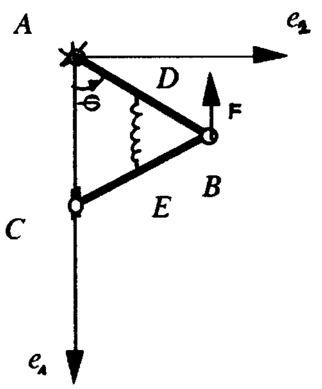
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 28 gennaio 2008

(G. Tondo)



Si consideri il sistema articolato di figura costituito dalle aste omogenee AB e BC, di lunghezza l e massa m, incernierate in B e vincolate in A su un piano <u>verticale</u> (vincoli lisci e bilateri). Il sistema è soggetto alla forza $\mathbf{F}$ applicata in B e parallela al versore $\mathbf{e_1}$, alla forza della molla di costante elastica c, applicata ai punti medi delle due aste, D, E ed al peso proprio delle aste.

STATICA.

1) Determinare le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri del sistema;

2) discuterne la stabilità in funzione dei parametri del sistema;

3) calcolare, se è possibile, la reazione in A nelle configurazioni di equilibrio.

DINAMICA.

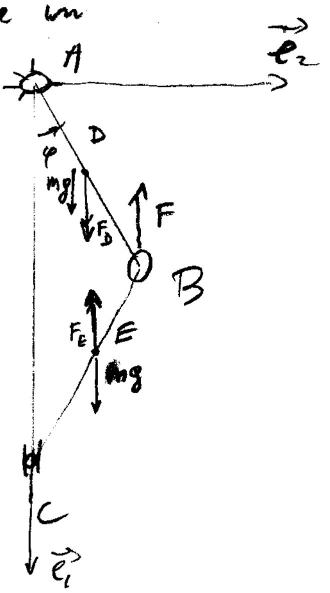
4) scrivere un' equazione differenziale pura di moto;

5) scrivere l'integrale primo dell'energia meccanica, assegnate le condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$;

6) calcolare le reazioni vincolari in A durante il moto in funzione di φ, a partire dalle condizioni iniziali del punto 5).

Tema del 28/01/2008

Sistema biella-manovella con molla interna e carico concentrato nel piano verticale; 1 g.l., c.l. $= \varphi \in]-\pi, \pi] \setminus \{\pm \frac{\pi}{2}\}$ poichè in $\varphi_E = \pm \frac{\pi}{2}$ i vincoli sono dipendenti.



Statica

I metodo: utilizziamo il PLV

$$LV^{(est)} = \vec{F}_B \cdot \delta\vec{x}_B + (m\vec{g} + \vec{F}_D) \cdot \delta\vec{x}_D + (m\vec{g} + \vec{F}_E) \cdot \delta\vec{x}_E$$

$$\vec{x}_B = l(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2)$$

$$\vec{x}_D = \frac{l}{2}(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2)$$

$$\vec{x}_E = \frac{l}{2}(3\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2)$$

$$\vec{F}_B = -F\vec{e}_1, \quad \vec{F}_D = c\, l\cos\varphi\, \vec{e}_1, \quad \vec{F}_E = -\vec{F}_D = -c\, l\cos\varphi\, \vec{e}_1$$

$$LV^{(est)} = -F\vec{e}_1 \cdot \left(l(-\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2)\right)\delta\varphi +$$

$$+ (mg\vec{e}_1 + c\, l\cos\varphi\, \vec{e}_1) \cdot \frac{l}{2}(-\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2)\delta\varphi +$$

$$+ (mg\vec{e}_1 - c\, l\cos\varphi\, \vec{e}_1) \cdot \frac{l}{2}(-3\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2)\delta\varphi$$

$$= +Fl\sin\varphi\,\delta\varphi - mg\frac{l}{2}\sin\varphi\,\delta\varphi + c\frac{l^2}{2}(-\sin\varphi\cos\varphi)\delta\varphi +$$

$$+ mg\frac{l}{2}(-3\sin\varphi\,\delta\varphi) + c\frac{l^2}{2}3\sin\varphi\cos\varphi\,\delta\varphi =$$

$$= Fl\sin\varphi\,\delta\varphi - 2mgl\sin\varphi\,\delta\varphi + c\, l^2\sin\varphi\cos\varphi\,\delta\varphi$$

$$= \left[(Fl - 2mgl)\sin\varphi + c\, l^2\sin\varphi\cos\varphi\right]\delta\varphi$$

