}\,dt\right)$$
$$= \lim_{N\to+\infty}\left(\hat{g}(-(N+1)) - \hat{g}(N)\right) = 0.$$

7.4 Altri criteri di convergenza puntuale.

Una funzione che presenta una derivata infinita in un punto (ad esempio $f(x) = \sqrt[3]{x}$) non verifica i criteri considerati sopra. Per considerare funzioni di questo tipo (dette Hölderiane) è necessario ricorrere ad altri criteri. Un altro, più generale, criterio per la convergenza puntuale della serie di Fourier è il criterio di Dini.

• Criterio di Dini. Sia $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto nel quale esistono finiti i seguenti limiti

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-); \qquad \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0^+).$$

Definiamo la funzione $h : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0+t)-f(x_0^-)}{e^{it}-1} & \text{se } -\pi \le t < 0; \\ \frac{f(x_0+t)-f(x_0^+)}{e^{it}-1} & \text{se } 0 < t \le \pi. \end{cases}$$

Supponiamo che $h \in L^1([-\pi,\pi])$. Allora si ha

$$\lim_{N\to+\infty} s_N(x_0) = \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}.$$

Le condizioni del criterio di Dini possono non essere facili da verificare. Le condizioni di Hölder ci possono aiutare a questo scopo.

• Criterio di Hölder. Sia $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto nel quale esistono finiti i seguenti limiti

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-); \qquad \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0^+).$$

Supponiamo che la funzione f soddisfi le condizioni di Hölder in x_0, cioè esistono costanti $L > 0$ e $\alpha \in]0,1]$ tali che

$$|f(x_0+t) - f(x_0^-)| \leq L|t|^\alpha; \quad \text{e} \quad |f(x_0+t) - f(x_0^+)| \leq L|t|^\alpha.$$

Allora si ha

$$\lim_{N\to+\infty} s_N(x) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}.$$

Infatti, dalle condizioni di Hölder si ottengono le disuguaglianze

$$\left|\frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t}\right| \leq L|t|^{1-\alpha}; \quad \text{e} \quad \left|\frac{f(x_0+t) - f(x_0^+)}{t}\right| \leq L|t|^{\alpha-1}.$$

Osserviamo che la funzione $\frac{t}{e^{it}-1}$ è limitata perchè $\lim_{t\to 0} \dfrac{t}{e^{it}-1} = -i$. Possiamo allora scrivere, per $-\pi \leq t < 0$,

$$|h(t)| = \left|\frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t} \frac{t}{e^{it}-1}\right| \leq L'|t|^{1-\alpha};$$

e, per $0 < t \leq \pi$,

$$|h(t)| = \left|\frac{f(x_0+t) - f(x_0^+)}{t} \frac{t}{e^{it}-1}\right| \leq L'|t|^{1-\alpha}.$$

Poiché $1-\alpha \in [0,1[$, si conclude che $h \in L^1([-\pi,\pi])$ e le ipotesi del criterio di Dini sono soddisfatte.

• Esempi. $x, |x|, x^2, sign(x), \sqrt{|x|}$.

8 Il problema della convergenza uniforme.

Se la serie di Fourier associata a una funzione f converge uniformemente a f, evidentemente f deve essere continua perché limite uniforme di funzioni continue. Mostriamo che per una funzione continua la convergenza è uniforme se la serie dei coefficienti è limitata.

8.1 Il teorema di convergenza uniforme.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua e $2\pi-$periodica. Supponiamo che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| < +\infty, \qquad \text{con } \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Allora la serie di Fourier $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$ converge uniformemente a f.

Dimostrazione. Si ha $\left|\hat{f}(n)e^{inx}\right| = |\hat{f}(n)|$. Per il test di Weierstrass la serie $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$ converge uniformemente a una funzione g, che deve essere continua e $2\pi-$periodica. La convergenza uniforme implica la convergenza in $L^2([-\pi,\pi])$, quindi la serie converge a g in $L^2([-\pi,\pi])$. D'altra parte, $f \in L^2([-\pi,\pi])$ e quindi la serie di Fourier di f converge anche a f in $L^2([-\pi,\pi])$. Quindi $f = g$ quasi ovunque in $[-\pi,\pi]$, ma, essendo entrambe funzioni continue, devono coincidere sull'intero intervallo.

In particolare, sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua e $2\pi-$periodica e supponiamo inoltre che sia C^1 a tratti. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente a f.

8.2 Il teorema di convergenza uniforme per funzioni C_1 a tratti.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua e $2\pi-$periodica. Supponiamo inoltre che f sia C^1 a tratti. Allora la serie di Fourier $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$ converge uniformemente a f.

Dimostrazione. Proveremo che $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| < +\infty$. Poiché la funzione derivata f' è continua a tratti, la sua serie di Fourier converge in energia a f' e vale l'identità di Parseval, in particolare

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}'(n)|^2 < +\infty.$$

Si calcola, integrando per parti,

$$\widehat{f'}(n) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2\pi} \Big[f(x)\, e^{-inx}\, dx \Big]_{-\pi}^{\pi} + in\tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = in\hat{f}(n).$$

Osserviamo che, in particolare, si ha

$$\widehat{f'}(0) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = 0.$$

Ricordiamo la disuguaglianza

$$|a \cdot b| \leq \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

valida per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Si ottiene quindi la stima, per $n \geq 1$,

$$|\hat{f}(n)| = \tfrac{1}{n} \cdot |\hat{f}'(n)|^2 \leq \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{n^2} + |\hat{f}'(n)|^2\Big).$$

Per confronto con la serie convergente di termine generale $\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2} + |\hat{f}'(n)|^2\Big)$, si conclude.

8.3 Funzioni assolutamente continue.

La convergenza uniforme è garantita anche sotto ipotesi più deboli: basta chiedere che la funzione f sia assolutamente continua e che la sua derivata f' appartenga allo spazio $L^2([0,T])$. Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice assolutamente continua se esiste una funzione $h \in L^1([a,b])$ tale che

$$f(x) = f(a) + \int_a^x h(s)\,ds\,.$$

In particolare, le funzioni assolutamente continue sono funzioni continue e sono derivabili quasi ovunque nel loro dominio, con derivata che coincide quasi ovunque con la funzione h che ne caratterizza la proprietà. Inoltre, date due funzioni f, g assolutamente continue vale per loro la ben nota formula di integrazione per parti:

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.$$

9 Serie di Fourier della derivata e della primitiva.

9.1 La serie di Fourier della derivata.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $T-$periodica, assolutamente continua con derivata $f' \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$. Sia $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\widehat{f'}(n) = in\omega\,\hat{f}(n).$$

Si ha, integrando per parti,

$$\widehat{f'}(n) = \tfrac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x)\,e^{-in\omega x}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{T}\Big[f(x)\,e^{-in\omega x}\,dx\Big]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + in\omega\tfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,e^{-in\omega x}\,dx = in\omega\hat{f}(n).$$

Osserviamo che, in particolare, si ha

$$\widehat{f'}(0) = \tfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x)\,dx = 0.$$

Procedendo per induzione si può facilmente calcolare la serie di Fourier delle derivate successive. Sia $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $T-$periodica, derivabile k volte in $\mathbb{R}$, e sia $f^{(k)}$ localmente integrabile su $\mathbb{R}$. Sia $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\widehat{(f^{(k)})}(n) = (in\omega)^k \hat{f}(n).$$

Derivazione a termine a termine di una serie di Fourier. Sia f : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $T-$periodica, assolutamente continua con derivata $f' \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$. Sia $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Allora la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} in\omega\hat{f}(n)e^{in\omega x}$$

converge a f' in $L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ e quasi ovunque in $\mathbb{R}$.

Questo significa che se una funzione è rappresentata come serie di Fourier, e la sua derivata è in L^2, allora è lecito calcolare la derivata della serie derivando a termine a termine:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\,e^{in\omega x}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\,\frac{d}{dx}e^{in\omega x}\,.$$

• Esempio. Consideriamo la funzione $2\pi-$periodica f definita da $f(x) = |x|$ su $[-\pi, \pi]$. La funzione f è continua su $\mathbb{R}$ e C^1 a tratti, quindi è assolutamente continua. Si ha allora,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)$$

e la convergenza è uniforme su $\mathbb{R}$. Inoltre si ha

$$f'(x) = sgn(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}\text{sen}\,((2n-1)x)$$

q.o. in $[-\pi, \pi]$.

