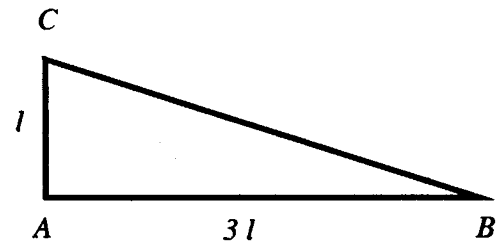
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 14 Gennaio 2008

(G. Tondo)

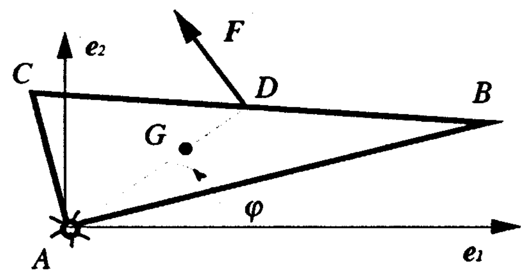


È data la lamina triangolare omogenea di figura, di massa m.

1) Essendo D il punto medio dell'ipotenusa BC, calcolare il momento d'inerzia rispetto alla retta passante per i punti A e D.

STATICA.

Si vincoli la lamina in un piano <u>verticale</u> con una cerniera fissa e liscia in A; le forze attive sono: il peso proprio e la forza di figura, di modulo $|\mathbf{F}|$, applicata in D e ortogonale al segmento AD in ogni configurazione del sistema. Sia φ l'angolo tra la retta orizzontale per A e il segmento AG (essendo G il baricentro della lamina).



2) Determinare le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri del sistema e discuterne la stabilità;

3) calcolare le reazioni vincolari in A all'equilibrio.

DINAMICA.

Inoltre si chiede di:

4) scrivere un'equazione differenziale pura di moto;

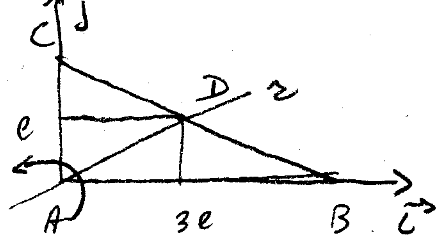
5) scrivere l'integrale dell'energia meccanica a partire dalle condizioni iniziali:

$$\varphi(0) = 0 \quad , \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \ ;$$

6) calcolare le reazioni vincolari in A durante il moto in funzione di φ.

Tema d'esame del 14-01-2008

1) Geometria delle masse



$\overline{CD} = \overline{BD}$

Calcolo di I_r.

Seguiamo la procedura standard. Determiniamo prima la matrice d'inerzia rs. ad A, I_A e poi applichiamo la formula

$$I_r = \text{vers}(\vec{x}_D - \vec{x}_A) \cdot \mathbb{I}_A\left(\text{vers}(\vec{x}_D - \vec{x}_A)\right).$$

Calcolo di I_A

$$I_A = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}.$$

$$I_{11} = \int_{\mathcal{R}} \rho(P)\, y^2\, dx\,dy = \rho \int_0^{3\ell} dx \int_0^{y=f(x)} y^2\, dy$$

dove $y=f(x)$ è l'equazione cartesiana della retta passante per B e C, cioè:

$$y = -\frac{1}{3}x + \ell$$

ρ: densità di massa $= \frac{2m}{3\ell^2}$

Quindi

$$I_{11} = \rho \int_0^{3\ell} dx \int_0^{\ell - \frac{x}{3}} y^2 dy = \rho \int_0^{3\ell} dx \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\ell-\frac{x}{3}} = \rho \int_0^{3\ell} \frac{1}{3}\left(\ell - \frac{x}{3}\right)^3 dx =$$

$$= \rho\left[-\frac{1}{4}\left(\ell - \frac{x}{3}\right)^4\right]_0^{3\ell} = -\frac{\rho}{4}\left(-\ell^4\right) = \rho\frac{\ell^4}{4} = \frac{2m}{3\ell^2}\frac{\ell^4}{4} = \frac{m\ell^2}{6}$$

$$I_{22} = \int_{\mathcal{R}} \rho(P)\, x^2\, dx\,dy = \rho \int_0^{3\ell} dx \int_0^{y=f(x)} x^2 dy = \rho \int_0^{3\ell} x^2 dx \int_0^{\ell - x/3} dy = \rho \int_0^{3\ell} x^2\left(\ell - \frac{x}{3}\right) dx$$

