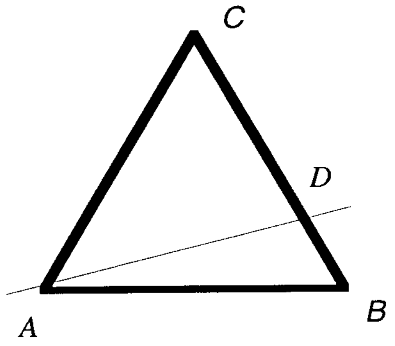
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 21 luglio 2008

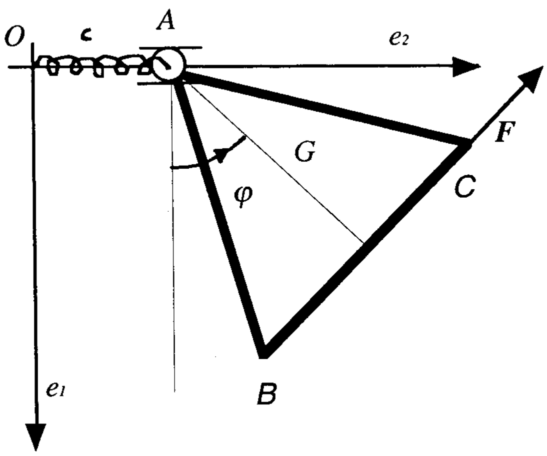
(G. Tondo)



È dato un **telaio** triangolare omogeneo i cui lati sono tutti di lunghezza l e massa m.

1) Calcolare il momento d'inerzia del telaio rispetto alla retta passante per il vertice A e per il punto D tale che $BD = l/4$.

STATICA.



Si vincoli il telaio in un piano **verticale** con una cerniera liscia in A e scorrevole su un asse orizzontale. Le forze attive sono: la forza $\mathbf{F_C} = F\mathbf{vers}\,(\mathbf{C}-\mathbf{B})$ applicata in C, la forza di richiamo della molla e il peso proprio del telaio.

2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri del sistema;

3) calcolare le reazioni vincolari in A all'equilibrio.

DINAMICA.

Inoltre si chiede di:

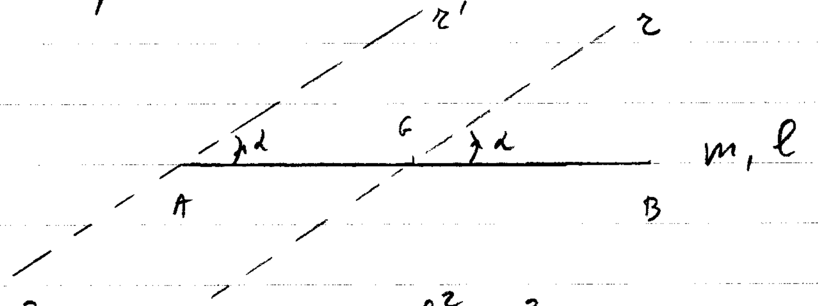
4) scrivere due equazioni differenziali pure di moto;

5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, determinarla;

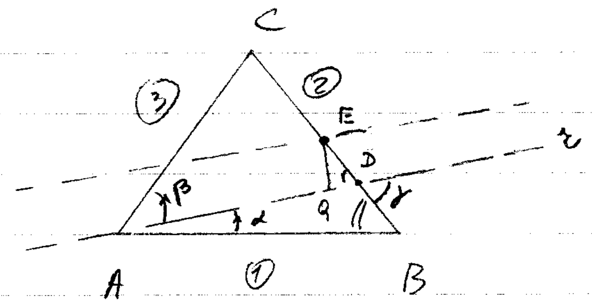
6) calcolare le reazioni vincolari in A durante il moto in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate rispetto al tempo.

Tema del 21/07/2008

I metodo: utilizziamo le formule per il momento d'inerzia di un'asta omogenea rispetto ad un asse che forma un angolo α con l'asta e passante rispettivamente per il centro di massa e un estremo dell'asta.