9.2 La serie di Fourier della primitiva.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $T-$periodica, $f \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ e tale che $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx = 0$. Poniamo

$$F(x) = \int_{-\frac{T}{2}}^{x} f(t)\,dt.$$

Allora la funzione F è $T-$periodica, derivabile quasi ovunque (infatti è assolutamente continua) con $F'(x) = f(x)$ q.o., e i suoi coefficienti di Fourier sono

$$\widehat{F}(0) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(x)\,dx; \qquad \widehat{F}(n) = \frac{\hat{f}(n)}{in\omega} \text{ per } n \neq 0.$$

Possiamo quindi scrivere

$$F(x) = \widehat{F}(0) + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\hat{f}(n)}{in\omega}\, e^{in\omega x}.$$

Si osservi in particolare che

$$0 = F(\tfrac{T}{2}) = \widehat{F}(0) + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\hat{f}(n)}{in\omega}(-1)^n\,,$$

da cui

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^{n+1}\hat{f}(n)}{in\omega}\,.$$

Integrazione a termine a termine di una serie di Fourier. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $T-$periodica, $f \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ e tale che $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx = 0$. Allora la serie

$$\widehat{F}(0) + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\hat{f}(n)}{in\omega}\, e^{in\omega x}$$

converge uniformemente alla funzione integrale $F(x) = \int_{-\frac{T}{2}}^{x} f(t)\,dt$.

Questo significa che se una funzione L^2 a media nulla è rappresentata come serie di Fourier, allora è lecito calcolare l'integrale della serie integrando a termine a termine:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{x} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\, e^{in\omega t}\right) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) \int_{-\frac{T}{2}}^{x} e^{in\omega t}\,dt.$$

• Esempio. Consideriamo la funzione $f(x) = x$ su $[-\pi, \pi]$. La serie di Fourier di f è la funzione

$$f(x) \simeq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

Si ha

$$x^2 = 2\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt + \pi^2.$$

Quindi si può calcolare

$$x^2 = \pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_{-\pi}^{x} \operatorname{sen}(nt)\,dt$$

$$= \pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Si è usata la ben nota formula (problema di Basilea) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. In alternativa si poteva calcolare ricordando che

$$\pi^2 - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \widehat{F}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

9.3 Regolarità e ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $T-$periodica, $f \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ (o anche $f \in L^1([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$). Per il Lemma di Riemann-Lebesgue si ha che

$$\lim_{|n|\to+\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Supponiamo ora che $f \in C^k(\mathbb{R})$, con $k \in \mathbb{N}^+$. Si ha allora

$$\lim_{|n|\to+\infty} (in\omega)^k \hat{f}(n) = \widehat{(f^{(k)})}(n) = 0,$$

e quindi

$$\lim_{|n|\to+\infty} n^k|\hat{f}(n)| = 0.$$

Questo significa che la successione dei coefficienti di Fourier di f è infinitesima di ordine maggiore di k.

Osserviamo che non vale l'implicazione opposta. Ad esempio, si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x).$$

Osserviamo che
$$\lim_{|n|\to+\infty} n\hat{f}(n) = 0.$$
Tuttavia, si ha $f(x) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)$ in $[-\pi, \pi]$ e quindi $f \notin C^1([-\pi, \pi])$.

Vale comunque il seguente risultato.

• Supponiamo $f \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ ed esista $k \in \mathbb{N}^+$ tale che
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n^k \hat{f}(n)| < +\infty.$$
Allora la funzione f coincide su $\mathbb{R}$ quasi ovunque con una funzione $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R})$.

• Esempio. Per ogni $\varepsilon > 0$, la somma f_ε della serie di Fourier
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2+\varepsilon}} \cos((2n-1)x)$$
è di classe C^1, mentre non lo è se $\varepsilon = 0$.

10 Esercizi.

(Da sistemare e controllare)

• Calcolare la serie di Fourier associata alla funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 2\pi$ tale che
$$x(t) = \begin{cases} -1 & x \in (-\pi, 0] \\ 1 & x \in (0, \pi] \end{cases}$$
e verificare che vale
$$x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}[1 - (-1)^k] \sin(kt)\,.$$

Analizzare il tipo di convergenza (in energia, puntuale, uniforme) e l'andamento asintotico dei coefficienti di Fourier. Scrivere il segnale $\tilde{x}$ regolarizzato per cui si ha la convergenza puntuale.

Usare le proprietà di calcolo per trovare la serie di Fourier associata alla funzione
$$y(t) = \begin{cases} 0 & x \in (-\pi, 0] \\ 1 & x \in (0, \pi] \end{cases}$$
Scrivere il segnale $\tilde{y}$ regolarizzato di y.

• Calcolare la serie di Fourier associata alla funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 2\pi$ tale che $x(t) = |t|$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Verificare che vale (puntualmente o anche uniformemente?)

$$x(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi}[(-1)^k - 1]\cos(kt)\,.$$

Da ciò dedurre che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{and} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Suggerimento: per calcolare la seconda, usare la prima dopo aver dimostrato che, se $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = s/4$.

• Calcolare la serie di Fourier associata alla funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 2\pi$ tale che $x(t) = t^2$ nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. Verificare che vale (puntualmente o anche uniformemente?)

$$x(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos(kt)\,.$$

Da questa dedurre che

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\,.$$

• Calcolare la serie di Fourier associata alla funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 2\pi$ tale che $x(t) = t$ nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. Verificare che

$$x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin(kt)\,.$$

Scrivere il segnale $\tilde{x}$ regolarizzato di x.

11 La trasformata di Fourier.

11.1 Premessa euristica.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione periodica, $f|_{]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]} \in L^2(]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}])$. Allora, q.o. in $\mathbb{R}$ e nel senso di L^2 possiamo scrivere

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}\, dt \right) e^{in\omega x}$$

Consideriamo ora T molto grande e, di conseguenza $\omega = \frac{2\pi}{T}$ molto piccolo. Si può quindi pensare di sostituire il segno di sommatoria con un segno di integrale, approssimando l'integrale con una sua somma di Riemann e chiamando $\lambda = n\omega$ la variabile di integrazione. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt \right) e^{in\omega x} \cdot \omega \\ &\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}\to-\infty}^{\frac{T}{2}\to+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt \right) e^{i\lambda x}\, d\lambda \end{aligned}$$

11.2 Definizione ed esempi.

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Diremo trasformata di Fourier di f la funzione $\mathcal{F}\{f\} = \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx.$$

Si osservi che $|f(x)\, e^{-i\omega x}| = |f(x)|$ e quindi la definizione è ben posta. Si tenga presente che in alcuni testi la definizione è leggermente diversa. Talvolta viene definita come

$$\mathcal{F}_1\{f\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx,$$

altre volte come

$$\mathcal{F}_2\{f\}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i2\pi\nu x}\, dx.$$

Funzioni pari e dispari. Supponiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari. Allora

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \cos(\omega x)\, dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{sen}(\omega x)\, dx \\ &= 2 \int_{0}^{+\infty} f(x)\, \cos(\omega x)\, dx. \end{aligned}$$

Supponiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dispari. Allora

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \cos(\omega x)\, dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{sen}(\omega x)\, dx \\ &= -2i \int_{0}^{+\infty} f(x) \operatorname{sen}(\omega x)\, dx. \end{aligned}$$

Esempi. Consideriamo la funzione caratteristica $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$. Si ha

$$\hat{f}(\omega) = \int_a^b e^{-i\omega x}\, dx = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega}$$

se $\omega \neq 0$, $\hat{f}(0) = b - a$.

Nel caso particolare $[a,b] = [-d,d]$ la funzione si dice "funzione porta" o "funzione rettangolo" di ampiezza (o durata) $2d$:

$$p_{2d}(x) = \chi_{[-d,d]}(x).$$

Si ha

$$\widehat{p_{2d}}(\omega) = \begin{cases} 2d & \omega = 0 \\ \frac{2}{\omega}\sin(d\omega) & \omega \neq 0 \end{cases}$$

Più brevemente si scrive

$$\widehat{p_{2d}}(\omega) = 2d \operatorname{sinc}\left(\frac{d\omega}{\pi}\right)$$

dove è stata introdotta la funzione *seno cardinale*

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} & x \neq 0 \end{cases}$$

Si osservi che, sebbene la funzione caratteristica non sia continua, la sua trasformata di Fourier è continua. Inoltre la trasformata è infinitesima e va a zero come ω^{-1} quando $|\omega| \to +\infty$. In particolare $\mathcal{F}\{p_{2d}\} \notin L^1(\mathbb{R})$.

• Fissiamo $a > 0$ e calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $f(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}$.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\, dt + \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)t}\, dt$$

$$= \left[\frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}\,.$$

Quindi

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}\,.$$

Notiamo che la funzione è continua ma non derivabile, mentre la sua trasformata è di classe C^∞ e decresce a infinito come ω^{-2}.

• Fissiamo $a > 0$ e calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2} e^{-i\omega x}\, dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}\,.$$

Il risultato è un semplice esercizio di analisi I per $\omega = 0$. Se $\omega \neq 0$ l'integrale si può calcolare usando il metodo dei residui.

