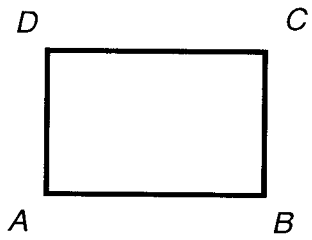
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 3 giugno 2008

G. Tondo

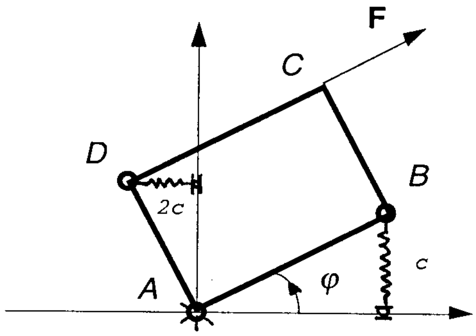


È dato un *telaio* rettangolare omogeneo di lati $\overline{AB} = 3l$, $\overline{BC} = 2l$ e massa m.

1) Calcolare il momento d'inerzia del telaio rispetto alla sua diagonale.

STATICA.

Si vincoli il telaio in un piano **orizzontale** con una cerniera fissa e liscia in A. Le forze attive sono: la forza $\mathbf{F_C} = F\mathbf{vers}\,(\mathbf{C} - \mathbf{D})$ applicata in C e la forza di richiamo delle due molle.



2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità, in funzione dei parametri del problema;

3) calcolare le reazioni vincolari in A all'equilibrio.

DINAMICA.

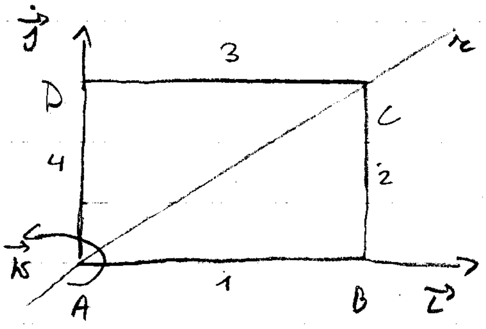
Inoltre si chiede di:

4) scrivere un integrale primo di moto a partire dai dati iniziali $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$;

5) scrivere un'equazione differenziale pura di moto;

6) calcolare le reazioni vincolari in A durante il moto in funzione di φ.

Tema d'esame del 3 giugno 2008



$\overline{AB} = 3l$, $\overline{BC} = 2l$

$I_r = ?$

I metodo

Per calcolare I_r, calcolo prima la matrice d'inerzia I_A del telaio e poi userò la formula

$$I_r = vers(C-A) \cdot \mathbb{I}_A \left(vers(C-A)\right) \qquad vers(C-A) = \frac{(C-A)}{|C-A|} = \frac{3\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{13}}$$

Calcolo di I_A

Poichè il telaio è omogeneo, la sua densità (costante) di massa sarà:

$$\rho(P) = \frac{m}{10l} \Rightarrow m_1 = \rho 3l = \frac{3}{10}m \quad , \quad m_2 = \rho 2l = \frac{1}{5}m$$

Fisso una terna solidale al telaio: $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e denoto la matrice d'inerzia con

$$I_A = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} I_{xz} &= I_{yz} = 0 \\ I_z &= I_x + I_y \end{aligned} \quad \text{poichè il telaio è un rigido piano}$$

Calcolo i momenti d'inerzia I_x e I_y come somma dei momenti d'inerzia dei singoli lati del telaio.

$$I_x = \cancel{I_x^{(1)}} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + I_x^{(4)} = 2I_x^{(2)} + I_x^{(4)}$$

per la simmetria dei lati 2 e 4 rs. a $\vec{i}$.

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} m\right)(2\ell)^2 = \frac{4}{15} m \ell^2$$ (momento d'inerzia di un'asta rs. a un asse ortogonale per un suo estremo)

$$I_x^{(3)} = m_3 l_2^2 = \frac{3}{\cancel{10}_5} m \cancel{4} \ell^2 = \frac{6}{5} m \ell^2$$ (Teo di Huygens-Steiner)

Quindi $I_x = \left(\frac{8}{15} + \frac{6}{5}\right) m \ell^2 = \frac{26}{15} m \ell^2$

Analogamente

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} + \cancel{I_y^{(4)}} = 2 I_y^{(1)} + I_y^{(2)}$$