(1.1) $I_{r'} = \frac{1}{3} m l^2 \sin^2\alpha \qquad I_r = \frac{1}{12} m l^2 \sin^2\alpha$



$$I_r = I_r^{(1)} + I_r^{(2)} + I_r^{(3)}$$

$$I_r^{(1)} = \frac{1}{3} m l^2 \sin^2\alpha$$

$$I_r^{(2)} \overset{HS}{=} \frac{1}{12} m l^2 \sin^2\gamma + m\overline{EQ}^2 = \frac{7}{48} m l^2 \sin^2\gamma \Leftarrow \overline{EQ} = \overline{ED}\sin\gamma = \frac{l}{4}\sin\gamma$$

$$I_r^{(3)} = \frac{1}{3} m l^2 \sin^2\beta,$$

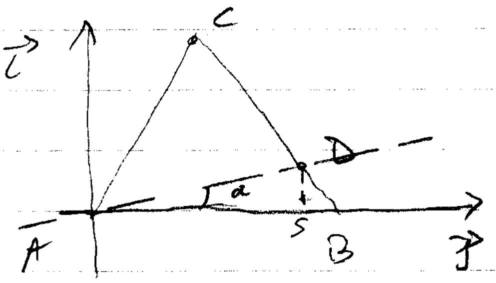
dove $\gamma = \frac{\pi}{3} + \alpha$, $\beta = \frac{\pi}{3} - \alpha$

Perciò:

$$\sin\gamma = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha$$

Quello che ora ci interessa non è l'angolo α ma $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$. Per calcolarli, basta osservare che



$$D - A = \frac{l}{8}\left(7\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}\right) \qquad \overline{AD} = |D-A| = \frac{\sqrt{52}}{8}$$

Quindi

$$\sin\alpha = \frac{\overline{DS}}{\overline{AD}} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}\,\cancel{8}}{\cancel{8}\sqrt{52}\,\cancel{l}} = \sqrt{\frac{3}{52}} =$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AS}}{\overline{AD}} = \frac{7\cancel{l}\,\cancel{8}}{\cancel{8}\sqrt{52}\,\cancel{l}} = \frac{7}{\sqrt{52}}$$

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{7}{\sqrt{52}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{52}} = 4\sqrt{\frac{3}{52}} =$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{7}{\sqrt{52}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{52}} = 3\sqrt{\frac{3}{52}}$$

Allora

$$I_z^{(1)} = \frac{1}{\cancel{3}} m l^2 \frac{\cancel{3}}{52} = \frac{1}{52} m l^2$$

$$I_z^{(2)} = \frac{7}{\cancel{48}} m l^2 \left(\cancel{16}\,\frac{\cancel{3}}{52}\right) = \frac{7}{52} m l^2$$

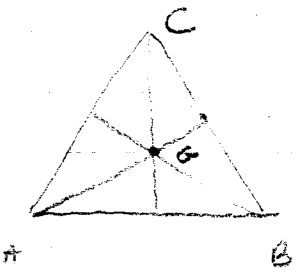
$$I_z^{(3)} = \frac{1}{\cancel{3}} m l^2 \left(9 \cdot \frac{\cancel{3}}{52}\right) = \frac{9}{52} m l^2$$

Dunque,

$$I_z = m\ell^2\left(\frac{1}{52}+\frac{7}{52}+\frac{9}{52}\right)=\frac{17}{52}m\ell^2$$

Calcolo del centro di massa G

Nelle pagine successive utilizzeremo più volte il vettore posizione del centro di massa $\vec{x}_G$. Per determinarlo, useremo le proprietà di simmetria materiale del telaio.



$$\overline{CG} = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right) = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$$

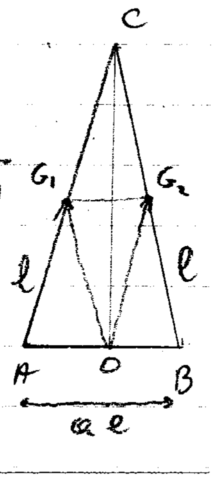
Infatti, poichè il telaio è un triangolo equilatero omogeneo, ammette le mediane come assi di simmetria materiale. Quindi, G appartiene all'incontro delle mediane, cioè coincide con il baricentro geometrico del triangolo.

N.B. Appena il telaio non è più equilatero, G NON coincide più con il baricentro geometrico. Per esempio, se il telaio è isoscele, dalla formula per il centro di massa e dalle proprietà distributive si ricava che

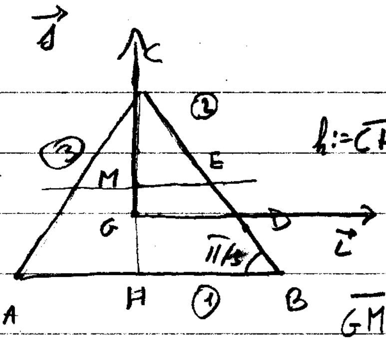
$$\vec{x}_G-\vec{x}_O = \frac{\rho\ell(\vec{x}_{G_1}-\vec{x}_O)+\rho\ell(\vec{x}_{G_2}-\vec{x}_O)}{\rho(2\ell+a\ell)} = \frac{\vec{x}_{G_1}+\vec{x}_{G_2}}{2+a}$$

$$= \frac{\vec{x}_C}{2+a}$$

$$\rho = \frac{M}{\ell(2+a)}$$



Allora, $\vec{x}_G-\vec{x}_O = \dfrac{\vec{x}_C}{3}$ se e solo se $a = 1 \Leftrightarrow$ telaio equilatero.