Trasformata della Gaussiana. Fissiamo $a > 0$ e calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione Gaussiana $f(t) = e^{-x^2}$.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x - x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2 + 2\frac{i\omega}{2} + (\frac{i\omega}{2})^2 - (\frac{i\omega}{2})^2\right)}\, dx$$

$$= e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x + (\frac{i\omega}{2})\right)^2}\, dx = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R+\frac{i\omega}{2}}^{R+\frac{i\omega}{2}} e^{-y^2}\, dy.$$

Indichiamo con E il rettangolo $E = [-R, R] + [R, R + \frac{i\omega}{2}] + [R + \frac{i\omega}{2}, -R + \frac{i\omega}{2}] + [-R + \frac{i\omega}{2}, -R]$. Per il Teorema di Cauchy l'integrale della funzione sul rettangolo è nullo, inoltre, osserviamo che per $R \to +\infty$ i contributi all'integrale dei tratti verticali $[R, R + \frac{i\omega}{2}]$ e $[-R + \frac{i\omega}{2}, -R]$ tendono a zero. Pertanto, si ha

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R+\frac{i\omega}{2}}^{R+\frac{i\omega}{2}} e^{-y^2}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}.$$

Pertanto si conclude

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \sqrt{\pi}.$$

• Esercizio. Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(t) = \mathrm{sign}(t)\mathrm{e}^{-a|t|} = \begin{cases} -\mathrm{e}^{-a|t|} & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ \mathrm{e}^{-a|t|} & t > 0 \end{cases}$$

Si ha

$$\hat{f}(\omega) = \frac{-2i\omega}{a^2 + \omega^2}$$

12 Proprietà della trasformata di Fourier.

12.1 Continuità e limitatezza della trasformata.

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\hat{f}$ è continua e limitata in $\mathbb{R}$. Per provare la continuità della funzione $\hat{f}$ utilizziamo il Teorema di continuità delle funzioni definite come integrali dipendenti da un parametro.

Definiamo $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ come $h(x, \omega) = f(x)\, e^{-i\omega x}$. Osserviamo che $|h(x, \omega)| = |f(x)|$, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ e quasi ogni $x \in \mathbb{R}$. Perciò la funzione $h(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile su $\mathbb{R}$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$. Inoltre la funzione $h(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è continua per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha $|h(x, \omega)| \leq |f(x)|$ (vale l'uguaglianza) e la funzione $|f|$ è integrabile su $\mathbb{R}$. Perciò la funzione integrale $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da $H(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(x, \omega)\, dx = \hat{f}(\omega)$ è continua in $\mathbb{R}$.

Inoltre $\hat{f}$ è limitata. Infatti, si ha, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$,

$$|\hat{f}(\omega)| = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x}\, dx| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-i\omega x}|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \|f\|_1.$$

Inoltre prendendo il $\sup_{\omega\in\mathbb{R}}$, si ottiene $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

12.2 Linearità e continuità del'operatore di Fourier.

L'operatore

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$$

definito da $\mathcal{F}\{f\} = \hat{f}$ è lineare e continuo. La linearità dell'operatore $\mathcal{F}$ è immediata conseguenza della linerità dell'integrale. Per la continuità si osservi che la funzione $\mathcal{F}$ è Lipschitziana con costante di Lipschitz $L = 1$, valendo la disuguaglianza

$$\|\mathcal{F}\{f_1\} - \mathcal{F}\{f_2\}\|_\infty = \|\mathcal{F}\{f_1 - f_2\}\|_\infty \le \|f_1 - f_2\|_{L^1}.$$

12.3 Comportamento asintotico della trasformata.

Dimostriamo per le trasformate di Fourier la seguente versione del Lemma di Riemann-Lebesgue. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora si ha

$$\lim_{|\omega| \to +\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

La dimostrazione è la stessa già vista per le serie di Fourier. La ripresentiamo per completezza. Abbiamo già provato il risultato nel caso in cui la funzione f sia la funzione caratteristica di un intervallo $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$. Inoltre grazie alla linearità di $\mathcal{F}$, la tesi è provata anche per una combinazione lineare di funzioni caratteristiche, cioè per ogni funzione a scala del tipo

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \chi_{[a_k, b_k]}(x)\,,$$

con $a_k < b_k$ e $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

Poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$, esiste una successione di funzioni a scala $(\varphi_n)_n$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad \text{q.o. in } \mathbb{R} \qquad \text{e } \lim_{n \to \infty} \|\varphi_n - f\|_1 = 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\bar{n}$ tale che

$$\|\varphi_{\bar{n}} - f\|_1 \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Poiché, per questo $\bar{n}$ fissato, si ha

$$\lim_{|\omega| \to +\infty} \mathcal{F}\{\varphi_{\bar{n}}\}(\omega) = 0,$$

esiste ω_0 tale che, per ogni $|\omega| > \omega_0$, si ha

$$\Big|\mathcal{F}(\varphi_{\bar{n}})(\omega)\Big| \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Si ottiene pertanto, se $|\omega| > \omega_0$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}\{f\}(\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Big(f(x) - \varphi_{\bar{n}}(x)\Big)\, e^{-i\omega x}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\bar{n}}(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \right| \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} \Big|f(x) - \varphi_{\bar{n}}(x)\Big|\, dx + |\mathcal{F}\{\varphi_{\bar{n}}\}(\omega)| \\
&= \|f - \varphi_{\bar{n}}\|_1 + |\mathcal{F}\{\varphi_{\bar{n}}\}(\omega)| \le \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

12.4 Traslazioni, cambiamento di scala, coniugio.

Le seguenti proprietà si dimostrano facilmente applicando la definizione di trasformata di Fourier.

Traslazione in x. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Poniamo $g(x) = f(x - x_0)$. Allora si ha

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega x_0} \hat{f}(\omega).$$

Traslazione in ω. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Poniamo $g(x) = e^{i\omega_0 x} f(x)$. Allora si ha

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0).$$

Riscalamento. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^+$. Poniamo $g(x) = f(ax)$. Allora si ha

$$\hat{g}(\omega) = \tfrac{1}{a}\hat{f}\left(\tfrac{\omega}{a}\right).$$

Inoltre, posto $h(x) = f(-x)$, si ha $\hat{h}(\omega) = \hat{f}(-\omega)$. Pertanto, se $a < 0$ e $g(x) = f(ax)$ si avrà

$$\hat{g}(\omega) = -\tfrac{1}{a}\hat{f}\left(\tfrac{\omega}{a}\right).$$

• Esempio. Si consideri la funzione Gaussiana $f(x) = e^{-ax^2}$, con $a > 0$. Si è già calcolato

$$\mathcal{F}\{e^{-x^2}\}(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Poiché si ha

$$f(x) = e^{-(\sqrt{a}x)^2},$$

applicando la formula del riscalamento si ottiene

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\tfrac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Coniugio. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si ponga $g(x) = \overline{f(x)}$. Si ha allora

$$\hat{g}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}.$$

12.5 La trasformata della derivata.

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e supponiamo che f sia assolutamente continua con derivata $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Si ha allora

$$\mathcal{F}\{f'\}(\omega) = i\omega \mathcal{F}\{f\}(\omega).$$

Infatti, calcoliamo, integrando per parti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \left(f(a)\, e^{-i\omega a} - f(-a)\, e^{i\omega a} + i\omega \int_{-a}^{a} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right).$$

Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt = f(0) - \int_x^0 f'(t)\, dt.$$

Poichè $f' \in L^1(\mathbb{R})$, i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\, dt \ \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = f(0) - \int_{-\infty}^0 f'(t)\, dt$$

esistono finiti, e quindi, essendo $f \in L^1(\mathbb{R})$, devono essere nulli. Perciò si ha

$$\lim_{a\to+\infty} f(a)\, e^{-i\omega a} = \lim_{a\to-\infty} f(a)\, e^{-i\omega a} = 0$$

e quindi si conclude

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = 0 + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = i\omega \mathcal{F}\{f\}(\omega).$$

• Per induzione, si prova poi che, se $f \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ e $f^{(k-1)}$ è assolutamente continua (e quindi $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$), si ha

$$\mathcal{F}\{f^{(k)}\}(\omega) = (i\omega)^k \mathcal{F}\{f\}(\omega).$$

Teorema. Trasformata di funzioni due volte derivabili. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e supponiamo che f' sia assolutamente continua con $f'' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$. Infatti, per la formula della trasformata della derivata si ha

$$\mathcal{F}\{f''\}(\omega) = (i\omega)^2 \mathcal{F}\{f\}(\omega).$$

Essendo una trasformata, la funzione $\mathcal{F}\{f''\}$ è limitata, quindi esiste $K > 0$ tale che $|\mathcal{F}\{f''\}(\omega)| \leq K$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$. Pertanto, la funzione continua $\hat{f}$ soddisfa la stima

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{|\omega|^2} K,$$

ed è quindi integrabile per il principio dell'ordine di infinitesimo. Osservando inoltre che

$$|\hat{f}(\omega)|^p \leq \frac{1}{|\omega|^{2p}} K^p,$$

si conclude che $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty[$.

