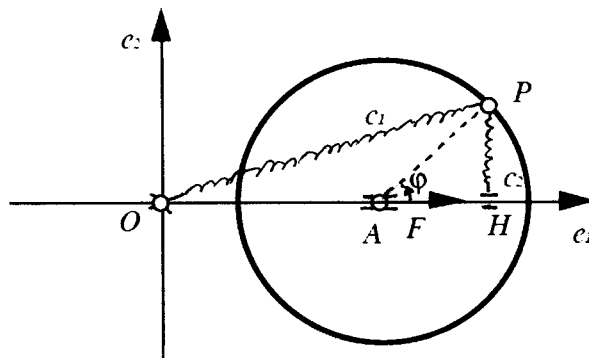


Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 11 febbraio 2008

G. Tondo



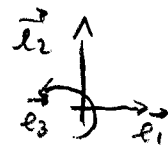
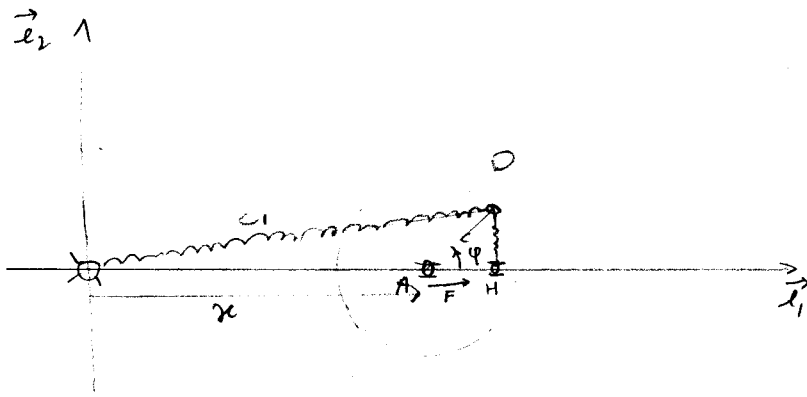
Un disco omogeneo di raggio R e massa m è vincolato, in un piano verticale, a scorrere senza attrito su di una guida orizzontale fissa ed è libero di ruotare intorno al suo centro A . Il disco è soggetto alla forza di due molle, come in figura, applicate in un punto P alla periferia del disco e di costanti elastiche c_1 e c_2 . Inoltre è soggetto a una forza orizzontale F applicata in A e al peso proprio.

STATICA.

- 1) Determinare le configurazioni di equilibrio del disco al variare del parametro $\lambda = \frac{F}{R(c_1+c_2)}$
- 2) discuterne la stabilità al variare di λ , supponendo $\lambda \neq 1$;
- 3) calcolare la reazione in A all'equilibrio.

DINAMICA.

- 4) Dire se vale il teorema di conservazione dell'energia meccanica e, in caso affermativo, scrivere l'integrale dell'energia;
- 5) scrivere le equazioni differenziali pure di moto;
- 6) calcolare le reazioni vincolari in A durante il moto in funzione delle coordinate libere.



Analisi cinematica: il disco ha 2 g.l.. Infatti, il vincolo di scorrimento lungo la guida è un vincolo semplice e, dal metodo del bilancio, segue che

$$l = g - v = 3 - 1 = 2.$$

D'altra parte, con il metodo dei congelamenti necessari, è immediato concludere che il disco ammette 2 spostamenti virtuali (indipendenti):

- 1 spostamento virtuale traslatorio lungo l'asse \vec{e}_1 ;
- 1 spostamento virtuale rotatorio intorno all'asse ortogonale al piano e passante per il suo centro A.

Scegliamo come coordinate libere le coordinate di figura

$$(\varphi, x) \quad -\bar{u} < \varphi \leq \bar{u} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Statica

1) Equilibri

I metodo: energia potenziale

Osserviamo che la sollecitazione attiva delle molle e del peso è conservativa, quindi ammette l'energia potenziale

$$V^{(\text{molle } 1)} = \frac{1}{2} c_1 |\vec{x}_P|^2, \quad V^{(\text{molle } 2)} = \frac{1}{2} c_2 |\vec{x}_P - \vec{x}_H|^2$$

$$V^{(\text{peso})} = -m \vec{g} \cdot \vec{x}_A$$

Verifichiamo, inoltre, che anche la sollecitazione del carico F concentrato in A è conservativa, calcolandone il lavoro virtuale:

$$\delta V^{(F_A)} = \vec{F}_A \cdot \delta \vec{x}_A = F \vec{e}_1 \cdot \delta x \vec{e}_1 = F \delta x = \delta(Fx) = \delta(-V^{(F_A)})$$