$h := \overline{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$

$\overline{GM} = \overline{CG} - \overline{CM} = \frac{h}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12} l$

II metodo: usiamo la matrice d'inerzia. A tale scopo, determiniamo la matrice d'inerzia rispetto a una terna centrata nel centro di massa G e con assi paralleli all'altezza CH e al lato AB.

Essendo CH asse di simmetria materiale ortogonale per il telaio, l'asse $\vec{j}$ è asse principale d'inerzia per G e quindi la terna $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è una terna principale d'inerzia. Dunque, la matrice d'inerzia I_G è diagonale.

$$I_G = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_x + J_y \end{bmatrix}$$

Calcolo di J_x $\qquad J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} + J_x^{(3)}$

$$J_x^{(1)} \overset{HS}{=} \cancel{I^{(1)}_{AB}} + m\,\overline{GH}^2 = m\left(\frac{h}{3}\right)^2 = m\left(\frac{l}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{12} m l^2$$

$$J_x^{(2)} \overset{HS}{=} I^{(2)}_{ME} + m\,\overline{GM}^2 \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{12} m l^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + m\left(\frac{\sqrt{3}}{12} l\right)^2 = \frac{1}{12} m l^2 \frac{3}{4} + \frac{3}{144} m l^2 = \frac{1}{12} m l^2$$

$$J_x^{(3)} = J_x^{(2)}$$

Quindi

$$J_x = \frac{3}{12} m l^2 = \frac{1}{4} m l^2$$

N.B. La notazione HS indica le formule di trasporto di Huygens-Steiner.

Calcolo di J_y: $J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} + J_y^{(3)}$

$$J_y^{(1)} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$J_y^{(2)} \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{3} m l^2 \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} m l^2 \frac{1}{4} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$J_y^{(3)} = J_y^{(2)}$$

Dunque

$$J_y = \frac{3}{12} m l^2 = \frac{1}{4} m l^2$$

N.B. Il fatto che $J_x = J_y$ equivale al fatto che l'autospazio corrispondente all'autovalore J_x della matrice d'inerzia I_G, ha dimensione 2. Quindi tutte le coppie di assi ortogonali centrate in G, insieme con l'asse $\vec{k}$, sono TPI(G). In altri termini, l'ellisse centrale d'inerzia è una circonferenza.

Allora, la matrice d'inerzia I_G è data da

$$(5.1) \quad I_G = m l^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ora basta "trasportare" la matrice I_G in un qualunque punto della retta per A e D, per rispondere alla domanda 1). Per motivi che vedremo in dinamica, conviene scegliere il punto A e utilizzare la formula HS (OI21.1) degli Appunti per il trasporto della matrice centrale d'inerzia.

Nel nostro caso, la formula suddetta si scrive

$$I_A = I_G + 3m \begin{bmatrix} {y'_A}^2 & -x'_A y'_A & 0 \\ -x'_A y'_A & {x'_A}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {x'_A}^2 + {y'_A}^2 \end{bmatrix} \qquad x'_A = -\frac{l}{2}, \quad y'_A = -\frac{h}{3} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} l$$

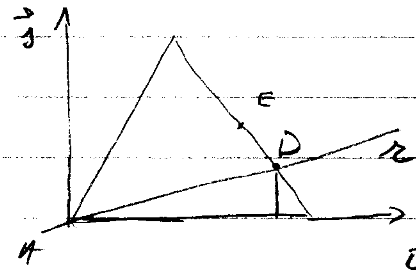
dove x'_A e y'_A sono le coordinate del punto A rs. alla terna $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Quindi

$$I_A = m l^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 3 m l^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{4\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$(3.1) \qquad = m l^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Indicando con r la retta passante per i punti A e D, vale



$$I_r = vers(D-A) \cdot \mathbb{I}_A\left(vers(D-A)\right)$$

$$D - A = l\left(\frac{7}{8}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