12.6 La derivata della trasformata.

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Poniamo $g(x) = x \cdot f(x)$ e supponiamo $g \in L^1(\mathbb{R})$. Allora la funzione $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ è di classe C^1 e si ha

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) = -i\hat{g}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx.$$

Dimostrazione. Definiamo $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ come $h(x, \omega) = f(x)\, e^{-i\omega x}$. Osserviamo che $|h(x, \omega)| = |f(x)|$, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ e quasi ogni $x \in \mathbb{R}$. Perciò la funzione $h(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile su $\mathbb{R}$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$. Inoltre la funzione $h(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è di classe C^1 per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$, con $\frac{\partial}{\partial\omega} h(x, \omega) = -ixf(x)e^{-i\omega x}$. Si ha $\left|\frac{\partial}{\partial\omega} h(x, \omega)\right| = |g(x)|$, integrabile. Sono soddisfatte quindi le ipotesi del teorema di derivazione sotto il segno integrale. Si può pertanto calcolare

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\omega} f(x)e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -ixf(x)e^{-i\omega x}\, dx = -i\hat{g}(\omega).$$

• Per induzione, si prova poi che, se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e, per ogni $j = 1, \ldots, k$ la funzione $g_j(x) = x^j \cdot f(x)$ è integrabile su $\mathbb{R}$, allora $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ è di classe C^k e si ha

$$\frac{d^k\hat{f}}{d\omega}(\omega) = (-i)^k \widehat{g_k}(\omega) = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx.$$

• Esercizio. Si usino i due teoremi di derivazione per calcolare la trasformata di Fourier della funzione Gaussiana senza ricorrere alla teoria dei residui.
Detta f la funzione Gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$, e $F = \hat{f}$ la sua trasformata di Fourier, si osservi che, valendo $f'(x) = -2xf(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione F soddisfa l'equazione differenziale $F'(\omega) = -\frac{1}{2}\omega F(\omega)$, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$. Si ha inoltre $F(0) = \sqrt{\pi}$, pertanto si conclude risolvendo il problema di Cauchy (l'equazione è a variabili separate)

$$\begin{cases} F'(\omega) = -\frac{1}{2}\omega F(\omega), \\ F(0) = \sqrt{\pi}, \end{cases}$$

$F(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

13 Il prodotto di convoluzione.

Sia $N \in \mathbb{N}^+$ e siano $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$. Supponiamo esistente, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, l'integrale

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, g(x - y)\, dy.$$

La funzione $f * g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ così definita si dice il prodotto di convoluzione di f con g. Con un cambio di variabili si verifica facilmente che il prodotto di convoluzione è commutativo, cioè $f * g = g * f$.

13.1 Esistenza del prodotto di convoluzione.

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Allora per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione $f(\cdot)\, g(x-\cdot)$ è integrabile su $\mathbb{R}^N$ (nella variabile y) e quindi è definita la funzione $f * g$. Inoltre $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Dimostriamo questo fatto nel caso $N = 1$.

Dimostrazione. Useremo in modo combinato i teoremi di Tonelli e di Fubini. Ricordiamo l'enunciato del teorema di Tonelli.

Sia $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ misurabile tale che $h(x,y) \geq 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$ le restrizioni $h(\cdot, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siano integrabili e che la funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\phi(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dx$ sia anch'essa integrabile. Allora la funzione h è integrabile e si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dx \Big)\, dy.$$

Consideriamo la funzione $h(x,y) = |f(y)\, g(x-y)|$. La funzione h è misurabile, $h(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$ la funzione $|f(y)\, g(\cdot - y)|$ è integrabile su $\mathbb{R}$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)\, g(x-y)|\, dx = |f(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-y)|\, dx = |f(y)|\, \|g\|_{L^1}.$$

Inoltre, la funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\phi(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dx$ è integrabile; infatti si ha, con il cambio di variabile $u = x - y$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)\, dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\, |g(x-y)|\, dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|\, du \right) dy = \|g\|_{L^1}\, \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Per il teorema di Tonelli si conclude che la funzione h è integrabile in $\mathbb{R}^2$. Ma allora, per il teorema di Fubini, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione $|f(\cdot)\, g(x-\cdot)|$ è integrabile su $\mathbb{R}$. Infine si osserva che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)|\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)\, g(x-y)|\, dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|\, du \right) dy = \|g\|_{L^1}\, \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

e quindi $f * g$ è integrabile e si ha

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^1}\, \|f\|_{L^1}$$

Si può dimostrare la seguente variante del precedente risultato.

Variante per gli spazi L^p. Siano $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$, con $p, q \in [1, +\infty[\cup \{\infty\}$. Sia $r \in [1, +\infty[\cup \{\infty\}$ tale che

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

dove, per convenzione, poniamo $\frac{1}{\infty} = 0$. Allora si ha $f * g \in L^r(\mathbb{R})$ e

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

In particolare, se $p = q = 2$, si ha $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Questo fatto si può dimostrare direttamente, osservando che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$|(f * g)(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x - y)\, dy \right| = \langle f\,,\, g(x - \cdot) \rangle_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \, \|g\|_{L^2}.$$

Si può anche dimostrare (ma la dimostrazione va al di là degli scopi del presente testo) che, se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, allora la funzione $f * g$ è continua.

13.2 Esempi.

Il nucleo di Dirichlet. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione $2\pi-$periodica e tale che $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^1([-\pi, \pi])$. Ricordiamo che la ridotta $N-$esima S_N della serie di Fourier di f può essere rappresentata come

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_N(x - t)\, dt,$$

dove D_N è il nucleo di Dirichlet di ordine N:

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} & \text{se } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \\ \frac{2N+1}{2\pi} & \text{se } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Denotiamo con

$$\widetilde{D}_N(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x) \cdot D_N(x)$$

il troncamento della funzione D_N all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Si ha allora

$$S_N(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, D_N(x - t)\, dt = (f * \widetilde{D}_N)(x).$$

La funzione Tenda. Sia $a > 0$. Consideriamo la seguente funzione, detta "funzione tenda" o "funzione triangolo":

$$\Lambda_a(x) = (a - |x|)^+ = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ a - |x| & |x| \leq a \end{cases}.$$

(Qui $(a-|x|)^+$ indica la parte positiva della funzione $a-|x|$). Ricordiamo che con p_{2a} denotiamo la funzione porta, cioè la funzione caratteristica $p_{2a}(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\big(p_{2a} * p_{2a}\big)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-a,a]}(t)\, \chi_{[-a,a]}(x-t)\, dt \\
&= \int_{-a}^{a} \chi_{[-a,a]}(x-t)\, dt \\
&= \int_{[-a,a]\cap[x-a,x+a]} 1\, dt = m\big([-a,a]\cap[x-a,x+a]\big).
\end{aligned}$$

(Qui $m(E)$ indica la misura dell'insieme E). Osserviamo che, fissato $x \in [0,a]$, si ha

$$[-a,a]\cap[x-a,x+a] = [x-a,a]$$

e la sua misura è $2a-x$; se invece $x \in [-a,0]$ si ha

$$[-a,a]\cap[x-a,x+a] = [-a,a+x]$$

e la sua misura è $2a+x$. Si ha quindi

$$\big(p_{2a} * p_{2a}\big)(x) = \Lambda_{2a}(x).$$

Osserviamo che, mentre la funzione porta p_{2a} è discontinua, la convoluzione $p_{2a} * p_{2a}$ è continua. Questo è un fatto generale. La convoluzione produce un effetto regolarizzante sulla funzione.

13.3 Nuclei di convoluzione.

Diremo nucleo di convoluzione una funzione $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\, dx = 1.$$

Ad esempio, il nucleo di Dirichlet $\widetilde{D}_N$ è un nucleo di convoluzione. Osserviamo che, se ϕ è un nucleo di convoluzione, lo è anche ogni funzione $\phi_a(x) = a\,\phi(ax)$, per $a > 0$.

• Esempio. Si chiama nucleo di Gauss la funzione (Gaussiana normalizzata)

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Come è ben noto, si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, e si verifica facilmente che $G(x)$ è un nucleo di Dirichlet.

• Esempio. Si chiama nucleo di Poisson la funzione

$$P(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Entrambe le funzioni $G(x)$ e $P(x)$ sono di classe C^∞ e strettamente positive su $\mathbb{R}$.

• Esempio. Si chiama nucleo mollificatore la funzione $\tilde{M} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\tilde{M}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{se } |x| < 1; \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Poniamo $c = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \tilde{M}(x)\, dx$. Allora, la funzione

$$M(x) = \tfrac{1}{c}\tilde{M}(x)$$

è un nucleo di convoluzione, di classe C^∞ e a supporto compatto ($supp(M) = [-1, 1]$).

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ indichiamo con $M_n(x)$ il nucleo $M_n(x) = n\, M(nx)$. Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$, con $p \in [1, +\infty[$. Si dice regolarizzazione (o mollificazione) di f ogni funzione del tipo

$$f * M_n.$$

Si può dimostrare che le funzioni mollificate $f * M_n$ sono di classe C^∞ su $\mathbb{R}$ e approssimano la funzione f (con diversi significati che vedremo a breve).