dove

$$V^{(F_A)} = -Fx$$

$$\begin{aligned} \text{Dato che } \vec{x}_P &= (x + R \cos \varphi) \vec{e}_1 + R \sin \varphi \vec{e}_2 \\ \vec{x}_A &= x \vec{e}_1 \\ (\vec{x}_P - \vec{x}_H) &= R \sin \varphi \vec{e}_2 \end{aligned}$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} V^{(\text{molle } 1)} &= \frac{1}{2} c_1 \left((x + R \cos \varphi)^2 + R^2 \sin^2 \varphi \right) = \frac{1}{2} c_1 \left(x^2 + 2Rx \cos \varphi + R^2 \right) \\ V^{(\text{molle } 2)} &= \frac{1}{2} c_2 R^2 \sin^2 \varphi, \quad V^{(\text{peso})} = -mg \vec{e}_2 \cdot x \vec{e}_1 = 0 \end{aligned}$$

Quindi, l'energia potenziale totale del sistema è:

$$(3.1) V(\varphi, x) = \frac{1}{2} c_1 (x^2 + 2Rx \cos \varphi) + \frac{1}{2} c_2 R^2 \sin^2 \varphi - Fx,$$

poiché possiamo trascurare la costante $\frac{1}{2} c_1 R^2$.

Dato che le derivate prime di $V(\varphi, x)$ sono:

$$(3.2) \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -Q_\varphi = -c_1 R x \sin \varphi + c_2 R^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \frac{\partial V}{\partial x} = c_1 x + c_1 R \cos \varphi - F \end{cases}$$

le equazioni pure di equilibrio risultano

$$(3.3) \begin{cases} R \sin \varphi (-c_1 x + c_2 R \cos \varphi) = 0 \\ x + R \cos \varphi = \frac{F}{c_1} \end{cases}$$

Il sistema precedente è un sistema di 2 equazioni nelle 2 incognite (φ, x) , lineare in x e non lineare in φ . Poiché la 1^a equazione è il prodotto di 2 equazioni, il sistema si spezza in

$$\begin{cases} \sin \varphi = 0 \\ x + R \cos \varphi = \frac{F}{c_1} \end{cases} \quad \text{OR} \quad \begin{cases} x - \frac{c_2 R \cos \varphi}{c_1} = 0 \\ x + R \cos \varphi = \frac{F}{c_1} \end{cases}$$

Il 1° sistema ha le soluzioni:

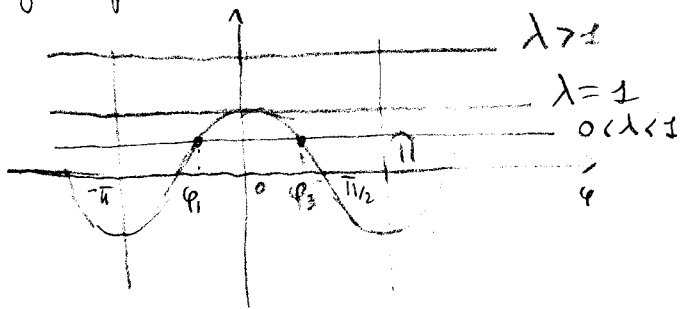
$$(4.1) \begin{cases} \varphi = 0, \bar{u} \\ \kappa = \frac{F-R}{c_1} \end{cases} \quad y_E^{(2)} = \left(0, \frac{F-R}{c_1}\right) ; \quad y_E^{(4)} = \left(\bar{u}, \frac{F}{c_1} + R\right)$$

Il 2° sistema (risolto per sostituzione o sottraendo le 2 equazioni) ammette le soluzioni

$$(4.2) \begin{cases} \cos \varphi = \frac{F}{R(c_1+c_2)} \\ \kappa = \frac{F}{c_1} - \frac{F}{c_1+c_2} = F \frac{c_2}{c_1(c_1+c_2)} \end{cases}$$

Però $\lambda = \frac{F}{R(c_1+c_2)} > 0$, la 1° equazione si può risolvere

graficamente



Nessuna soluzione

$$\varphi_2 = 0$$

$$\varphi_1 = -\varphi_3$$

$$\varphi_3 = \arccos \lambda$$

Dunque, il sistema (4.2) aggiunge alle (4.1) le ulteriori soluzioni

$$(4.3) \quad y_E^{(1)} = \left(\varphi_1, \frac{c_2}{c_1} R \lambda\right), \quad y_E^{(3)} = \left(\varphi_3, \frac{c_2}{c_1} R \lambda\right)$$

Il metodo: lavoro virtuale su di un rigido.