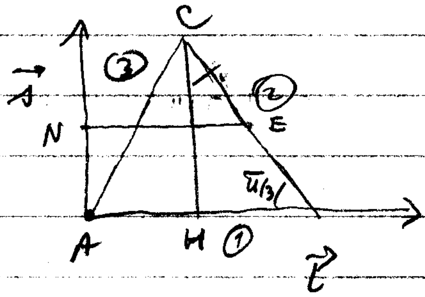
$$vers(D-A) = \frac{1}{\sqrt{52}}\left(7\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{52}} [7, \sqrt{3}] \, m l^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{52}} \begin{bmatrix} 7 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{m l^2}{52} [7, \sqrt{3}] \begin{bmatrix} \frac{7}{2} - \frac{3}{4} \\ -\frac{7\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{m l^2}{52} [7, \sqrt{3}] \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} = \frac{m l^2}{52}\left(\frac{77}{4} - \frac{9}{4}\right) = m l^2 \frac{17}{52}$$

<u>III metodo</u>: determiniamo direttamente la matrice I_A

$$I_A = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_x+I_y \end{bmatrix}$$



$$I_x = \cancel{I_x^{(1)}} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)}$$

$$I_x^{(2)} \overset{HS}{=} I_{ME}^{(2)} + m\,\overline{MH}^2 = \frac{1}{12} m l^2 \sin^2\frac{\pi}{3} + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} m l^2 + m\frac{3}{16} l^2 = \frac{1}{4} m l^2$$

$$I_x^{(3)} = I_x^{(2)}$$

Quindi $\quad I_x = \frac{1}{2} m l^2$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)}$$

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{3} m l^2$$

$$I_y^{(2)} \overset{HS}{=} \frac{1}{12} m l^2 \sin^2\frac{\pi}{6} + m\,\overline{EN}^2 = \frac{1}{48} m l^2 + m\left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{7}{12} m l^2$$

$$I_y^{(3)} = \frac{1}{3} m l^2 \sin^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{12} m l^2$$

Dunque

$$I_y = \frac{1}{3} m l^2 + \frac{7}{12} m l^2 + \frac{1}{12} m l^2 = m l^2$$

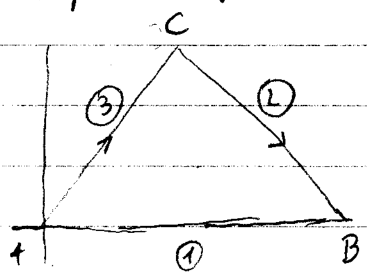
Calcolo di I_{xy}

$$I_{xy} = -\int_{P \in R} \rho(P)\, x(P)\, y(P)\, d\tau \qquad \rho(P) = \frac{m}{\ell}$$

Poichè il rigido è 1-dimensionale, l'integrale precedente è un integrale di linea su un cammino (regolare a tratti).

$$I_{xy} = \cancel{-\frac{m}{\ell}\int_{①} x(P)\, y(P)\, ds} - \frac{m}{\ell}\int_{②} x(P)\, y(P)\, ds - \frac{m}{\ell}\int_{③} x(P)\, y(P)\, ds$$

Per calcolare gli integrali ② e ③, bisogna parametrizzare i due cammini, per esempio, mediante l'ascissa curvilinea.



$B = (\ell, 0)$

$C = \left(\frac{\ell}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)$

③ l'equazione parametrica del segmento AC è:

$$P(s) = s \text{ vers}\left(\vec{x}_C\right) = s\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) \qquad s \in [0, \ell]$$

② l'equazione parametrica del segmento BC è:

$$P(s) = \vec{x}_C + s \text{ vers}\left(\vec{x}_B - \vec{x}_C\right) = \ell\left(\frac{\vec{i}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) + s\left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$$

$$s \in [0, \ell]$$

Allora

$$\int_{③} x(P(s))\,y(P(s))\,ds = \int_0^{\ell} \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,s\,ds = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{\ell^3}{3} = \frac{\ell^3}{4\sqrt{3}}$$

$$\int_{②} x(P(s))\,y(P(s))\,ds = \int_0^{\ell} \left(\frac{\ell}{2}+\frac{s}{2}\right)\cdot\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}-\frac{\ell\sqrt{3}}{2}s\right) ds$$

$$= \int_0^{\ell} \frac{1}{2}(\ell+s)\,\frac{\sqrt{3}}{2}(\ell-s)\,ds = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\ell}(\ell^2-s^2)\,ds =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\ell^2 s - \frac{s^3}{3}\right]_0^{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\ell^3 - \frac{\ell^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}_2}\,\frac{\cancel{2}\ell^3}{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\ell^3$$

Quindi

$$I_{xy} = -\frac{m}{\ell}\left(\frac{\ell^3}{2\sqrt{3}}+\frac{\ell^3}{4\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{4\sqrt{3}}\,m\ell^2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\,m\ell^2$$

Allora, la matrice I_A coincide con la (3.1) e I_2 si calcola come a pag. 3.