$$= \rho \int_0^{3\ell}\left(\ell x^2 - \frac{x^3}{3}\right) dx = \frac{\rho}{3}\left[\ell x^3 - \frac{x^4}{3\cdot 4}\right]_0^{3\ell} = -\frac{\rho}{3}\left[\ell(3\ell)^3 - \frac{(3\ell)^4}{4}\right] = -\rho\ell^4\left(9 - \frac{27}{4}\right) =$$

$$= -\rho\ell^4\frac{9}{4} = -\frac{2m}{3\ell^2}\frac{\ell^4 9}{4} = \frac{3}{2}m\ell^2$$

$$I_{12} = -\int_R \rho(P)\, x\, y\, dx\, dy = -\rho \int_0^{3\ell} dx \int_0^{y=f(x)} xy\, dy =$$

$$= -\rho \int_0^{3\ell} x\, dx \int_0^{\left(\ell-\frac{x}{3}\right)} y\, dy = -\rho \int_0^{3\ell} x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\left(\ell-\frac{x}{3}\right)} dx = -\rho \int_0^{3\ell} \frac{x}{2}\left(\ell-\frac{x}{3}\right)^2 dx$$

$$= -\frac{\rho}{2} \int_0^{3\ell} x\left(\ell^2+\frac{x^2}{9}-\frac{2}{3}\ell x\right) dx = -\frac{\rho}{2}\int_0^{3\ell}\left(\ell^2 x - \frac{2}{3}\ell x^2 + \frac{x^3}{9}\right) dx$$

$$= -\frac{\rho}{2}\left[\ell^2\frac{x^2}{2} - \frac{2}{9}\ell x^3 + \frac{x^4}{36}\right]_0^{3\ell} = -\frac{\rho}{2}\left(\frac{\ell^2}{2}9\ell^2 - \frac{2}{\cancel{9}}\ell\, \cancel{27}^{3}\ell^3 + \frac{81\ell^4}{36}\right)$$

$$= -\frac{\cancel{2}m}{3\ell^2}\left(\frac{9}{2}\ell^4 - 6\ell^4 + \frac{9}{4}\ell^4\right) = -\frac{1}{\cancel{3}}\frac{m}{\ell^2}\left(\frac{\cancel{3}}{4}\ell^4\right) = -\frac{m\ell^2}{4}$$

Dunque

$$I_A = m\ell^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{vers}\left(\vec{x}_D - \vec{x}_A\right) = \ell\left(\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) \Big/ \left(\frac{\ell}{2}\sqrt{10}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3\vec{i}+\vec{j}\right)$$

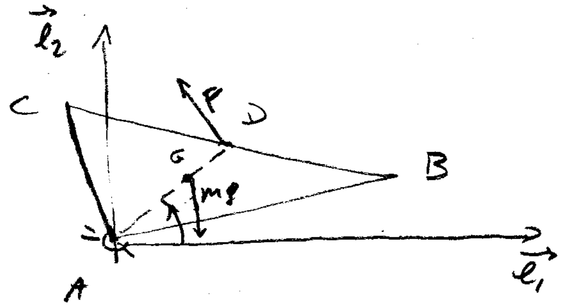
Allora

$$I_r = \frac{1}{\sqrt{10}}[3,1]\, m\ell^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{m\ell^2}{10}[3,1]\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \frac{m\ell^2}{10}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{20}m\ell^2$$

N.B. Poichè $I_A\left(\text{vers}(\vec{x}_D - \vec{x}_A)\right) = \frac{m\ell^2}{4\sqrt{10}}[1,3]$, $\text{vers}(\vec{x}_D - \vec{x}_A)$ NON è $API(A)$.

Ciò dipende dal fatto che la mediana r è asse di simmetria <u>obliqua</u> e non ortogonale per R.