Teorema di approssimazione mediante nuclei di convoluzione per funzioni continue e limitate. Sia $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Consideriamo una famiglia $\big(\phi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ di nuclei di convoluzione $\phi_n(x) = n\, \phi(nx)$. Allora si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} (f * \phi_n)(x) = f(x).$$

Dimostrazione. Fissiamo $x \in \mathbb{R}$ e calcoliamo

$$\big(f * \phi_n\big)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x-t) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} n\phi(n(x-t)) f(t)\, dt.$$

Con il cambio di variabile $z = n(x-t)$, si ottiene

$$f * \phi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) f(x - \tfrac{z}{n})\, dz.$$

Fissiamo $z \in \mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha, per la continuità di f,

$$\lim_{n\to\infty} \phi(z) f(x - \tfrac{z}{n}) = \phi(z) f(x).$$

Inoltre si ha, per ogni $x, z \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^+$,

$$|\phi(z) f(x - \tfrac{z}{n})| \leq |\phi(z)| \cdot \|f\|_\infty,$$

e la funzione $|\phi(z)| \cdot \|f\|_\infty$ è integrabile in $\mathbb{R}$. Si può quindi applicare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue. Si ottiene pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \big(f * \phi_n\big)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\sigma) f(x - \tfrac{\sigma}{n})\, d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\sigma)\, f(x)\, d\sigma = f(x).$$

Teorema di approssimazione mediante nuclei di convoluzione per funzioni L^p. Sia $p \in [1, +\infty[$ e $f \in L^p(\mathbb{R})$. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|(f * M_n) - f\|_p = 0$$

e, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} (f * M_n)(x) = f(x).$$

Questo significa che lo spazio $C^\infty(\mathbb{R})$ è denso nello spazio $L^p(\mathbb{R})$. In realtà si può dimostrare che anche lo spazio $C_0^\infty(\mathbb{R})$ delle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto è denso nello spazio $L^p(\mathbb{R})$, cioè per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$ esiste una successione $(\varphi_n)_n$ in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n - f\|_p = 0$. Infatti, basta osservare che, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty[$, la successione di funzioni $(f_k)_k$ con $f_k(x) = f(x) \cdot \chi|_{[-k,k]}(x)$ converge a f nello spazio $L^p(\mathbb{R})$. Il teorema non è più vero se $p = +\infty$.

13.4 Il teorema sulla trasformata della convoluzione.

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}.$$

Dimostrazione. Calcoliamo, usando i teoremi di Fubini-Tonelli e opportuni cambi di variabile,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) e^{-i\omega x}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, e^{-i\omega x}\, dx \right) g(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\, e^{-i\omega(\sigma+y)}\, d\sigma \right) g(y)\, dy \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\, e^{-i\omega\sigma}\, d\sigma \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-i\omega y}\, dy \right) \\
&= \mathcal{F}\{f\}(\omega) \cdot \mathcal{F}\{g\}(\omega)\,.
\end{aligned}$$

• Esempio. Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione tenda

$$\Lambda_{2a}(x) = \big(p_{2a} * p_{2a}\big)(x).$$

Ricordando la trasformata della funzione porta si ottiene

$$\widehat{\Lambda_{2a}}(\omega) = (\widehat{p_{2d}}(\omega))^2 = \begin{cases} 4a^2 & \text{se } \omega = 0 \\ \frac{4}{\omega^2} \operatorname{sen}^2(a\omega) & \text{se } \omega \neq 0. \end{cases}$$

Naturalmente si poteva anche calcolare la trasformata di Λ_{2a} direttamente dalla definizione.

14 Antitrasformata.

Si è visto che l'operatore $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ è lineare e limitato. Osserviamo che $\mathcal{F}$ non è suriettivo. Infatti, ogni trasformata di Fourier deve essere infinitesima a $\pm\infty$ per il Lemma di Riemann Lebesgue. Ci chiediamo se sia comunque possibile invertire l'operatore $\mathcal{F}$ restringendo opportunamente il suo codominio.

Ricordiamo la premessa euristica che ha motivato, all'inizio del capitolo, l'introduzione della trasformata di Fourier come generalizzazione della serie di Fourier.

$$f(x) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right) e^{i\omega x}\, d\omega$$

Potremmo ragionevolmente pensare che ponendo

$$\mathcal{F}^{-1}\{g\}(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

si possa avere

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{g\}\}(\omega) = g(\omega) \quad \text{ e } \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\}\}(x) = f(x).$$

Un tentativo potrebbe essere quello di un calcolo diretto, utilizzando i teoremi di Fubini e Tonelli. Tuttavia, non è corretto scrivere

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{g\}\}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \right) e^{-i\lambda x}\, dx \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\lambda)x}\, dx \right) g(\omega)\, d\omega,\end{aligned}$$

in quanto la funzione $e^{i(\omega-\lambda)x}$ non è integrabile su $\mathbb{R}$.

14.1 Il Teorema di inversione di Fourier.

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\hat{f} = \mathcal{F}\{x\} \in L^1(\mathbb{R})$. Poniamo

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\}(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega.$$

Allora si ha

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\}\}(x) = f(x) \quad \text{ e } \quad \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\}\}(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Dimostrazione. Consideriamo la famiglia di funzioni gaussiane

$$\varphi_k(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2k^2}}, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

e la funzione

$$F_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega)\, \varphi_k(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega\,.$$

Dimostreremo che si ha, nello stesso tempo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k \to +\infty} F_k(x) = f(x)$$

e

$$\lim_{k \to +\infty} F_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\}\}(x).$$

Per l'unicità del limite si concluderà $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\}\}(x) = f(x)$.

Primo limite. Scrivendo esplicitamente l'espressione di $\mathcal{F}\{f\}(\omega)$ si ha

$$F_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s}\, ds \right) \varphi_k(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega.$$

Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\left| f(s) e^{i\omega(x-s)} \varphi_k(\omega) \right| = |f(s)| e^{-\frac{\omega^2}{2k^2}}$$

per ogni $(\omega, s) \in \mathbb{R}^2$, e quindi la funzione $f(s)\, e^{i\omega(x-s)} \varphi_k(\omega)$ è integrabile in $\mathbb{R}^2$. È quindi lecito applicare il teorema di Fubini e scambiare l'ordine di integrazione. Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(\omega)\, \mathrm{e}^{-i\omega(s-x)}\, d\omega \right) f(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\varphi_k(\omega)\}(s-x)\, f(s)\, ds. \end{aligned}$$

Ricordiamo la formula della trasformata di Fourier della Gaussiana

$$\mathcal{F}\{e^{-a\omega^2}\}(\lambda) = \sqrt{\tfrac{\pi}{a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.$$

Si ottiene pertanto $\mathcal{F}\{\varphi_k(\omega)\}(s-x) = k\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{k^2(s-x)^2}{2}}$ e

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k\sqrt{2\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{k^2(s-x)^2}{2}} f(s)\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(x-s) f(s)\, ds = (\phi_k * f)(x)\,, \end{aligned}$$

dove

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} k e^{-\frac{k^2 t^2}{2}} = k\, \phi(kt)\,,$$

è il nucleo di convoluzione di Gauss già introdotto, con

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Dal Teorema di approssimazione mediante nuclei di convoluzione segue che

$$\lim_{k\to+\infty} (\phi_k * f)(x) = f(x)$$

ottenendo la validità del primo limite.

Secondo limite. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quasi ogni $\omega \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega)\, \varphi_k(\omega)\, e^{i\omega x} = \mathcal{F}\{f\}(\omega) e^{i\omega x}.$$

Inoltre

$$|\mathcal{F}\{f\}(\omega)\, \varphi_k(\omega)\, e^{i\omega x}| \le |\mathcal{F}\{f\}(\omega)|\, \varphi_k(\omega) \le |\mathcal{F}\{f\}(\omega)|,$$

con $\mathcal{F}\{f\} \in L^1(\mathbb{R})$ per ipotesi. Possiamo quindi applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue e portare il limite sotto segno di integrale, ottenendo

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} F_k(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{k\to+\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega)\, \varphi_k(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\}\}(x).\end{aligned}$$

Si è quindi provato che $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\}\}(x)$. Poiché $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\}(x)$, la disuguaglianza $\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\}\}(\omega) = \hat{f}(\omega)$ è immediata.

14.2 La formula di dualità e la trasformata del prodotto.

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\mathcal{F}\{f\} \in L^1(\mathbb{R})$. Allora si ha

$$\mathcal{F}^{-1}\{f\}(\omega) = \tfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{f\}(-\omega)$$

Perciò l'antitrasformata $\mathcal{F}^{-1}$ di Fourier soddisfa tutte le proprietà della trasformata.