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{3} m_3 l_3^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10} m\right)(3\ell)^2 = \frac{9}{10} m \ell^2$$

$$I_y^{(2)} = m_2 l_1^2 = \frac{1}{5} m (3\ell)^2 = \frac{9}{5} m \ell^2$$

Dunque

$$I_y = \left(\frac{9}{5} + \frac{9}{5}\right) m \ell^2 = \frac{18}{5} m \ell^2$$

Calcolo il momento deviatore tramite la formula

$$I_{xy} = -\int_{\mathcal{B}} \rho(P)\, x(P)\, y(P)\, d\tau$$

tenendo conto che l'elemento $d\tau$ è unidimensionale e l'integrale nel telaio si può spezzare in 4 integrali sui singoli lati

$$I_{xy} = -\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4} \rho(P)\, x(P)\, y(P)\, ds$$

Quindi

$$I_{xy} = -\rho \cancel{\int_0^{3l} x_{|\gamma_1} y(\rho)\, dx} - \rho \int_0^{2l} dy\, 3l\, y - \rho \int_0^{3l} dx\, x\, 2l - \cancel{\int_0^{2l} x\, y_{|\gamma_4}\, dy}$$

$$= -\frac{m}{10l}\left[3l\frac{y^2}{2}\right]_0^{2l} - \frac{m}{10l}\left[2l\frac{x^2}{2}\right]_0^{3l} =$$

$$= -\frac{m}{10l}\left(\frac{3l}{\cancel{2}}\cancel{4}^{2}l^2 + l\,9l^2\right) = -\frac{\cancel{15}^{3}}{{}_{2}\cancel{10}\,\cancel{l}} m\, l^{\cancel{3}^{2}} = -\frac{3}{2} m l^2$$

Infine

(3.1) $$I_z = I_x + I_y = \left(\frac{26}{15} + \frac{18}{5}\right) m l^2 = \frac{\cancel{80}^{16}}{\cancel{15}_{3}} m l^2 = \frac{16}{3} m l^2$$

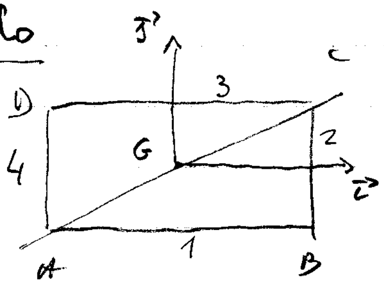
Dunque, la matrice d'inerzia è data da

$$I_A = m l^2 \begin{bmatrix} \frac{26}{15} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{18}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 16/3 \end{bmatrix}$$

e I_r da

$$I_r = \frac{1}{\sqrt{13}}\,[3,\ 2]\, m l^2 \begin{bmatrix} \frac{26}{15} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{18}{5} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{12}{13} m l^2$$

II metodo



Calcoliamo la matrice d'inerzia rispetto a G e poi

$$I_2 = \text{vers}(C-A) \cdot \mathbb{I}_G \left(\text{vers}(C-A)\right)$$

Se scelgo $\vec{i}$ e $\vec{j}$ come in figura, essendo assi di simmetria del telaio, saranno anche API(G). Allora I_G sarà diagonale:

$$I_G = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_x + J_y \end{bmatrix}$$

Quindi, basterà calcolare J_x e J_y.

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} + J_x^{(3)} + J_x^{(4)} = 2 J_x^{(1)} + 2 J_x^{(2)}$$

$$J_x^{(1)} = m_1 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 = \frac{3}{10} m l^2, \qquad J_x^{(2)} = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 = \frac{1}{12_3} \frac{1}{5} m \cancel{4} l^2 = \frac{1}{15} m l^2$$

Dunque:

$$J_x = 2\left(\frac{3}{10} + \frac{1}{15}\right) m l^2 = \frac{11}{15} m l^2$$

Analogamente

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} + J_y^{(3)} + J_y^{(4)} = 2 J_y^{(1)} + 2 J_y^{(2)}$$

$$J_y^{(1)} = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 = \frac{1}{12 \cdot 10}\, 3\, m \; 9 l^2 = \frac{9}{40} m l^2$$

$$J_y^{(2)} = m_2 \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{5} m \left(\frac{3}{2} l\right)^2 = \frac{9}{20} m l^2$$

$$J_y = 2\left(\frac{9}{40} + \frac{9}{20}\right) m l^2 = \frac{27}{20} m l^2$$

Allora

$$I_G = m l^2 \begin{bmatrix} \frac{11}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{27}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{12} \end{bmatrix}$$

e

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} [3, 2]\, m l^2 \begin{bmatrix} \frac{11}{15} & 0 \\ 0 & \frac{27}{20} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{m l^2}{13} [3, 2] \begin{bmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{27}{10} \end{bmatrix} = \frac{12}{13} m l^2$$