Statica



2) equilibrio e stabilità

$n = 2 \quad l = 3-2 = 1 \qquad c.l. = \varphi \in \mathbb{R}$

$$LV^{(att)} = \vec{F}_D \cdot \delta\vec{x}_D + m\vec{g} \cdot \delta\vec{x}_G$$

$$\vec{x}_D = \frac{l\sqrt{10}}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right) \qquad \delta\vec{x}_D = \frac{l\sqrt{10}}{2}\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2\right)\delta\varphi$$

$$\vec{x}_G = \frac{\cancel{2}}{3}\frac{l\sqrt{10}}{\cancel{2}}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right) \qquad \delta\vec{x}_G = l\frac{\sqrt{10}}{3}\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2\right)\delta\varphi$$

$$\vec{F}_D = F\,\vec{e}_3 \times \mathrm{vers}(\vec{x}_D - \vec{x}_A) = F\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

Quindi

$$LV^{(att)} = F\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2\right) \cdot \frac{l\sqrt{10}}{2}\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2\right)\delta\varphi + \\ - mg\,\vec{e}_2 \cdot \frac{l\sqrt{10}}{3}\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2\right)\delta\varphi$$

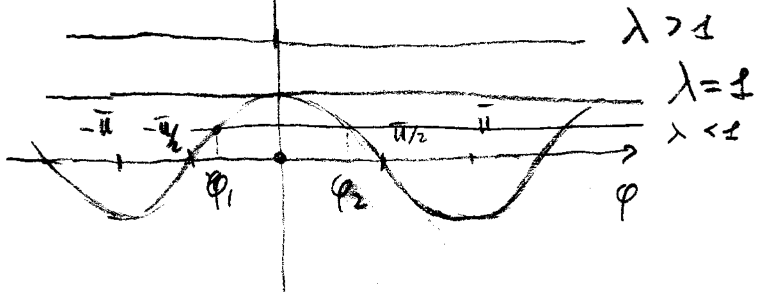
$$= F\frac{l\sqrt{10}}{2}\,\delta\varphi - \frac{l\sqrt{10}}{3}\,mg\cos\varphi\,\delta\varphi$$

La forza generalizzata è:

$$Q_\varphi = l\sqrt{10}\left(\frac{F}{2} - \frac{mg}{3}\cos\varphi\right)$$

Equazione pura d'equilibrio:

$$\cos\varphi = \frac{3}{2}\frac{F}{mg} = \lambda$$



se $\lambda > 1$ Nessuna soluzione

se $\lambda = 1 \qquad \varphi_{eq}^{(0)} = 0$

se $\lambda < 1 \qquad \varphi_{eq}^{(1)} = -\varphi_{eq}^{(2)} = -\arccos\lambda + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Lavoro virtuale (II metodo)

Poichè il sistema è rigido, possiamo usare la formula del lavoro virtuale per i rigidi:

$$LV^{(a\#)} = \cancel{\vec{R}^{(a\#)} \cdot \delta \vec{x}_A} + \vec{M}_A \cdot \vec{\chi} = M_A \vec{e}_3 \cdot \delta\varphi \vec{e}_3 = M_A \delta\varphi$$

scegliendo il punto fisso A come polo di riduzione.

$$\vec{M}_A = (\vec{x}_D - \vec{x}_A) \times \vec{F}_D + (\vec{x}_G - \vec{x}_A) \times m\vec{g}$$

$$= \frac{\sqrt{10}\, l}{2} F \vec{e}_3 - mg \frac{1}{3}\sqrt{10}\, l \cos\varphi \, \vec{e}_3 = l\sqrt{10}\left(\frac{F}{2} - \frac{1}{3} mg\cos\varphi\right)\vec{e}_3$$

Dunque:

$$LV^{(a\#)} = l\sqrt{10}\left(\frac{F}{2} - \frac{1}{3} mg \cos\varphi\right)\delta\varphi$$

e Q_φ coincide con il momento (scalare) del sistema rs. ad A.

Stabilità

Il sistema è (localmente) conservativo poichè il LV è il differenziale di una funzione, l'energia potenziale, data da

$$V(\varphi) = -\int Q_\varphi \, d\varphi = l\sqrt{10}\left(\frac{mg}{3}\sin\varphi - \frac{F}{2}\varphi\right) + \cancel{cst}$$

$$= mg\frac{l\sqrt{10}}{3}\left(\sin\varphi - \frac{3F}{2mg}\varphi\right) = mgl\frac{\sqrt{10}}{3}\left(\sin\varphi - \lambda\varphi\right)$$

$$V'(\varphi) = -Q_\varphi = mgl\frac{\sqrt{10}}{3}\left(\cos\varphi - \lambda\right)$$