Statica

Analisi cinematica: il sistema è un rigido soggetto a un vincolo semplice (cerniera scorrevole). Quindi

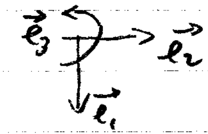
$$l = f - v = 3 - 1 = 2,$$

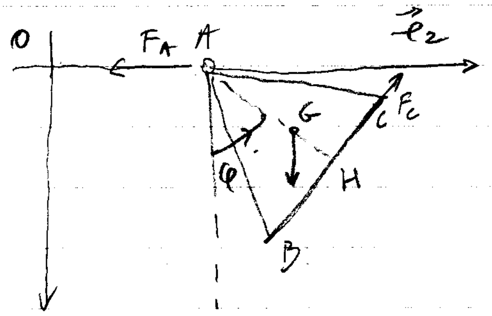
cioè il sistema ha 2 g.l.. Come coordinate libere scegliamo l'ascissa del punto A, x, e l'angolo φ di figura. Quindi, le configurazioni del sistema sono individuate da

$$\vec{q} = (\varphi, x)$$

2) Equilibri: utilizziamo il PLV per i rigidi piani

$$LV^{att} = \vec{R}^{att} \cdot \delta\vec{x}_A + \vec{M}_A^{att} \cdot \delta\varphi\, \vec{e}_3$$





$$\vec{x}_A = x\,\vec{e}_2 \qquad \delta\vec{x}_A = \delta x\,\vec{e}_2$$

$$\vec{F}_A = -c\,x\,\vec{e}_2$$

$$\vec{R}^{att} = \vec{F}_A + 3m\vec{g} + \vec{F}_C$$

$$\vec{F}_C = F\,\vec{e}_3 \times \mathrm{vers}(\vec{x}_H - \vec{x}_A) = F(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2)$$

$$(0.1) \quad \vec{M}_A^{att} = (\vec{x}_G - \vec{x}_A) \times 3m\vec{g} + (\vec{x}_C - \vec{x}_A) \times \vec{F}_C$$

$$= \frac{l}{\sqrt{3}}(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2) \times 3mg\,\vec{e}_1 + \left[(\vec{x}_C - \vec{x}_H) + (\vec{x}_H - \vec{x}_A)\right] \times \left(F\,\vec{e}_3 \times \mathrm{vers}(\vec{x}_H - \vec{x}_A)\right)$$

$$= \frac{3mgl}{\sqrt{3}}\sin\varphi\,(-\vec{e}_3) + F\left[\cancel{(\vec{x}_C - \vec{x}_H) \times (\vec{e}_3 \times \mathrm{vers}(\vec{x}_H - \vec{x}_A))} + (\vec{x}_H - \vec{x}_A) \times (\vec{e}_3 \times \mathrm{vers}(\vec{x}_H - \vec{x}_A))\right]$$

$$= -3mg\frac{l}{\sqrt{3}}\sin\varphi\,\vec{e}_3 + F\,\overline{AH}\,\vec{e}_3 = \left(F\frac{\sqrt{3}}{2}l - \sqrt{3}\,mgl\sin\varphi\right)\vec{e}_3$$

Quindi

$$LV^{att} = \left[-cx\,\vec{e}_2 + 3mg\,\vec{e}_1 + F(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2) \right] \cdot \delta x\,\vec{e}_2 +$$

$$+ l\sqrt{3}\left(\frac{F}{2} - mg\sin\varphi\right)\vec{e}_3 \cdot \delta\varphi\,\vec{e}_3 =$$

$$= (F\cos\varphi - cx)\,\delta x + \sqrt{3}\,l\left(\frac{F}{2} - mg\sin\varphi\right)\delta\varphi$$

Allora le forze generalizzate sono:

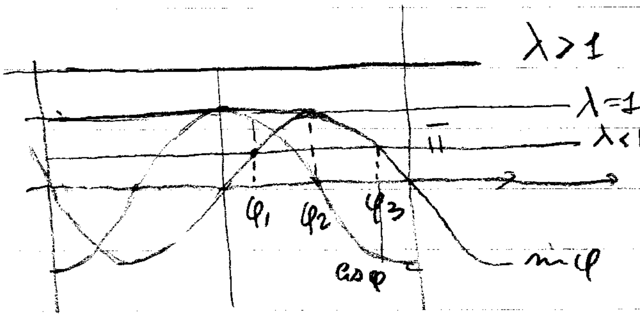
$$(11.1)\quad \begin{aligned} Q_x &= F\cos\varphi - cx = \vec{R}^{att} \cdot \vec{e}_2 \\ Q_\varphi &= l\sqrt{3}\left(\frac{F}{2} - mg\sin\varphi\right) = \vec{M}_\pi^{att} \cdot \vec{e}_3 \end{aligned}$$

e le equazioni pure di equilibrio

$$(11.2)\quad \begin{cases} F\cos\varphi - cx = 0 \\ \dfrac{F}{2} - mg\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Risolviamo prima la seconda:

$$\sin\varphi = \frac{F}{2mg} = \lambda > 0$$



se $\lambda > 1$ Nessuna soluzione

se $\lambda = 1$ $\quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$

se $\lambda < 1$ $\quad \varphi_1 = \arcsin\lambda < \frac{\pi}{2}$, $\quad \varphi_3 = \pi - \varphi_1$

$$\cos\varphi_1 = \sqrt{1-\lambda^2}, \quad \cos\varphi_3 = -\sqrt{1-\lambda^2}$$

Dalla prima equazione delle (1.2) si ricava x_E:

$$x_E = \frac{F}{C}\cos\varphi_E = \begin{cases} \lambda=1 & 0 \Leftarrow \varphi_E = \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \\ \lambda<1 & \frac{F}{C}\sqrt{1-\lambda^2} \Leftarrow \varphi_E = \varphi_1 \\ & -\frac{F}{C}\sqrt{1-\lambda^2} \Leftarrow \varphi_E = \varphi_2 \end{cases}$$

Quindi, le configurazioni di equilibrio sono:

$$\vec{q}_E^{(2)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \qquad \text{se } \lambda = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{q}_E^{(1)} &= \left(\varphi_1, \frac{F}{C}\sqrt{1-\lambda^2}\right) \\ \vec{q}_E^{(3)} &= \left(\varphi_3, -\frac{F}{C}\sqrt{1-\lambda^2}\right) \end{aligned}\right\} \text{se } \lambda < 1$$

3) Reazioni vincolari in A

Le reazioni vincolari hanno la direzione degli spostamenti impediti. La cerniera scorrevole in A impedisce lo spostamento ortogonale all'asse $\vec{e}_2$. Quindi

$$\vec{\Phi}_A = V_A \vec{e}_1$$

Per calcolare V_A, scrivo la I ECS proiettata lungo $\vec{e}_1$

$$\vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_1 = 0 \qquad 3mg + V_A + \vec{F}_C \cdot \vec{e}_1 = 0$$

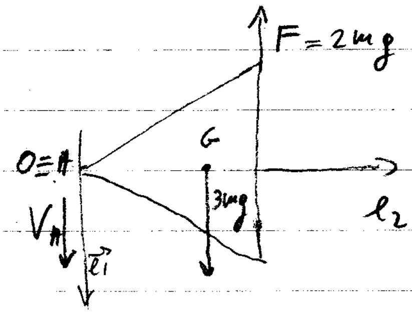
$$3mg + V_A - F\sin\varphi_E = 0$$

Quindi

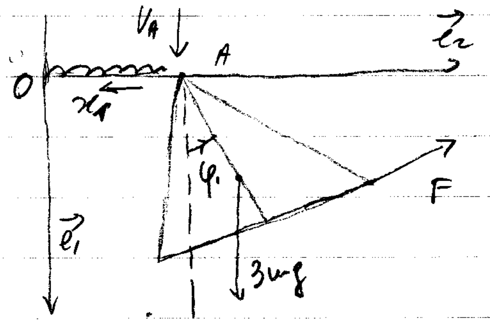
$$V_A = F\sin\varphi_E - 3mg = F\lambda - 3mg = F\left(\lambda - \frac{3}{2\lambda}\right) < 0 \quad \text{poiché } \lambda < 1 < \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ricapitolando:

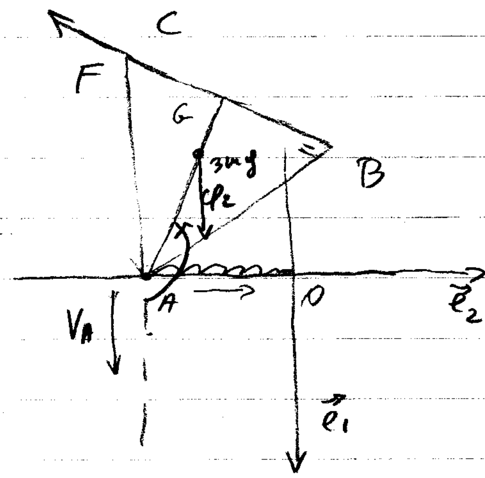
se $\lambda = 1$ $\quad \vec{q}_E^{(2)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\quad V_A = -\frac{F}{2} = -mg$



se $\lambda < 1$ $\quad \vec{q}_E^{(1)} = \left(\varphi_1, \frac{E}{C}\sqrt{1-\lambda^2}\right)$, $V_A = F\lambda - 3mg < 0$