Vale inoltre il seguente teorema di unicità della trasformata:

Teorema di unicità. Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ tali che $\mathcal{F}\{f_1\}, \mathcal{F}\{f_2\} \in L^1(\mathbb{R})$. Sia

$$\mathcal{F}\{f_1\}(\omega) = \mathcal{F}\{f_2\}(\omega) \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}$$

allora

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}.$$

La trasformata del prodotto. Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ e supponiamo che siano integrabili su $\mathbb{R}$ anche le seguenti funzioni

$$f_1 \cdot f_2\,, \quad \mathcal{F}\{f_1\}\,, \quad \mathcal{F}\{f_2\}\,, \quad \mathcal{F}\{f_1\} * \mathcal{F}\{f_2\}, \quad \mathcal{F}\{f_1 \cdot f_2\}.$$

Allora si ha la seguente formula per la trasformata del prodotto:

$$\mathcal{F}\{f_1 \cdot f_2\} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{f_1\} * \mathcal{F}\{f_2\}.$$

Dimostrazione. Per la formula di dualità si ha

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{f_1\} * \mathcal{F}\{f_2\}\right\}(x) = \tfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\{\mathcal{F}\{f_1\} * \mathcal{F}\{f_2\}\right\}(-x) = \dots$$

applicando la formula per la trasformata del prodotto di convoluzione e di nuovo la formula di dualità si ottiene

$$\begin{aligned} \dots &= \tfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\mathcal{F}\{f_1\}\right\}(-x) \cdot \mathcal{F}\left\{\mathcal{F}\{f_2\}\right\}(-x) \\ &= 2\pi\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{f_1\}\right\}(x) \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{f_2\}\right\}(x) = 2\pi f_1(x) \cdot f_2(x). \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{f_1\} * \mathcal{F}\{f_2\}\right\}(x) = 2\pi f_1(x) \cdot f_2(x).$$

In particolare, dividendo per 2π e applicando la trasformata all'equazione,

$$\mathcal{F}\{f_1 \cdot f_2\} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{f_1\} * \mathcal{F}\{f_2\}\right\}\right\} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{f_1\} * \mathcal{F}\{f_2\}.$$

15 La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$.

Per definire la trasformata di Fourier di una funzione f abbiamo finora supposto $f \in L^1(\mathbb{R})$. Per diversi motivi è spesso utile poter lavorare nello spazio (di Hilbert) $L^2(\mathbb{R})$. Tuttavia, sappiamo che esistono funzioni $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^2(\mathbb{R})$. Ad esempio, la funzione seno cardinale $f(x) = \operatorname{sinc}(x)$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ ma non è integrabile. Ci chiediamo se è possibile estendere la definizione a tutte le funzioni $f \in L^2(\mathbb{R})$. La risposta è affermativa grazie ad un procedimento di approssimazione. Cominciamo con il dimostrare un teorema che ci fornisce ulteriori informazioni sulle trasformate delle funzioni lisce a supporto compatto.

Teorema di Plancherel per funzioni C_0^∞. Siano $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Sappiamo già che le traformate $\hat{\varphi}_1$ e $\hat{\varphi}_2$ appartengono allo spazio $L^2(\mathbb{R})$. Vale l'uguaglianza

$$\langle \hat{\varphi}_1 \,,\, \hat{\varphi}_2 \rangle_{L^2} = 2\pi \langle \varphi_1 \,,\, \varphi_2 \rangle_{L^2}$$

e, in particolare, se $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$,

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^2}^2 = 2\pi\|\varphi\|_{L^2}^2.$$

Dimostrazione. Per la funzione φ_1 vale la formula di inversione

$$\varphi_1(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{\varphi}_1\}(x),$$

quindi possiamo calcolare

$$\langle \varphi_1 \, , \, \varphi_2 \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x) \, \overline{\varphi_2}(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \hat{\varphi}_1(\omega) \, d\omega \right) \overline{\varphi_2(x)} \, dx.$$

La funzione $h(x,\omega) = e^{i\omega x}\hat{\varphi}_1(\omega) \, \overline{\varphi_2(x)}$ verifica le ipotesi dei teoremi di Fubini e Tonelli, quindi è lecito invertire l'ordine di integrazione. Si ottiene allora

$$\langle \varphi_1 \, , \, \varphi_2 \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_1(\omega) \, \overline{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \varphi_2(x) \, dx \right)} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \, \langle \hat{\varphi}_1 \, , \, \hat{\varphi}_2 \rangle \, .$$

Il Teorema di Plancherel. Esiste un operatore lineare, continuo e biiettivo $\widetilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\widetilde{\mathcal{F}}\{f\} = \mathcal{F}\{f\} \text{ per ogni } f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Inoltre si ha

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{F}}\{f\} \, , \, \widetilde{\mathcal{F}}\{g\} \right\rangle_{L^2} = 2\pi \, \langle f \, , \, g \rangle_{L^2} \qquad \text{e} \qquad \|\widetilde{\mathcal{F}}\{f\}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2,$$

per ogni $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Inoltre, per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$, si ha

$$\widetilde{\mathcal{F}}\{f\}(\omega) = \lim_{k \to +\infty} \int_{-k}^{k} f(t) \, e^{-i\omega t} \, dt = \lim_{k \to +\infty} \mathcal{F}\{\chi_{[-k,k]} \, f\}(\omega);$$

dove la convergenza va intesa nel senso dello spazio $L^2(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. L'operatore $\widetilde{\mathcal{F}}$ può essere definito mediante un procedimento di approssimazione. Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$. Usando le mollificazioni possiamo prendere una successione $(f_n)_n$ di funzioni in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ convergente a f in $L^2(\mathbb{R})$ e quasi ovunque su $\mathbb{R}$. Per quanto provato qui sopra, per le funzioni f_n vale la relazione

$$\|\hat{f}_n\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f_n\|_{L^2}^2.$$

La successione $(\hat{f}_n)_n$ è pertanto una successione di Cauchy in $L^2(\mathbb{R})$, infatti

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{L^2}^2 = \|\mathcal{F}\{f_n - f_m\}\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f_n - f_m\|^2.$$

Per la completezza dello spazio $L^2(\mathbb{R})$ esiste una funzione, che denotiamo con $\widetilde{\mathcal{F}}\{f\}$, tale che

$$\widetilde{\mathcal{F}}\{f\}(\omega) = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{F}\{f_n\}.$$

È evidente che $\widetilde{\mathcal{F}}\{f\} = \mathcal{F}\{f\}$ se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Le relazioni sulle norme si estendono per continuità. Infine, per verificare l'ultima uguaglianza, è sufficiente dimostrare che la successione di funzioni $\chi_{[-k,k]} \, f$ converge a f in $L^2(\mathbb{R})$.

Si può anche definire l'operatore inverso $\widetilde{\mathcal{F}}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$:

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{-1}\{g\}(x) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^{k} g(\omega) \, e^{i\omega x} \, d\omega.$$

Esempio. La trasformata del seno cardinale. La funzione seno cardinale $\operatorname{sinc}(x)$ appartiene allo spazio $L^2(\mathbb{R})$ ma non allo spazio $L^1(\mathbb{R})$. Sappiamo che la trasformata di Fourier della porta è un seno cardinale:

$$\mathcal{F}\{p_{2a}\}(\omega) = 2a \operatorname{sinc}\left(\frac{a\,\omega}{\pi}\right).$$

Perciò si ha $\operatorname{sinc}(\omega) = \mathcal{F}\{\frac{1}{2\pi}\, p_{2\pi}\}(\omega)$. Applicando la trasformata inversa $\mathcal{F}^{-1}$ e la formula di dualità si ottiene

$$\frac{1}{2\pi}\, p_{2\pi}(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\operatorname{sinc}(\omega)\}(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{\operatorname{sinc}(\omega)\}(-x),$$

e quindi si conclude

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sinc}(\omega)\}(x) = p_{2\pi}(-\omega) = p_{2\pi}(\omega).$$

16 La trasformata di Fourier nella teoria dei campionamenti.

• Funzioni a banda limitata. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Diremo che f è una funzione a banda limitata se la sua trasformata $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ è a supporto compatto, cioè esiste $\sigma > 0$ tale che $\hat{f}(\omega) = 0$ per ogni ω tale che $|\omega| > \sigma$.

Ad esempio, se $f \in L^2(\mathbb{R})$, per ogni $a > 0$ la funzione

$$g_a(x) = (f * \operatorname{sinc}_a)(x)$$

è una funzione a banda limitata. Qui

$$\operatorname{sinc}_a x = \operatorname{sinc}(\tfrac{a}{\pi}x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax} & x \neq 0. \end{cases}$$

Infatti si ha

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sinc}_a\}(\omega) = \chi_{[-a,a]}](\omega)$$

e quindi

$$\mathcal{F}\{g_a\}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \chi_{[-a,a]}](\omega)$$

ha supporto compatto.

16.1 Il Teorema di Shannon.

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, f non identicamente nulla, a banda limitata. Poniamo

$$\varpi = \min\{\sigma \in \mathbb{R} : \hat{f}(\omega) = 0 \text{ per ogni } \omega \text{ tale che } |\omega| > \sigma\}, \qquad \nu = \frac{\varpi}{2\pi}.$$

Si ha allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\tfrac{n}{2\nu}\right) \operatorname{sinc}(2\nu x - n)\,.$$

• Il numero $2\nu = \frac{\varpi}{\pi}$ si dice frequenza di campionamento di Nyquist e rappresenta la minima frequenza di campionamento che permette la ricostruzione esatta del segnale f a partire dalla sequenza dei campionamenti $f\left(\frac{n}{2\nu}\right)$. Abbiamo enunciato il teorema con la frequenza ν, ma è chiaro che continua a sussistere sostituendo ϖ con un qualsiasi $\sigma > \varpi$.