Quindi la forza generalizzata è:

(2.1) $$Q_\varphi = (F\ell - 2mg\ell)\sin\varphi + c\ell^2 \sin\varphi\cos\varphi$$

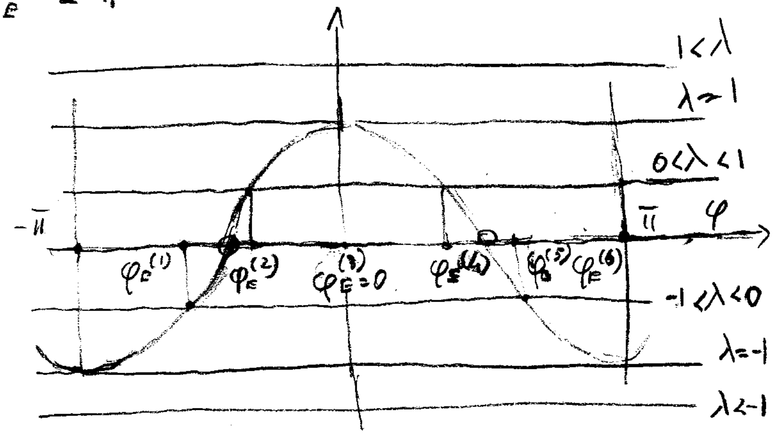
e l'equazione pura di equilibrio

$$c\ell^2 \sin\varphi\left(\cos\varphi + \frac{F-2mg}{c\ell}\right) = 0 .$$

Le soluzioni sono:

$$\sin\varphi = 0 \iff \varphi_E^{(3)} = 0 , \ \varphi_E^{(6)} = \pi$$

$$\cos\varphi = \frac{2mg - F}{c\ell} = \lambda$$



se $\lambda < -1$ Nessuna soluzione

se $\lambda = -1$ 1 sol.: $\varphi_E = \pi = \varphi_E^{(6)}$

se $\lambda \in]-1,0[$ 2 sol: $\varphi_E^{(1)} = -\varphi_E^{(5)}$, $\varphi_E^{(5)} = \arccos\lambda$

se $\lambda \in]0,1[$ 2 sol: $\varphi_E^{(2)} = -\varphi_E^{(4)}$, $\varphi_E^{(4)} = \arccos\lambda$

se $\lambda = 1$ 1 sol: $\varphi_E^{(3)} = 0$

se $\lambda > 1$ Nessuna soluzione

II metodo

Utilizzo l'energia potenziale.

$$V_{molla} = \frac{1}{2} c\, \overline{DE}^2 = \frac{1}{2} c\, l^2 \cos^2\varphi$$

$$V_{peso} = V_1 + V_2 = -m\vec{g}\cdot\vec{x}_D - m\vec{g}\cdot\vec{x}_E = -m\vec{g}\cdot(\vec{x}_D+\vec{x}_E)$$

$$= -mg\,\vec{e}_1\cdot l\,(2\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2) = -2mgl\cos\varphi$$

$$V_{carico} = -(-F\vec{e}_1)\cdot\vec{x}_B = F\,l\cos\varphi \qquad (\vec{F}_B \text{ è uniforme})$$

Quindi:

$$(3.1)\quad V(\varphi) = \frac{1}{2} c\, l^2\cos^2\varphi - 2mgl\cos\varphi + F\,l\cos\varphi = c\,l^2\left(\frac{1}{2}\cos^2\varphi - \lambda\cos\varphi\right)$$

$$(3.2)\quad V'(\varphi) = -c\,l^2\cos\varphi\sin\varphi + (2mg - F)\,l\sin\varphi = -Q_\varphi$$

2) stabilità dell'equilibrio.