N.B. Con questo metodo abbiamo risparmiato il calcolo di un momento deviatore. Tuttavia, in dinamica dovremo calcolare I_{Az}. Lo possiamo far con il Teo. di Huygens.

$$I_{Az} = J_z + m\, d(A,G)^2 = \frac{25}{12} m l^2 + m \left(\frac{\sqrt{13}}{2} l\right)^2$$

$$= m l^2 \left(\frac{25}{12} + \frac{13}{4}\right) = m l^2 \frac{64}{12} = \frac{16}{3} m l^2$$

Analisi cinematica

Il rigido piano è vincolato con una cerniera fissa in A (vincolo doppio). Quindi, i gradi di libertà residui per il telaio vincolato sono:

$$l = 3 - 2 = 1$$

La coordinata libera indicata in figura è l'angolo φ.

Statica

Il rigido ha 1 g.l., vincoli non dissipativi e forze posizionali. Quindi è (localmente) conservativo. L'energia potenziale delle molle è data da

$$V^{(el)}(\varphi) = \frac{1}{2} c\, \overline{BP}^2 + \frac{1}{2}(2c)\,\overline{DQ}^2 = \frac{1}{2} c \left(3l \sin\varphi\right)^2 + c\left(2l\sin\varphi\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 4\right) c\, l^2 \sin^2\varphi = \frac{17}{2} c\, l^2 \sin^2\varphi$$

Calcoliamo l'energia potenziale del carico follower $\vec{F}_c$ mediante il suo LV:

$$LV^{(foll)} = \vec{F}_c \cdot \delta\vec{x}_c = \cancel{\vec{F}_c \cdot \delta\vec{x}_A} + (C-A)\times\vec{F}_c \cdot \vec{\chi} \qquad \vec{\chi} = \delta\varphi\,\vec{e}_3$$

$$= -F\, 2l\, \delta\varphi$$

dove si è tenuto conto che il modulo del momento di una forza applicata è pari al prodotto del modulo della forza per il suo braccio che, in questo caso, è uguale a $2l$.

Allora la forza generalizzata relativa al carico follower è

$$Q_\varphi^{(foll)} = -2Fl$$

quindi la sua energia potenziale

$$V^{(foll)}(\varphi) = -\int Q_\varphi = 2Fl\varphi$$

Dunque, l'energia potenziale del sistema è

$$V(\varphi) = \frac{17}{2} c l^2 \sin^2\varphi + 2Fl\varphi \tag{7.1}$$

Per trovare i punti di equilibrio, determiniamone i punti stazionari.

$$V'(\varphi) = 17 c l^2 \sin\varphi\cos\varphi + 2Fl = -Q_\varphi \tag{7.2}$$

Dunque, l'equazione pura di equilibrio è

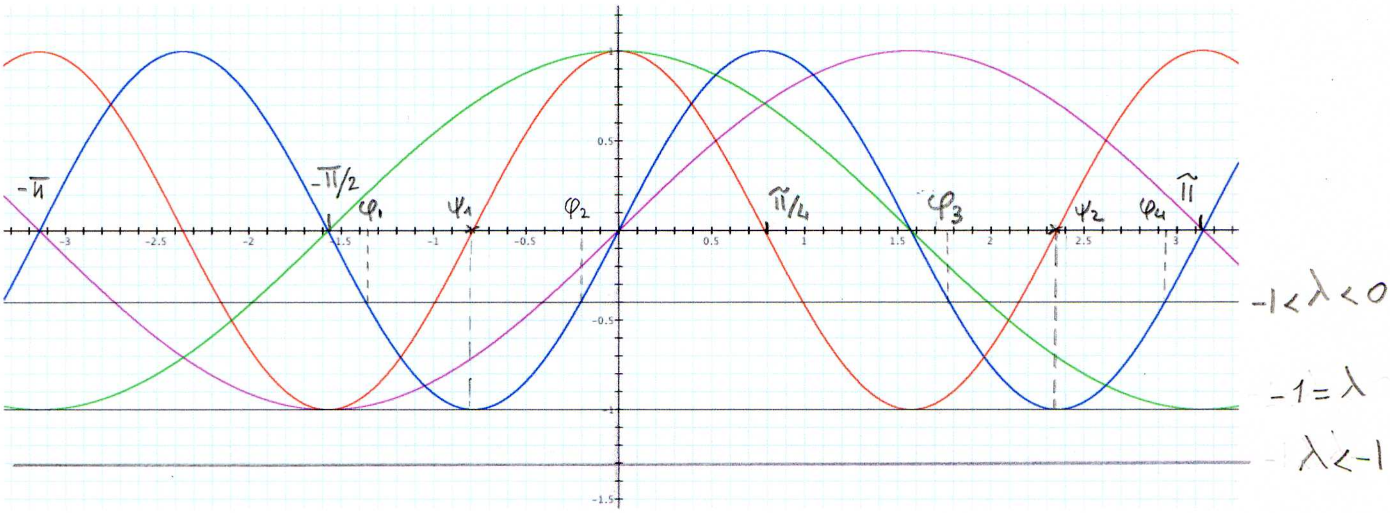
$$17 c l^2 \sin\varphi\cos\varphi = -2Fl$$