Dimostrazione.

17 Applicazioni della trasformata di Fourier nello studio delle equazioni differenziali.

17.1 Equazioni differenziali ordinarie.

17.2 Equazioni differenziali alle derivate parziali.

18 Cenni alle distribuzioni.

Il concetto di funzione non è sufficiente per descrivere alcuni modelli fisici, ad esempio quelli relativi a fenomeni di carattere impulsivo. Inoltre, in svariate occasioni, si sente la necessità di poter considerare la variazione istantanea (quindi la derivata) di funzioni non continue, cosa chiaramente impossibile nell'ambito delle funzioni tradizionali. Considerazioni di questo tipo portano a introdurre il concetto di distribuzione.

18.1 Funzioni test.

Consideriamo lo spazio vettoriale $C_0^\infty(\mathbb{R})$ delle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto. Indicheremo con $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ lo spazio $C_0^\infty(\mathbb{R})$, quando questo è dotato di una particolare struttura topologica definita mediante la nozione di convergenza come segue:

• Sia $(\varphi_n)_n$ una successione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$; diremo che la successione converge a 0 nello spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ se

- $\star$ esiste un compatto $[-K, K]$ contenente il supporto di ogni elemento φ_n della successione;
- $\star$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ la successione delle derivate $(\varphi_n^{(k)})_n$ converge uniformemente a zero nell'intervallo $[-K, K]$.

• Sia $(\varphi_n)_n$ una successione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; diremo che la successione $(\varphi_n)_n$ converge a φ nello spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ se la successione $(\varphi_n - \varphi)_n$ converge a zero in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

• Esempio. I nuclei mollificatori M_n sono tipici elementi di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Ricordiamo che

$$M_n(x) = \frac{1}{\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-(x)^2}}\,dx} \begin{cases} n\,e^{-\frac{1}{1-(nx)^2}} & \text{se } |x| < \frac{1}{n}; \\ 0 & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Possiamo osservare che $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n(x) = 0$ q.o. in $\mathbb{R}$. Tuttavia la successione $(M_n)_n$ non converge a 0 in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. La successione $(\frac{1}{n^2}\,M_n)_n$ converge a 0 uniformemente in $\mathbb{R}$, tuttavia nemmeno questa successione converge a 0 in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Un esempio di successione che converge a 0 in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ è la successione $(2^{-n}\,M_n)_n$.

Sia X uno spazio vettoriale topologico. Se X ha dimensione finita, ogni funzione lineare (spesso si dice "funzionale") $f : X \to \mathbb{C}$ è continua. Questo non è più vero se X ha dimensione infinita (ad esempio si consideri lo spazio $X = C^1([0,1])$ con la norma del massimo, $\|\varphi\| = \max|\varphi|$, e il funzionale $T : X \to \mathbb{R}$ definito da $T(\varphi) = \varphi'(0)$. Posto $\varphi_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$, si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 0$ in X, mentre $\lim\limits_{n\to+\infty} T(\varphi_n) = 1$). Si indica con X' lo spazio (detto spazio duale di X) dei funzionali lineari continui $X' = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ lineare e continua}\}$. È facile verificare che X' è uno spazio vettoriale. Lo spazio duale di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, denotato con $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è lo spazio delle distribuzioni su $\mathbb{R}$.

18.2 Lo spazio delle distribuzioni.

Diremo distribuzione (su $\mathbb{R}$) ogni funzionale $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ lineare e continuo, cioè tale che

⋆ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$$

⋆ se la successione $(\varphi_n)_n$ è convergente a φ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ allora la successione $(T(\varphi_n))_n$ è convergente a $T(\varphi)$ in $\mathbb{C}$.

L'insieme delle distribuzioni è dunque lo spazio duale di $\mathcal{D}$ e verrà indicato con $\mathcal{D}'$.

• Notazione. Sia T una distribuzione. Spesso, al posto della notazione $T(\varphi)$, si preferisce scrivere $\langle T\,,\,\varphi\rangle$. L'operatore $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle : \mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ viene detto *dualità* tra $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Anche nella notazione, questo operatore ricorda il prodotto scalare e verifica molte delle sue proprietà; tuttavia, un prodotto scalare è definito sul prodotto di uno spazio per se stesso, mentre la dualità è definita sul prodotto di uno spazio per il suo duale.

Topologia di $\mathcal{D}'$. L'insieme delle distribuzioni $\mathcal{D}'$ è uno spazio vettoriale. Inoltre, possiamo definire una topologia su $\mathcal{D}'$ mediante la seguente definizione di convergenza: sia $(T_n)_n$ una successione di distribuzioni e $T \in \mathcal{D}'$. Diremo che

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = T \text{ nel senso delle distribuzioni}$$

se si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \text{ per ogni } \varphi \in \mathcal{D}.$$

• Osservazione. Sia $(T_n)_n$ una successione di distribuzioni. Supponiamo che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, esista finito il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle$. Possiamo allora definire il funzionale $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ nel modo seguente:

$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle.$$

Si può verificare che T è una distribuzione. Questo risultato (tutt'altro che banale) è noto come Teorema di completezza per le distribuzioni. È un risultato importante che permette di costruire numerosi esempi di distribuzioni.

Distribuzioni indotte dalle funzioni. Indichiamo con $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni localmente integrabili su $\mathbb{R}$, cioè, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e, per ogni $[a, b] \subset \mathbb{R}$, la restrizione di f all'intervallo $[a, b]$ è integrabile.

Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Definiamo $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ come segue

$$T_f(\varphi) = \langle T_f\,,\,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx\,.$$

Allora T_f è una distribuzione (che si dice indotta da f). Infatti, la linearità è conseguenza della linearità dell'integrale. Proviamo la continuità. Sia $(\varphi_n)_n$ una successione convergente a φ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Esiste allora un intervallo $[-K, K]$ al di fuori del quale gli elementi della successione $(\varphi_n - \varphi)_n$ sono identicamente nulli. Inoltre, la successione converge uniformemente in tale intervallo, insieme a tutte le sue derivate. Quindi si ha

$$|T_f(\varphi_n) - T_f(\varphi)| = \left|\int_{-K}^{K} f(x)\,\big(\varphi_n(x) - \varphi(x)\big)\,dx\right| \quad \le \|x\|_1\ \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to 0\,.$$

Lo stesso vale per tutte le derivate, quindi si conclude che $T(f) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

• Siano $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Supponiamo

$$\langle T_f\,,\,\varphi\rangle = \langle T_g\,,\,\varphi\rangle \text{ per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

allora $f = g$ quasi ovunque su $\mathbb{R}$. Questo significa che l'operatore $T : L^1_{loc}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ che associa ad ogni funzione $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ la distribuzione T_f indotta da f è iniettivo, e quindi lo spazio $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ può essere pensato come un sottinsieme di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Di conseguenza, per ogni $p \in [1, +\infty]$, si ha $L^p_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

18.3 La distribuzione δ di Dirac.

Fissiamo $\tau \in \mathbb{R}$. Diremo "delta di Dirac centrata in τ" il funzionale $\delta_\tau \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definito da

$$\langle \delta_\tau \, , \, \varphi \rangle = \varphi(\tau) \, ,$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}'$. Diremo semplicemente delta di Dirac, senza specificare il centro, la distribuzione $\delta = \delta_0$. Si verifica immediatamente che δ_τ è lineare e continua, quindi è una distribuzione.

• La distribuzione δ_τ non è indotta da alcuna funzione $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Lo proviamo per δ_0. Supponiamo per assurdo che esista $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che

$$\langle \delta_0 \, , \, \varphi \rangle = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, \varphi(t) \, dt \, , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \, .$$

Consideriamo la funzione test

$$\varphi(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{1-t^2}} & \text{se } |t| < 1 \\ 0 & \text{se } |t| \geq 1 \end{cases}$$

e poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(t) = \varphi(n\,t)$. Notiamo che $\varphi_n(0) = 1$, $0 \leq \varphi_n(t) \leq 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, inoltre $\varphi_n(t) = 0$ se $|t| \geq \frac{1}{n}$. Ne consegue che la successione $(\varphi_n(t))_n$ converge a zero per ogni $t \neq 0$ e quindi si ha anche

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(t) \cdot f(t) = 0 \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R} \, .$$

La successione $\big(\varphi_n(t) \cdot f(t)\big)_n$ è dominata in $L^1([-1,1])$ dalla funzione integrabile $f(t) \, \chi_{[-1,1]}(t)$. Per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue si ottiene la contraddizione

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, \varphi_n(t) \, dt = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(0) = 1 \, .$$

La distribuzione δ come limite. La delta di Dirac può essere approssimata in vari modi mediante distribuzioni indotte da funzioni. Ad esempio possiamo considerare per $h > 0$, la funzione *impulso di durata h e altezza $\frac{1}{h}$*:

$$f_h(t) = \frac{1}{h} \big[u(t) - u(t-h) \big].$$

Osserviamo che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, si ha, usando il teorema della media integrale,

$$\lim_{h \to 0^+} \langle T_{f_h} \, , \, \varphi \rangle = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(t) \, dt = \lim_{h \to 0^+} \varphi(t_h) = \varphi(0) = \langle \delta \, , \, \varphi \rangle \, ,$$