Utilizziamo l'energia potenziale (3.1) o calcolata integrando la (2.1). In realtà, ci bastano le sue derivate scritte in termini di λ.

$$V'(\varphi) = -Q_\varphi \overset{(2.1)}{=} -c\ell^2 \sin\varphi\,(\cos\varphi - \lambda)$$

$$V''(\varphi) = -Q'_\varphi = -c\ell^2(\cos 2\varphi - \lambda\cos\varphi) = c\ell^2(\lambda\cos\varphi - \cos 2\varphi)$$

Allora

$$V''(\varphi_E^{(3)}=0) = c\ell^2(\lambda-1) \begin{cases} >0 & \text{se } \lambda > 1 \Rightarrow \min \Rightarrow \text{stabile} \\ =0 & \text{se } \lambda = 1 \quad \text{dubbio} \\ <0 & \text{se } \lambda < 1 \Rightarrow \max \Rightarrow \text{instabile} \end{cases}$$

$$V''(\varphi_E^{(6)}=\pi) = c\ell^2(-\lambda-1) = \begin{cases} >0 & \text{se } \lambda < -1 \Rightarrow \min \Rightarrow \text{stabile} \\ =0 & \text{se } \lambda = -1 \Rightarrow \text{dubbio} \\ <0 & \text{se } \lambda > -1 \Rightarrow \max \Rightarrow \text{instabile} \end{cases}$$

Poiché $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$, si ha che:

$$V''(\varphi_E^{(1)}) = V''(\varphi_E^{(2)}) = V''(\varphi^{(4)}) = V''(\varphi^{(5)}) = (\lambda^2 - 2\lambda^2 + 1) = c\ell^2(1-\lambda^2) > 0 \text{ se } |\lambda| < 1 \Rightarrow \min \Rightarrow \text{stabile}$$

Risolviamo il caso dubbio: $\lambda = \bar\lambda = \pm 1$

$$V'''(\varphi) = c\ell^2(-\bar\lambda \sin\varphi + 2\sin 2\varphi)$$

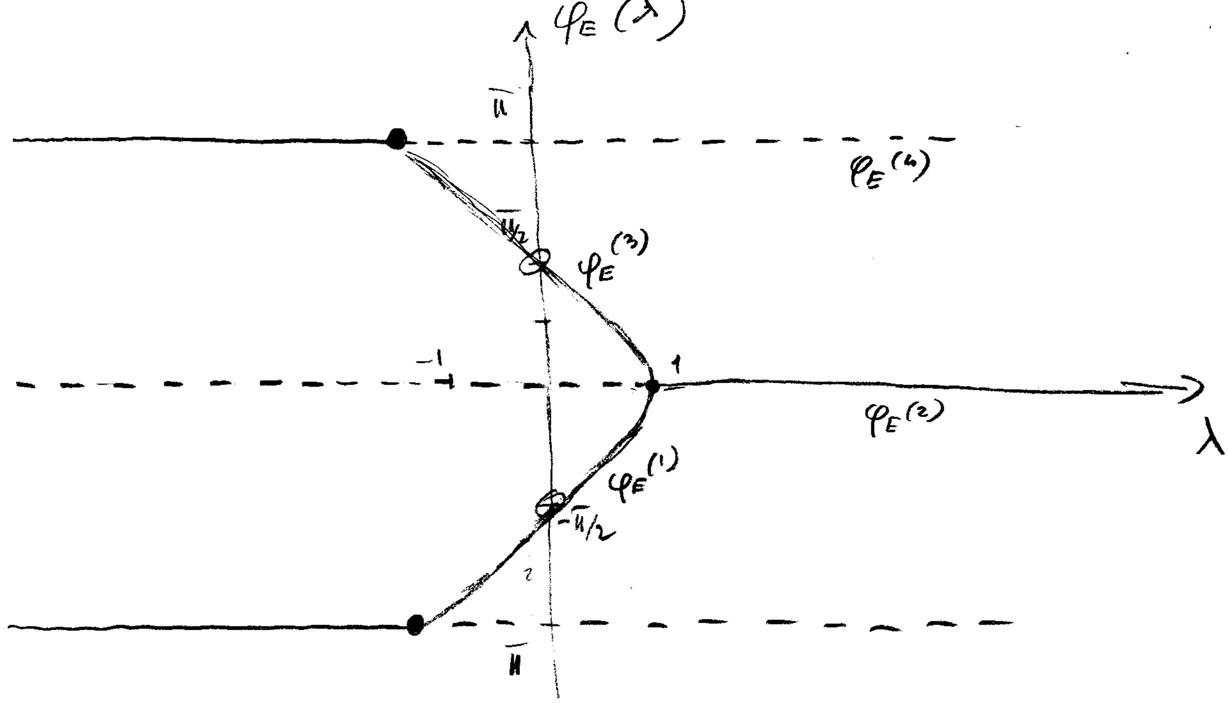
Quindi

$$V'''(\varphi_E^{(3)}=0) = 0 \Rightarrow \text{dubbio}, \quad V'''(\varphi_E^{(6)}=\pi) = 0 \Rightarrow \text{dubbio}$$