Calcoliamo il lavoro virtuale delle forze attive sul disco, utilizzando la formula del lavoro virtuale su un rigido:

$$LV^{(att)} = \vec{R} \cdot \delta \vec{x}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\chi}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_P^{(molle1)} + \vec{F}_P^{(molle2)} + \vec{F}_A + m\vec{g}$$

$$\vec{F}_P^{(molle1)} = -c_1 \vec{x}_P = -c_1 \left[(x + R \cos \varphi) \vec{e}_1 + R \sin \varphi \vec{e}_2 \right]$$

$$\vec{F}_P^{(molle2)} = -c_2 (\vec{x}_P - \vec{x}_H) = -c_2 R \sin \varphi \vec{e}_2$$

$$\vec{F}_A = F \vec{e}_1, \quad m\vec{g} = -mg \vec{e}_2$$

Quindi

$$(3.1) \quad \vec{R}^{att} = (F - c_1(x + R \cos \varphi)) \vec{e}_1 - (c_1 + c_2) R \sin \varphi \vec{e}_2 - mg \vec{e}_2$$

$$\vec{M}_A^{att} = (\vec{x}_P - \vec{x}_A) \times (\vec{F}_P^{(molle1)} + \vec{F}_P^{(molle2)})$$

$$= R (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) \times (-c_1(x + R \cos \varphi) \vec{e}_1 - (c_1 + c_2) R \sin \varphi \vec{e}_2)$$

$$= - (c_1 + c_2) R^2 \sin \varphi \cos \varphi \vec{e}_3 + c_1 R (x + R \cos \varphi) \sin \varphi \vec{e}_3$$

$$= (c_1 R x \sin \varphi - c_2 R^2 \sin \varphi \cos \varphi) \vec{e}_3$$

Inoltre

$$\delta \vec{x}_P = \delta x \vec{e}_1, \quad \vec{\chi} = \delta \varphi \vec{e}_3$$

Allora

$$LV^{(ext)} = (F - c_1(x + R \cos \varphi)) \delta x + (c_1 R \sin \varphi - c_2 R^2 \sin \varphi \cos \varphi) \delta \varphi$$

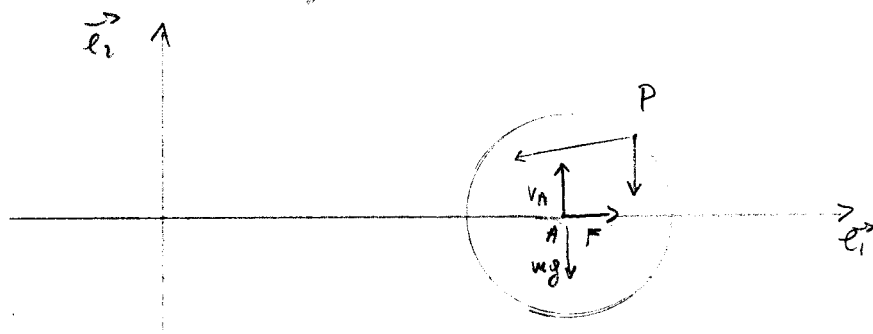
da cui si ottengono le forze generalizzate

$$(6.1) \begin{cases} Q_x = F - c_1(x + R \cos \varphi) \\ Q_\varphi = R \sin \varphi (c_1 x - c_2 R \cos \varphi) \end{cases}$$

e quindi le equazioni pure d'equilibrio (3.3)

III metodo: ECS

Disegniamo il diagramma delle forze.



$$\begin{cases} \vec{R}^{ext} = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{ext} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{R} \cdot \vec{e}_1: & -c_1(x + R \cos \varphi) + F = 0 \\ \vec{R} \cdot \vec{e}_2: & -c_1 R \sin \varphi - c_2 R \sin \varphi - mg + V_A = 0 \\ \vec{M}_A \cdot \vec{e}_3: & R \sin \varphi (c_1 x - c_2 R \cos \varphi) = 0 \end{cases}$$

N.B. Si osservi che la prima equazione è $Q_x = 0$ e la terza è $Q_\varphi = 0$. La seconda fornisce la reazione vincolare:

$$(6.2) \quad V_A = (c_1 + c_2) R \sin \varphi + mg$$

2) Stabilità degli equilibri.

Studiamo i punti stazionari dell'energia potenziale $V(\varphi, x)$.
A tale scopo, calcoliamo la matrice Hessiana di V
e valutiamola nei punti di equilibrio.