(qui t_h è un punto appartenente all'intervallo $[0,h]$). Quindi $\delta = \lim\limits_{h \to 0^+} T_{f_h}$ nel senso delle distribuzioni. Altre possibili approssimazioni si possono considerare; ad esempio, si ha

$$\delta = \lim_{n \to +\infty} \eta_n \text{ nel senso delle distribuzioni}$$

per ognuna delle successioni $(\eta_n)_n$, dove le distribuzioni η_n sono indotte dalle funzioni (sempre denotate con η_n)

$$\eta_n = n\,\chi_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}, \quad \eta_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+(nt)^2}, \quad \eta_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nt^2}, \quad \eta_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t}.$$

18.4 Traslazioni e dilatazioni di una distribuzione.

Traslazione. Sia $a \in \mathbb{R}$. Definiamo l'operatore traslazione $\tau_a : L^1_{loc}(\mathbb{R}) \to L^1_{loc}(\mathbb{R})$ come

$$(\tau_a f)(x) = f(x-a), \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R}.$$

Definiremo la traslazione $\tau_a T$ di una distribuzione $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ come

$$\langle \tau_a T\,,\,\varphi\rangle = \langle T\,,\,\tau_{-a}\varphi\rangle\,, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Il segno meno nella definizione è giustificato dal fatto che, per ogni $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, si vuole $\tau_a T_f = T_{\tau_a f}$, e quindi

$$\begin{aligned}\langle \tau_a T_f\,,\,\varphi\rangle = \langle T_{\tau_a f}\,,\,\varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)\,\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi(y+a)\,dy = \langle T_f\,,\,\tau_{-a}\varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

• Una distribuzione T si dice periodica di periodo $p > 0$ se si ha $\tau_p T = T$.

Dilatazione. Sia $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Definiamo l'operatore dilatazione $\lambda_a : L^1_{loc}(\mathbb{R}) \to L^1_{loc}(\mathbb{R})$ come

$$(\lambda_a f)(t) = f(at)\,, \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R}.$$

Definiremo la dilatazione $\lambda_a T$ di una distribuzione T come

$$\langle \lambda_a T\,,\,\varphi\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle T\,,\,\lambda_{\frac{1}{a}}\varphi\right\rangle, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

La definizione è giustificata dal fatto che, per ogni $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, si vuole $\lambda_a T_f = T_{\lambda_a f}$, e quindi

$$\begin{aligned}\langle \lambda_a T_f\,,\,\varphi\rangle = \langle T_{\lambda_a f}\,,\,\varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\,\varphi(t)\,dx \\ &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi(\tfrac{y}{a})\,dy = \frac{1}{|a|}\left\langle T_f\,,\,\lambda_{\frac{1}{a}}\varphi\right\rangle\,.\end{aligned}$$

• Una distribuzione si dice pari se $\lambda_{-1}T = T$. Una distribuzione si dice dispari se $\lambda_{-1}T = -T$.

18.5 Somme e prodotti di distribuzioni.

Ogni combinazione lineare di distribuzioni è una distribuzione. Infatti, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale. Il prodotto di due distribuzioni invece in generale non è definito. È comunque possibile moltiplicare una distribuzione per una funzione di classe C^∞. Siano $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ una distribuzione e $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Possiamo allora definire la distribuzione $f \cdot T$ come segue

$$\langle f \cdot T\,,\,\varphi\rangle = \langle T\,,\,f\varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

• Esempio. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$ (ad esempio $f(x) = x$). Si ha allora $f \cdot \delta_\tau = 0$ (qui 0 denota la distribuzione nulla). Infatti, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha

$$\langle f \cdot \delta\,,\,\varphi\rangle = \langle \delta\,,\,f\varphi\rangle = f(0)\cdot\varphi(0) = 0.$$

18.6 Derivata di una distribuzione.

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Denotiamo con T_f e $T_{f'}$ le distribuzioni indotte da f e dalla sua derivata f', rispettivamente. Osserviamo che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, con $supp(\varphi) \subset [-K, K]$, si ha

$$\begin{aligned}\langle T_{f'}\,,\,\varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,\varphi(t)\,dt = \int_{-K}^{K} f'(t)\,\varphi(t)\,dt \\ &= [f(t)\varphi(t)]_{-K}^{K} - \int_{-K}^{K} f(t)\,\varphi'(t)\,dt \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi'(t)\,dt = -\langle T_f\,,\,\varphi'\rangle\ .\end{aligned}$$

Questa osservazione ci porta alla seguente definizione.

Derivata di una distribuzione. Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ una distribuzione. Definiamo la distribuzione $D(T) = T'$ nel modo seguente

$$\langle T'\,,\,\varphi\rangle = -\langle T\,,\,\varphi'\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Si può introdurre la derivata $D^k(T) = T^{(k)}$ di qualsiasi ordine k come segue

$$\left\langle T^{(k)}\,,\,\varphi\right\rangle = (-1)^k\left\langle T\,,\,\varphi^{(k)}\right\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

• Esempio. Si consideri la funzione di Heaviside $H(x) = \chi_{[0,+\infty[}(x)$. Si ha $D(H) = \delta$. Infatti, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle D(H)\,,\,\varphi\rangle = -\langle H\,,\,\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \langle \delta_0\,,\,\varphi\rangle\,.$$

Si osservi che la funzione H è derivabile quasi ovunque su $\mathbb{R}$ con derivata nulla. Questo esempio mostra che, in generale, non è vero che la derivata distribuzionale di una funzione è la distribuzione indotta dalla derivata q.o. della funzione. Per evitare confusione indicheremo con $D(f)$ la derivata distribuzionale di una funzione f, distinguendola dalla derivata q.o. f'.

Supponiamo ora $f \in C^1(\mathbb{R})$. In questo caso la sua derivata nel senso delle distribuzioni coincide con la sua derivata classica. Infatti, si ha (confondendo f' con $T_{f'}$)

$$\langle f' \, , \, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \, \varphi(x) \, dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \varphi'(x) \, dx = -\langle f \, , \, \varphi' \rangle \, .$$

La proprietà continua a essere vera per le funzioni assolutamente continue, basandosi sulla regola di integrazione per parti.

Derivata distribuzionale di funzioni non regolari. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ derivabile con continuità in $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ e supponiamo esistano finiti i limiti

$$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x); \quad f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x);$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x); \quad f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$

Diremo salto della funzione nel punto x_0 il numero $h = f(x_0^+) - f(x_0^-)$.

Definiamo la funzione $\tilde{f}$ ponendo $\tilde{f}(x) = f(x) - h\chi_{[x_0,+\infty[}(x)$. La funzione $\tilde{f}$ è continua e C^1 a tratti, in particolare è assolutamente continua e quindi $D(\tilde{f}) = \tilde{f}'$. Inoltre, la funzione $\tilde{f}'$ coincide q.o. con la funzione f', quindi si conclude che $D(\tilde{f}) = T_{f'} = f'$. D'altra parte si ha $f = \tilde{f} + h\chi_{[x_0,+\infty[}$, e quindi

$$D(f) = D(\tilde{f}) + h \, D(\chi_{[x_0,+\infty[}) = \tilde{f}' + h \, \delta_{x_0}.$$

• Esempio. Derivata di $f(x) = \chi|_{[a,b]}(x)$. Si ha $f'(x) = 0$ q.o; per l'esempio precedente si ottiene

$$D(f) = \delta_a - \delta_b.$$

• Esempio. Derivata di $f(x) = |x|$. La funzione è assolutamente continua, quindi la sua derivata distribuzionale è la distribuzione indotta dalla funzione segno. Esplicitamente si può calcolare, integrando per parti,

$$\langle D(f) \, , \, \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, \varphi'(x) \, dx = \int_{-\infty}^{0} x \, \varphi'(x) \, dx - \int_{0}^{+\infty} x \, \varphi'(x) \, dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \, dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign}(x) \, \varphi(x) \, dx = \langle \text{sign}(x) \, , \, \varphi \rangle \, .$$

Possiamo calcolare la derivata distribuzionale seconda di $f(x) = |x|$. Si ha

$$D^2(f) = 2\delta_0.$$

• Esempio. Derivata di δ. Si ha

$$\langle D(\delta)\,,\,\varphi\rangle = -\langle \delta\,,\,\varphi'\rangle = -\varphi'(0).$$

Possiamo calcolare la derivata distribuzionale di ordine k:

$$\left\langle D^k(\delta)\,,\,\varphi\right\rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

18.7 Trasformata di Fourier di una distribuzione.

Sono soltanto indicati gli argomenti chiave che andrebbero trattati.

L'allargamento dello spazio delle funzioni test: lo spazio di Schwartz.

Le distribuzioni temperate.

Funzioni a crescita lenta.

Trasformata di Fourier di una distribuzione.

Formule di approssimazione.

Trasformata di Laplace di una distribuzione.