Inoltre $V^{(IV)}(\varphi) = c\ell^2(-\bar\lambda\cos\varphi + 4\cos 2\varphi)$. Dunque

$$V^{(IV)}(\varphi_E^{(3)}=0) = c\ell^2(-\bar\lambda+4) > 0 \Rightarrow \min \Rightarrow \text{stabile}; \quad V^{(IV)}(\varphi_E^{(6)}=\pi) = c\ell^2(\bar\lambda+4) > 0 \Rightarrow \min \Rightarrow \text{stab}$$

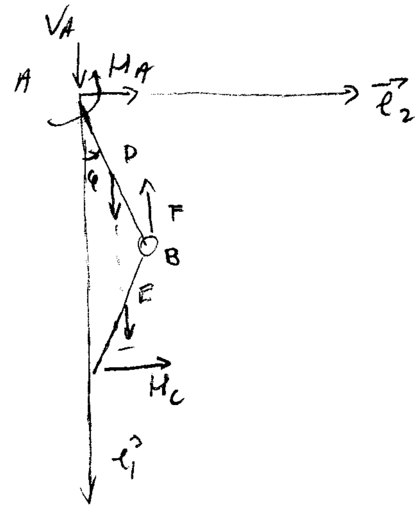
Diagramma di biforcazione.



$\varphi_E^{(3)} = \arccos\lambda$

N.B. le configurazioni $\varphi_E^{(2)} = 0$ e $\varphi_E^{(4)} = \pi$ esistono $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, ma la loro stabilità dipende da λ.
le configurazioni $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \lambda = 0$ <u>non</u> sono di equilibrio (vedi N.B. pag. 8).

3) Reazioni vincolari in A



Utilizzo le ECS.

$$\begin{cases} \vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{M}_C^{(est)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} V_A + 2mg - F = 0 \\ -H_A 2\ell\cos\varphi - 2mg\frac{\ell}{2}\sin\varphi + F\ell\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

cioè

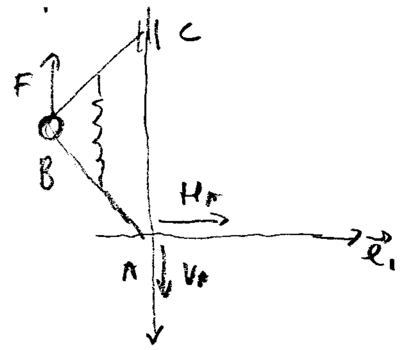
$$\begin{cases} V_A = F - 2mg = -c\ell\lambda \\ H_A = \frac{F-mg}{2}\ tg\,\varphi_E \quad \text{se } \varphi \neq \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \lambda \neq 0 \end{cases}$$

φ_E	$\cos\varphi_E =$	$tg\,\varphi_E$	V_A	$H_A = \frac{F-mg}{2}\,tg\,\varphi_E$
$\varphi_E^{(1)}$	$\lambda < 0$	$-\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$	$-c\ell\lambda > 0$	$-\frac{F-mg}{2}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$
$\varphi_E^{(2)}$	$\lambda > 0$	$-\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$	$-c\ell\lambda < 0$	$-\frac{F-mg}{2}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$
$\varphi_E^{(3)} = 0$	λ	0	$-c\ell\lambda$	0
$\varphi_E^{(4)}$	$\lambda > 0$	$\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$	$-c\ell\lambda < 0$	$\frac{F-mg}{2}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$
$\varphi^{(5)}$	$\lambda < 0$	$\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$	$-c\ell\lambda > 0$	$\frac{F-mg}{2}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$
$\varphi^{(6)} = \pi$	-1	0	$-c\ell\lambda$	0