Dalle (3.1) si ottiene:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -c_1 R x \cos \varphi + c_2 R^2 (2 \cos^2 \varphi - 1)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \varphi} = -c_1 R \sin \varphi = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = c_1$$

Quindi

$$\mathcal{H}(x, \varphi) = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 R \sin \varphi \\ -c_1 R \sin \varphi & R(-c_1 x \cos \varphi + c_2 R(2 \cos^2 \varphi - 1)) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}|_{\vec{y}_E^{(1)} = (\varphi_1, \frac{c_2 R \lambda}{c_1})} = \begin{bmatrix} c_1 & +c_1 R \sqrt{1-\lambda^2} \\ c_1 R \sqrt{1-\lambda^2} & c_2 R^2 (\lambda^2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{11} = c_1 > 0, \quad \det \mathcal{H} = c_1 c_2 R^2 (\lambda^2 - 1) - c_1^2 R^2 (1 - \lambda^2) = (\lambda^2 - 1)(c_1 + c_2) c_1 R^2$$

$$\det \mathcal{H} = \begin{cases} > 0 & \text{se } \lambda > 1 \\ = 0 & \text{se } \lambda = 1 \\ < 0 & \text{se } \lambda < 1 \end{cases}$$

$\vec{y}_E^{(1)}$ escluso
 $\vec{y}_E^{(1)}$ sella \Rightarrow instabile

$$H_{\vec{y}_E^{(2)} = \left(0, \frac{F-R}{c_1}\right)} = \left[\begin{array}{c|c} c_1 & 0 \\ \hline 0 & R\left(-c_1\left(\frac{F-R}{c_1}\right) + c_2 R\right) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} c_1 & 0 \\ \hline 0 & R\left(-F + (c_1+c_2)R\right) \end{array} \right] \quad \text{L8}$$

$$H_{11} = c_1 > 0, \quad \det H = c_1 R \left(-F + (c_1+c_2)R\right) =$$

$$= c_1 (c_1+c_2) R^2 (-\lambda + 1)$$

$$\det H = \begin{cases} > 0 & \text{se } \lambda < 1 \Rightarrow \vec{y}_E^{(2)} \text{ min} \Rightarrow \text{stabile} \\ = 0 & \text{se } \lambda = 1 \text{ escluso} \\ < 0 & \text{se } \lambda > 1 \Rightarrow \vec{y}_E^{(2)} \text{ sella} \Rightarrow \text{instabile} \end{cases}$$

$$H_{\vec{y}_E^{(3)} = \left(\varphi_3, \frac{c_2}{c_1} R \lambda\right)} = \left[\begin{array}{c|c} c_1 & -c_1 R \sqrt{1-\lambda^2} \\ \hline -c_1 R \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} & c_2 R^2 (\lambda^2 - 1) \end{array} \right]$$

$$H_{11} = c_1 > 0, \quad \det H = c_1 c_2 R^2 (\lambda^2 - 1) - c_1^2 R^2 (1 - \lambda^2) =$$

$$= (\lambda^2 - 1) (c_1 + c_2) c_1 R^2$$

$$\det H = \begin{cases} > 0 & \text{se } \lambda > 1 \text{ } \neq \varphi_1 \\ = 0 & \text{se } \lambda = 1 \text{ escluso} \\ < 0 & \text{se } \lambda < 1 \Rightarrow \vec{y}_E^{(3)} \text{ sella} \Rightarrow \text{instabile} \end{cases}$$

$$H_{\vec{y}_E^{(4)} = \left(\bar{u}, \frac{F+R}{c_1}\right)} = \left[\begin{array}{c|c} c_1 & 0 \\ \hline 0 & R\left(c_1\left(\frac{F+R}{c_1}\right) + c_2 R\right) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} c_1 & 0 \\ \hline 0 & R\left(F + (c_1+c_2)R\right) \end{array} \right]$$

$$H_{11} = c_1 > 0, \quad \det H = c_1 R \left(F + (c_1+c_2)R\right) = c_1 (c_1+c_2) R^2 (\lambda + 1) > 0$$

$$\Rightarrow \vec{y}_E^{(4)} \text{ } \bar{e} \text{ stabile } \forall \lambda \geq 0$$

3) Reazioni vincolari in A

Poiché il vincolo in A è un appoggio liscio, esercite una reazione

$$\vec{\Phi}_A = V_A \vec{e}_z$$

Dalle I E/S proiettate lungo \vec{e}_z si ha (vedi 6.2)

$$(9.1) \quad V_A = mg + (c_1 + c_2) R \sin \varphi_E$$

riassumendo.