che equivale a

$$\sin 2\varphi = \lambda \qquad \lambda := -\frac{4F}{17cl} < 0 \tag{7.3}$$

Risolviamo graficamente l'equazione (7.3)

- $y = \sin 2x$ $\qquad\qquad$ $x := \varphi$
- $y = \cos 2x$
- $y = \sin x$
- $y = \cos x$
- $y = -1$
- $y = n$ $\qquad\qquad$ $n := \lambda$



$\lambda < -1$ $\qquad$ Nessuna soluzione

$\lambda = -1$ $\qquad$ 2 soluzioni $\qquad$ $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$, $\qquad$ $\varphi_2 = \frac{3}{4}\pi$

$-1 < \lambda < 0$ $\qquad$ 4 soluzioni $\qquad$ $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2} - \varphi$, $\varphi_2 = \varphi$

$\varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $\varphi_4 = \pi + \varphi$

dove

$-\frac{\pi}{4} < \varphi = \frac{1}{2} \arcsin \lambda < 0$

Stabilità degli equilibri

Per il Teo di Dirichlet i punti di minimo di V sono equilibri stabili mentre per un Teo. di Liapunov, i punti stazionari che non sono punti di minimo sono equilibri instabili. Calcoliamo la $V''(\varphi)$

$$V(\varphi) = \frac{17}{2} c l^2 \left(\sin^2\varphi - \lambda\varphi\right)$$

$$V'(\varphi) = \frac{17}{2} c l^2 \left(\sin 2\varphi - \lambda\right)$$

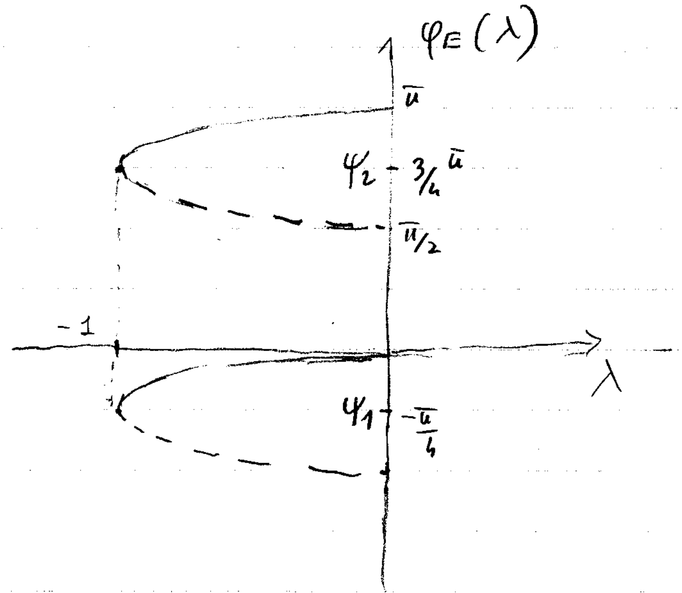
$$V''(\varphi) = 17 c l^2 \cos 2\varphi$$

$$V'''(\varphi) = -2 \cdot 17 c l^2 \sin 2\varphi$$

	$V'(\varphi_E)$	$V''(\varphi_E)$	$V'''(\varphi_E)$	pti stazion.	stabilità
φ_1	0	0	$\neq 0$	flesso	instabile
φ_2	0	0	$\neq 0$	flesso	instabile
φ_1	0	< 0		max	instabile
φ_2	0	> 0		min	stabile
φ_3	0	< 0		max	instabile
φ_4	0	> 0		min	stabile

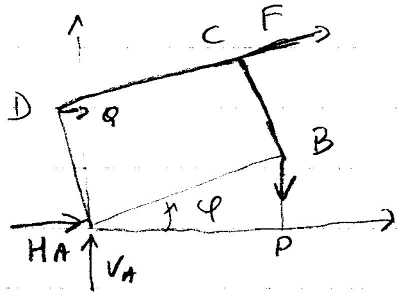
I segni della $V'(\varphi_E)$ sono stati valutati mediante il grafico di pag. 6.