Riccapitolando

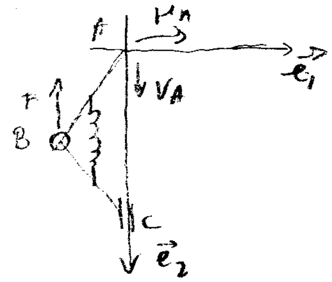
$-\pi < \varphi_E^{(1)} < -\frac{\pi}{2}$ $\qquad H_A = -\frac{F-mg}{2}\,\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$

$V_A = -cl\lambda > 0$



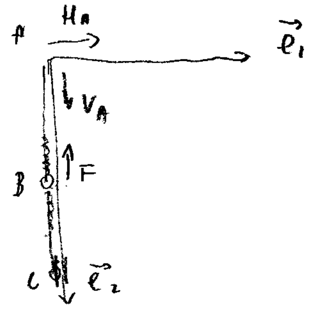
$-\frac{\pi}{2} < \varphi_E^{(2)} < 0$ $\qquad H_A = -\frac{F-mg}{2}\,\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\lambda}}$

$V_A = -cl\lambda < 0$



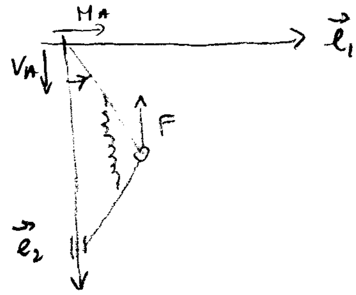
$\varphi_E^{(3)} = 0$ $\qquad H_A = 0$

$V_A = -cl\lambda$



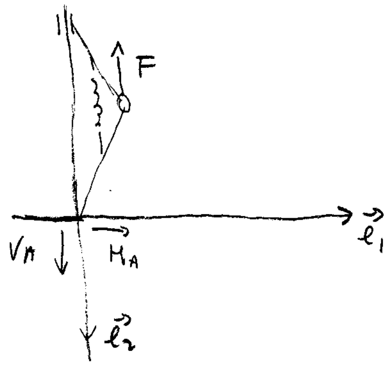
$0 < \varphi_E^{(4)} < \frac{\pi}{2}$ $\qquad H_A = \frac{F-mg}{2}\,\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$

$V_A = -cl\lambda < 0$



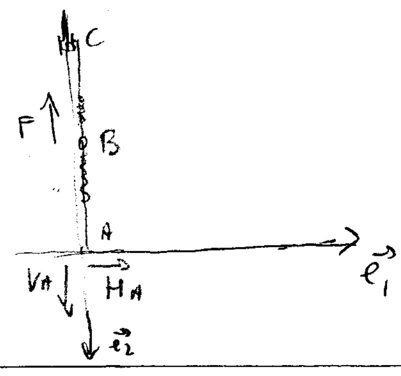
$\frac{\pi}{2} < \varphi_E^{(5)} < \pi$ $\qquad H_A = +\frac{F-mg}{2}\,\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$

$V_A = -cl\lambda > 0$



$\varphi^{(6)} = \pi$ $\qquad H_A = 0$

$V_A = -cl\lambda$

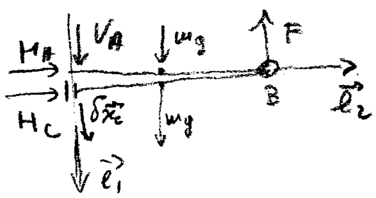


N.B. le configurazioni $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, benché siano soluzioni dell'equazione pura di equilibrio

$$Q_\varphi = 0 \qquad \text{per } \lambda = 0$$

NON sono configurazioni di equilibrio per il sistema meccanico a causa del fatto che in esse i vincoli sono dipendenti e quindi ______________________ i valori $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \notin$ allo spazio di configurazione del sistema. D'altra parte, utilizzando le ECS, si trova che nella configurazione

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$



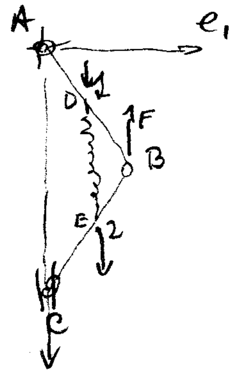
$$\vec{M}_B^{(est \to 2)} \cdot \vec{e}_3 = mg\frac{l}{2} \neq 0,$$

cioè la II ECS applicata alla biella non è soddisfatta, quindi non c'è equilibrio. Analogamente per la configurazione $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Si osservi che la dipendenza dei vincoli per $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ implica che gli spostamenti virtuali del sistema a partire da tali configurazioni sono 2, cioè superano il # dei gradi di libertà del sistema ($l = 1$). Infatti se congelo, ad esempio, lo spostamento rotatorio della manovella (1 spostamento virtuale), la biella può ancora effettuare uno spostamento rotatorio intorno alla cerniera B (1 spostamento virtuale e quindi infinitesimo).