$$0 < \lambda < 1 \quad \vec{y}_E^{(1)} = \left(-\arccos \lambda, \frac{c_2}{c_1} R \lambda \right), \quad V_A = mg - (c_1 + c_2) R \sqrt{1 - \lambda^2}$$

instabile

$$\forall \lambda \quad \vec{y}_E^{(2)} = \left(0, \frac{F}{c_1} - R \right), \quad V_A = mg$$

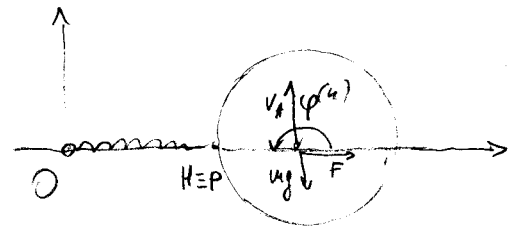
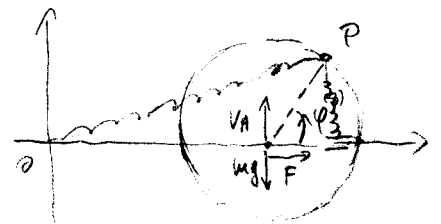
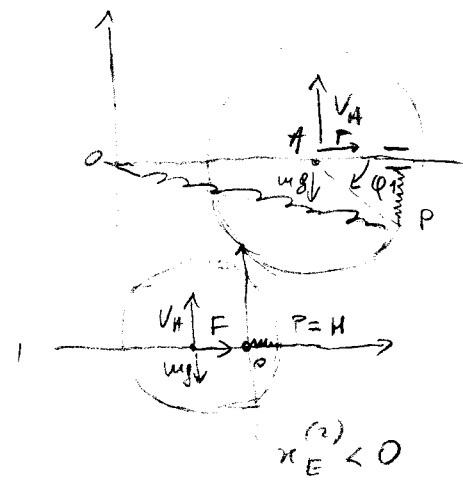
stabile $0 < \lambda < 1$
instabile $\lambda > 1$

$$0 < \lambda < 1 \quad \vec{y}_E^{(3)} = \left(\arccos \lambda, \frac{c_2}{c_1} R \lambda \right), \quad V_A = mg + (c_1 + c_2) R \sqrt{1 - \lambda^2}$$

instabile

$$\forall \lambda \quad \vec{y}_E^{(4)} = \left(\pi, \frac{F}{c_1} + R \right), \quad V_A = mg$$

stabile



Dinamica

- 4) Dal punto 1) segue che la sollecitazione attiva è conservativa. Inoltre, i vincoli sono lisci, fissi e bilateri. Quindi dal Teo di conservazione dell'energia meccanica segue che

$$E(t) = K + V = E(0)$$

dove $V(\varphi, x)$ è l'energia potenziale (3.1) e K è l'energia cinetica del disco, data da

$$K = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2, \quad I_A = \frac{1}{2} m R^2$$

essendo $A \equiv G$.

Quindi

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \dot{\varphi}^2$$

Allora

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} c_1 (x^2 + 2 R x \cos \varphi) + \frac{1}{2} c_2 R^2 \sin^2 \varphi - F x = E(0)$$

5) equazioni di Lagrange (in forme non conservative)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k \quad k=1, 2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi} \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\varphi} \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

Inoltre:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial x} = 0$$

dunque

$$\begin{cases} m \ddot{x} = F - c_1 (x + R \cos \varphi) \\ \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\varphi} = R \sin \varphi (c_1 x - c_2 R \cos \varphi) \end{cases}$$

6) Consideriamo la I ECD

$$\vec{B}^{\text{ext}} = m \frac{\ddot{\vec{c}}_G}{\partial c_G} \quad G \equiv A$$

$$(F - c_1 (x + R \cos \varphi)) \vec{e}_1 - (c_1 + c_2) R \sin \varphi \vec{e}_2 + V_A \vec{e}_2 - mg \vec{e}_2 = m \ddot{x} \vec{e}_1$$

Scomponendo lungo \vec{e}_1 ed \vec{e}_2 si ha:

$$\begin{cases} V_A = mg + (c_1 + c_2) R \sin \varphi \\ m \ddot{x} = F - c_1 (x + R \cos \varphi) \end{cases}$$

N.B. La 1^a eq. dà la reazione in A che, in questo caso, dipende solo da φ .
 La 2^a eq. coincide con l'equazione di Lagrange relativa alla coordinata x .
 Si verifichi per esercizio che l'altra equazione di Lagrange coincide con la II ECD con polo in A.