$$V''(\varphi) = -Q_\varphi' = -mgl\frac{\sqrt{10}}{3}\sin\varphi$$

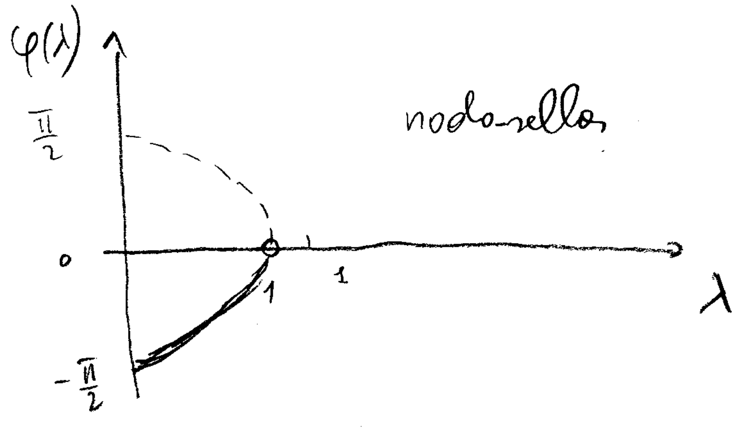
Allora

$V''(\varphi^{(0)}=0) = 0 \Rightarrow$ caso dubbio se $\lambda = 1$

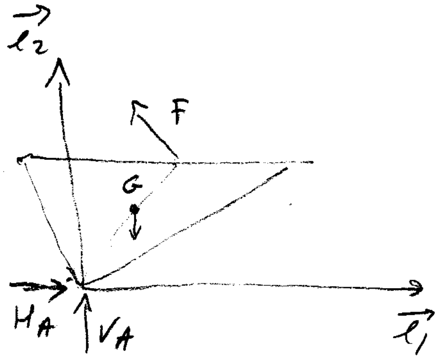
$V''(\varphi^{(1)}) > 0 \Rightarrow \min \Rightarrow$ eq. stabile
$V''(\varphi^{(2)}) < 0 \Rightarrow \max \Rightarrow$ eq. instabile
$\Big\}$ se $\lambda < 1$

$V'''(\varphi) = -mgl\frac{\sqrt{10}}{3}\cos\varphi \Rightarrow V'''(\varphi^{(0)}) < 0 \Rightarrow$ flesso $\Rightarrow$ eq. instab. se $\lambda = 1$

Diagramma di biforcazione



3) Reazioni in A all'equilibrio



$\vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_1 = 0 \qquad H_A - F \sin \varphi_E = 0$

$\vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_2 = 0 \qquad V_A - mg + F \cos \varphi_E = 0$

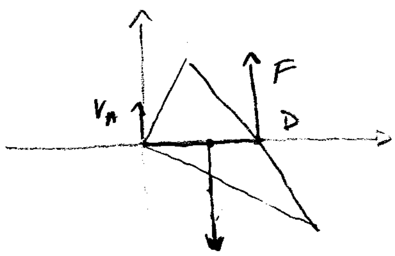
Quindi

$$H_A = F \sin \varphi_E = \begin{cases} \lambda=1 & 0 \\ \lambda<1 & \begin{cases} -F\sqrt{1-\lambda^2} & \text{se } \varphi_E = \varphi^{(1)} \\ F\sqrt{1-\lambda^2} & \text{se } \varphi_E = \varphi^{(2)} \end{cases} \end{cases}$$

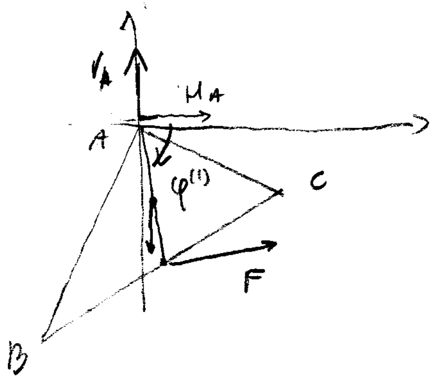
$$V_A = mg - F\cos\varphi_E = mg - F\lambda \qquad \text{se } \lambda \leq 1$$

Ricapitolando:

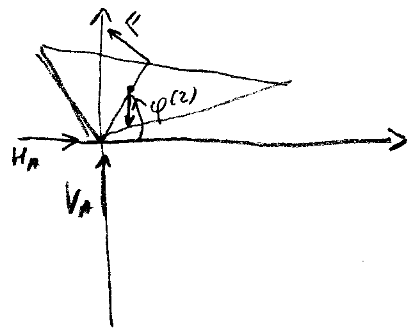
se $\lambda = 1$ $\quad \varphi^{(0)} = 0$, instabile, $\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = \frac{mg}{3} > 0 \end{cases}$



se $\lambda < 1$ $\quad \varphi^{(1)} = -\varphi^{(2)}$, stabile, $\begin{cases} H_A = -F\sqrt{1-\lambda^2} < 0 \\ V_A = mg - F\lambda \end{cases}$



$\varphi^{(2)} = \arccos\lambda$, instabile $\begin{cases} H_A = F\sqrt{1-\lambda^2} > 0 \\ V_A = mg - F\lambda \end{cases}$



<u>Dinamica</u>

Scrivo l'equazione di Lagrange per i sistemi conservativi.

$$\mathcal{L} = K - V$$

$$K = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} m l^2\right)\dot{\varphi}^2$$

Dunque

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2\right) - m g l \frac{\sqrt{10}}{3}\left(\sin\varphi - \lambda\varphi\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{5}{3} m l^2 \dot{\varphi} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{5}{3} m l^2 \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial(-V)}{\partial \varphi} = - m g l \frac{\sqrt{10}}{3}\left(\cos\varphi - \lambda\right)$$

L'equazione di Lagrange è:

$$\frac{5}{\cancel{3}} \cancel{m} l^{\cancel{2}} \ddot{\varphi} + \cancel{m} g \cancel{l} \frac{\sqrt{10}}{\cancel{3}}\left(\cos\varphi - \lambda\right) = 0$$

Cioè

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{l}\frac{\sqrt{10}}{5}\left(\lambda - \cos\varphi\right) = g(\varphi)$$

N.B. L'eq. di Lagrange coincide con la II ECD con polo nel punto fisso A:

$$\vec{M}_A \cdot \vec{e}_3 = \frac{d\vec{L}_A}{dt} \cdot \vec{e}_3 \iff \vec{M}_A \cdot \vec{e}_3 = I_A \ddot{\varphi}$$

Il sistema è una macchina semplice con vincoli fissi, lisci e forze posizionali; quindi vale il teorema di conservazione dell'energia meccanica.

$$K + V = E|_{t=0} \qquad \text{durante i moti del sistema}$$

Quindi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}m\ell^2\right)\dot{\varphi}^2 + mg\ell\frac{\sqrt{10}}{3}\left(\sin\varphi - \lambda\varphi\right) = \frac{5}{6}m\ell^2\omega_0^2,$$

da cui

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{6}{5m\ell^2}\left(\frac{5}{6}m\ell^2\omega_0^2 - mg\ell\frac{\sqrt{10}}{3}\left(\sin\varphi - \lambda\varphi\right)\right) =$$
$$= \omega_0^2 - \frac{2}{5}\sqrt{10}\,\frac{g}{\ell}\left(\sin\varphi - \lambda\varphi\right) = f^2(\varphi)$$

6) Reazioni vincolari durante il moto in funzione di φ

Uso la I ECD: $\vec{R}^{ext} = m\ddot{\vec{x}}_G$

$$H'_A - F\sin\varphi = m\ddot{x}_G, \qquad \dot{x}_G = \frac{\ell\sqrt{10}}{3}\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right), \quad \ddot{x}_G = \frac{\ell\sqrt{10}}{3}\left(-\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right)$$

$$V'_A - mg + F\cos\varphi = m\ddot{y}_G, \quad \dot{y}_G = \frac{\ell\sqrt{10}}{3}\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right), \quad \ddot{y}_G = \frac{\ell\sqrt{10}}{3}\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right)$$

Quindi

$$\begin{cases} H'_A = F\sin\varphi + m\dfrac{\ell\sqrt{10}}{3}\left(-\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right) \\ V'_A = mg - F\cos\varphi + m\dfrac{\ell\sqrt{10}}{3}\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right) \end{cases}$$

Sostituendo nelle eq. suddette $f^2(\varphi)$ e $g(\varphi)$ ottengo la risposta.