Dinamica

Scriviamo l'equazione di Lagrange



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

con Q_φ data dalla (2.1).

Calcoliamo l'energia cinetica del sistema K:

$$K = K^{(1)} + K^{(2)}$$

$$K^{(1)} = \frac{1}{2} I_A^{(1)} \dot\varphi^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m l^2\right)\dot\varphi^2 \qquad I_A^{(1)} = \frac{1}{3} m l^2$$

$$K^{(2)} = \frac{1}{2} I_E^{(2)} \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m \vec{V}_E^{\,2} \qquad I_C^{(2)} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$\dot{\vec{x}}_E = \frac{l}{2}\left(-3\sin\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$\vec{V}_E^{\,2} = \frac{l^2}{4}\left(9\sin^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \cos^2\varphi\,\dot\varphi^2\right) = \frac{l^2}{4}\left(8\sin^2\varphi + 1\right)\dot\varphi^2$$

Quindi

$$K^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m l^2\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m \frac{l^2}{4}\left(8\sin^2\varphi + 1\right)\dot\varphi^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m l^2\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\left(2 m l^2 \sin^2\varphi\right)\dot\varphi^2$$

$$= \frac{1}{2} m l^2\left(\frac{1}{3} + 2\sin^2\varphi\right)\dot\varphi^2$$

e

$$K = \frac{1}{2} m l^2\left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\varphi\right)\dot\varphi^2$$

Allora, vale che

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = 2ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\dot\varphi, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = 2ml^2\left[\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\ddot\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi^2\right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 2ml^2(\sin\varphi\cos\varphi)\dot\varphi^2$$

Quindi, l'equazione di Lagrange è:

$$2ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\ddot\varphi + 2ml^2\sin 2\varphi\,\dot\varphi^2 - ml^2\sin 2\varphi\,\dot\varphi^2 = cl^2\sin\varphi(\cos\varphi-\lambda),$$

cioè

$$(10.1)\quad 2ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\ddot\varphi + ml^2\sin 2\varphi\,\dot\varphi^2 = cl^2\sin\varphi\,(\cos\varphi-\lambda).$$

5) Il sistema meccanico ha 1 g.l., vincoli lisci e forze posizionali; quindi ammette l'energia meccanica come integrale primo.

$$E(t) = E(0) = K+V = ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\dot\varphi^2 + cl^2\left(\frac{1}{2}\cos^2\varphi - \lambda\cos\varphi\right)$$

$$E(0) = m\frac{l^2}{3}\omega_0^2 + cl^2\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)$$

Quindi

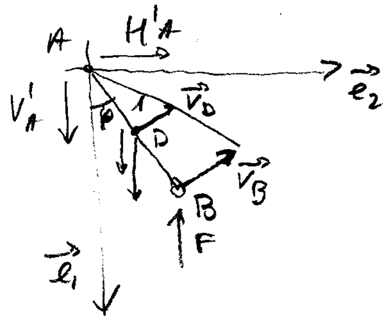
$$ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\dot\varphi^2 + cl^2\left(\frac{1}{2}\cos^2\varphi-\lambda\cos\varphi\right) = m\frac{l^2}{3}\omega_0^2 + cl^2\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)$$

da cui segue che

$$(10.2)\quad \dot\varphi^2 = \frac{m\frac{l^2}{3}\omega_0^2 + cl^2\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) - cl^2\left(\frac{1}{2}\cos^2\varphi-\lambda\cos\varphi\right)}{ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)} = f^2(\varphi)$$

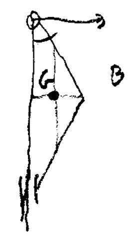
6) Calcolo delle reazioni vincolari in A in funzione di φ