$\vec{q}_E^{(2)} = \left(\varphi_2, -\frac{E}{C}\sqrt{1-\lambda^2}\right)$, $V_A = F\lambda - 3mg < 0$



Visto che abbiamo già ricavato le forze generalizzate (11.1) conviene scrivere le equazioni di Lagrange. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del sistema. Poiché il rigido non ha punti fissi, conviene usare

$$K = \frac{1}{2} 3m \vec{v}_G^{\,2} + \frac{1}{2} J_{Gz} \dot{\varphi}^2$$

$$(14.1) \quad \vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{x}_G - \vec{x}_A) = \dot{x}\,\vec{e}_2 + \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times \frac{l}{\sqrt{3}}(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2)$$

$$= \dot{x}\,\vec{e}_2 + \frac{l}{\sqrt{3}}\dot{\varphi}\,(\cos\varphi\,\vec{e}_2 - \sin\varphi)\,\vec{e}_1 =$$

$$= -\frac{l}{\sqrt{3}}\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \left(\dot{x} + \frac{l}{\sqrt{3}}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\vec{e}_2$$

$$\vec{v}_G^{\,2} = \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2 + \left(\dot{x} + \frac{l}{\sqrt{3}}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 =$$

$$= \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2 \underbrace{\sin^2}\varphi + \dot{x}^2 + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}\underbrace{\cos^2}\varphi + \frac{2}{\sqrt{3}}\, l\,\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$= \dot{x}^2 + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\, l\,\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

Ricordando che $J_{Gz} = \frac{1}{2} m l^2$ per la (5.1), si ha

$$(14.2) \quad K = \frac{3}{2} m\dot{x}^2 + \frac{3}{2} m \left(\frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\, l\,\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + \frac{1}{4} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{3}{2} m\dot{x}^2 + \frac{3}{4} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \sqrt{3}\, m l\,\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

N.B. Se non si è calcolato prima J_{Gz} ma solo I_{Az} (3.1) conviene usare la rappresentazione dell'energia cinetica con polo in A (vedi pag.   degli Appunti)

$$K = \frac{1}{2}\, 3m\, \vec{v}_A^{\,2} + \frac{1}{2} I_{Az}\, \dot\varphi^2 + 3m\, \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \times (\vec{x}_G - \vec{x}_A)$$

$$= \frac{3}{2} m \dot x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m l^2\right)\dot\varphi^2 + 3m\dot x\, \vec{e}_2 \cdot \dot\varphi\, \vec{e}_3 \times \frac{l}{\sqrt{3}}(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2)$$

$$= \frac{3}{2} m \dot x^2 + \frac{1}{4} m l^2 \dot\varphi^2 + 3m\dot x \dot\varphi \frac{l}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{3}{2} m \dot x^2 + \frac{3}{4} m l^2 \dot\varphi^2 + \sqrt{3}\, m l \dot x \dot\varphi \left(-(-\cos\varphi)\right)$$

$$= \frac{3}{2} m \dot x^2 + \frac{3}{4} m l^2 \dot\varphi^2 + \sqrt{3}\, m l \dot x \dot\varphi \cos\varphi ,$$

che coincide con la (14.2). ■

Scriviamo le equazioni di Lagrange.

$$\frac{\partial K}{\partial \dot x} = 3m\dot x + \sqrt{3}\, m l \dot\varphi \cos\varphi \qquad \frac{\partial K}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot x}\right) = 3m\ddot x + \sqrt{3}\, m l \left(\ddot\varphi \cos\varphi - \dot\varphi^2 \sin\varphi\right),$$

(15.1) $$3m\ddot x + \sqrt{3}\, m l\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi\right) = F\cos\varphi - cx$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = \frac{3}{2} m l^2 \dot\varphi + \sqrt{3}\, m l \dot x \cos\varphi \; ; \; \frac{\partial K}{\partial \varphi} = -\sqrt{3}\, m l \dot x \dot\varphi \sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{3}{2} m l^2 \ddot\varphi + \sqrt{3}\, m l\left(\ddot x\cos\varphi - \dot x\dot\varphi\sin\varphi\right)$$