Considero le ECD



$$\begin{cases} \vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_1 = 2m\, \ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{M}_B^{(est\to 1)} \cdot \vec{e}_3 = \dfrac{d\vec{L}_B^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_3 + \cancel{\left(\vec{V}_B \times m\vec{V}_D\right)} \cdot \vec{e}_3 \end{cases}$$

$$\vec{F}_D^{el} = c\, l \cos\varphi\, \vec{e}_1$$



$$\vec{x}_G = l\left(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\sin\varphi\, \vec{e}_2\right)$$

$$\dot{\vec{x}}_G = l\left(-\sin\varphi\, \dot\varphi\, \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\cos\varphi\, \dot\varphi\, \vec{e}_2\right)$$

$$\ddot{\vec{x}}_G = l\left[\left(-\cos\varphi\, \dot\varphi^2 - \sin\varphi\, \ddot\varphi\right)\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\left(-\sin\varphi\, \dot\varphi^2 + \cos\varphi\, \ddot\varphi\right)\vec{e}_2\right]$$

$$\vec{L}_B^{(1)} = \vec{L}_A^{(1)} + \left(\vec{x}_A - \vec{x}_B\right) \times m\vec{V}_D = I_A \dot\varphi\, \vec{e}_3 - l\left(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2\right) \times m\vec{V}_D$$

$$= I_A \dot\varphi\, \vec{e}_3 - l\left(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2\right) \times \frac{lm}{2}\left(-\sin\varphi\, \dot\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \dot\varphi\, \vec{e}_2\right)$$

$$= \frac{1}{3} m l^2 \dot\varphi\, \vec{e}_3 - \frac{m l^2}{2}\left(\cos^2\varphi\, \dot\varphi + \sin^2\varphi\, \dot\varphi\right)\vec{e}_3$$

$$= \frac{1}{3} m l^2 \dot\varphi\, \vec{e}_3 - m\frac{l^2}{2}\dot\varphi\, \vec{e}_3 = -\frac{1}{6} m l^2 \dot\varphi\, \vec{e}_3$$

$$\vec{M}_B^{(est\to 1)} = \left(\vec{x}_A - \vec{x}_B\right) \times \left(V'_A\, \vec{e}_1 + H'_A\, \vec{e}_2\right) + \left(\vec{x}_D - \vec{x}_B\right) \times \left(mg\, \vec{e}_1 + c\, l\cos\varphi\, \vec{e}_1\right)$$

$$= \left(V'_A\, l \sin\varphi - H'_A\, l\cos\varphi\right)\vec{e}_3 + \left(mg + c\, l\cos\varphi\right)\frac{l}{2}\sin\varphi\, \vec{e}_3$$

Quindi

$$\begin{cases} V'_A + 2mg - F = 2ml\left(-\cos\varphi\,\dot\varphi^2 - \sin\varphi\,\ddot\varphi\right) \\ V'_A \cancel{l}\sin\varphi - H'_A \cancel{l}\cos\varphi + \frac{\cancel{l}}{2}(mg + cl\cos\varphi)\sin\varphi = -\frac{1}{6} m l^{\cancel{2}} \ddot\varphi \end{cases}$$

Allora

$$\begin{cases} V'_A = F - 2mg - 2ml\left(\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + \sin\varphi\,\ddot\varphi\right) \\ H'_A \cos\varphi = \left[F - 2mg - 2ml\left(\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + \sin\varphi\,\ddot\varphi\right)\right]\sin\varphi + (mg + cl\cos\varphi)\sin\varphi + \frac{1}{6} ml\ddot\varphi \end{cases}$$

cioè

$$(12.1)\begin{cases} V'_A = (F - 2mg) - 2ml\left(\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + \sin\varphi\,\ddot\varphi\right) \\ H'_A = \left[F - mg + cl\cos\varphi - 2ml\left(\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + \sin\varphi\,\ddot\varphi\right)\right]\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{6} ml \frac{\ddot\varphi}{\cos\varphi} \end{cases} \qquad \varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$$

Ora, sostituendo la (10.2) nella (10.1) si può ricavare $\ddot\varphi$ in funzione di φ:

$$\ddot\varphi = \frac{1}{2ml^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2\varphi\right)}\left[cl^2\sin\varphi(\cos\varphi - \lambda) - ml^2\sin 2\varphi\, f^2(\varphi)\right] = g(\varphi)$$

Infine, sostituendo $g(\varphi)$ e $f^2(\varphi)$ nella (12.1) si ottiene la risposta.