(15.2) $$\frac{3}{2} m l^2 \ddot\varphi + \sqrt{3}\, m l\left(\ddot x\cos\varphi - \cancel{\dot x\dot\varphi\sin\varphi}\right) + \cancel{\sqrt{3}\, m l \dot x\dot\varphi\sin\varphi} = l\sqrt{3}\Big(\frac{F}{2} - mg\sin\varphi$$

N.B. In alternativa alle equazioni di Lagrange, in questo caso possiamo utilizzare le ECD, proiettando la I lungo $\vec{e}_2$ e scegliendo nella II il polo A. In tal modo troviamo 2 equazioni pure di moto.

$$(16.1)\quad \begin{cases} \vec{R}\cdot\vec{e}_2 = 3m\,\ddot{\vec{x}}_G\cdot\vec{e}_2 \\ \vec{M}_A\cdot\vec{e}_3 = \dfrac{d\vec{L}_A}{dt}\cdot\vec{e}_3 + \left(\vec{v}_A \times 3m\vec{v}_G\right)\cdot\vec{e}_3 \end{cases}$$

Per calcolare $\vec{L}_A$, dato che A non è fisso ma appartiene a $\mathcal{B}$, possiamo usare la rappresentazione (OI 2.1) degli Appunti

$$(16.2)\quad \vec{L}_A = (\vec{x}_G - \vec{x}_A)\times 3m\vec{v}_A + \mathbb{I}_A(\vec{\omega})$$

$$= \frac{l}{\sqrt{3}}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right)\times 3m\dot{x}\,\vec{e}_2 + I_{Az}\dot{\varphi}\,\vec{e}_3$$

$$= \left(m\sqrt{3}\,\dot{x}\cos\varphi + \frac{3}{2}ml^2\dot{\varphi}\right)\vec{e}_3$$

$$(16.3)\quad \vec{v}_A \times 3m\vec{v}_G \overset{(14.1)}{=} \dot{x}\,\vec{e}_2 \times 3m\left[-\frac{l}{\sqrt{3}}\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \left(\dot{x} + \frac{l}{\sqrt{3}}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\vec{e}_2\right]$$

$$= \frac{3ml}{\sqrt{3}}\,\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_3$$

$$(16.4)\quad \ddot{\vec{x}}_G = \frac{d}{dt}(\vec{v}_G) \overset{(14.1)}{=} -\frac{l}{\sqrt{3}}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\vec{e}_1 + \left(\ddot{x} + \frac{l}{\sqrt{3}}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\right)\vec{e}_2$$

Allora, la I delle (16.1) si scrive

$$(16.5)\quad -cx + F\cos\varphi = 3m\left(\ddot{x} + \frac{l}{\sqrt{3}}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\right)$$

che coincide con la (15.1).

La II delle (16.1) si scrive, tenendo conto della (10.1), (16.2) e (16.3)

$$\left(F\frac{\sqrt{3}}{2}\,l - \sqrt{3}\,mgl\sin\varphi\right) = \frac{d}{dt}\left(m\sqrt{3}\,\dot{x}\cos\varphi + \frac{3}{2}ml^2\dot{\varphi}\right) + \sqrt{3}\,ml\,\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

cioè

$$\sqrt{3}\,l\left(\frac{F}{2} - mg\sin\varphi\right) = m\sqrt{3}\,\ddot{x}\cos\varphi - \cancel{m\sqrt{3}\,\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi} + \frac{3}{2}ml^2\ddot{\varphi} + \cancel{\sqrt{3}\,ml\,\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi}$$

che coincide con la (15.2).

6) <u>Reazioni vincolari in A</u>

Usiamo la I ECS proiettata lungo l'asse $\vec{e}_1$

$$\vec{R}^{est}\cdot\vec{e}_1 \qquad V'_A + 3mg - F\sin\varphi = 3m\,\ddot{\vec{x}}_G\cdot\vec{e}_1$$

da cui, tenuto conto della (16.4)

$$V'_A = F\sin\varphi - 3mg - \frac{3}{\sqrt{3}}ml\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)$$

5) Il sistema non è conservativo, poiché dalla (11.1) segue che

$$\frac{\partial Q_x}{\partial\varphi} = -F\sin\varphi \quad , \quad \frac{\partial Q_\varphi}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial\varphi} \neq \frac{\partial Q_\varphi}{\partial x}$$

Quindi, la sollecitazione attiva non ammette energia potenziale.