Disegniamo il diagramma di biforcazione.



Il valore $\lambda = -1$ è un valore di biforcazione <u>tangente</u>.

Reazioni vincolari in A



Dalle I ECS segue che:

$$\begin{cases} H_A + \vec{F}_D \cdot \vec{e}_1 + \vec{F}_C \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ V_A + \vec{F}_B \cdot \vec{e}_2 + \vec{F}_C \cdot \vec{e}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{F}_B = -c(B-P) = -c\, 3l \sin\varphi\, \vec{e}_2$$

$$\vec{F}_D = -2c(D-Q) = -2c(-2l \sin\varphi\, \vec{e}_1)$$

$$\vec{F}_C = F \,\text{vers}(C-D) = F\, \text{vers}(B-A) = F(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2)$$

Allora

$$\begin{cases} H_A = -4cl \sin\varphi_E - F\cos\varphi_E \\ V_A = 3cl \sin\varphi_E - F \sin\varphi_E = (3cl - F)\sin\varphi_E \end{cases}$$

	$\sin\varphi_E$	$\cos\varphi_E$
φ_1	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
φ_2	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
φ_1	$-\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}}$	$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}}$
φ_2	$-\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}}$	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}}$
φ_3	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}}$
φ_4	$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}}$

Abbiamo utilizzato le formule di bisezione

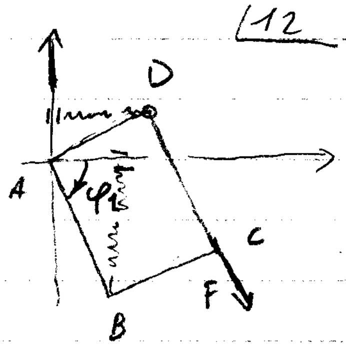
$$\sin\varphi_E = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-\lambda^2}}{2}}$$

$$\cos\varphi_E = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-\lambda^2}}{2}}$$

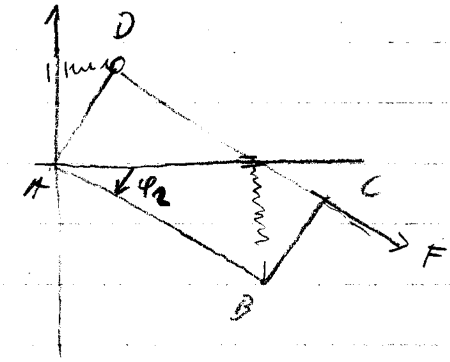
dove $\lambda = \sin 2\varphi_E$

Quindi se $-1<\lambda<0$

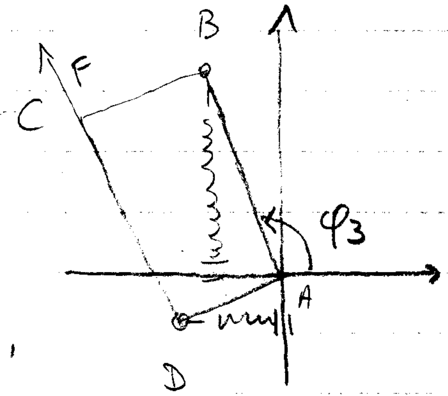
$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}-\varphi\,, \quad \begin{cases} H_A = +4c\ell\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}} - F\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}} \\ V_A = (3c\ell - F)\left(-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}}\right) \end{cases}$$



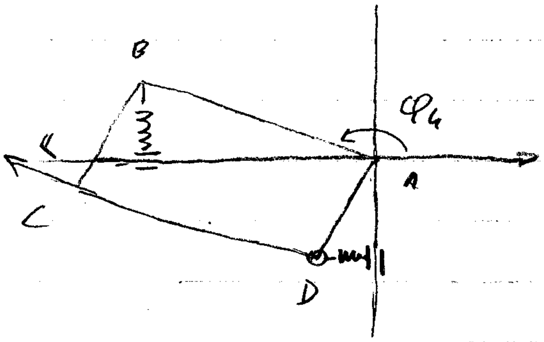
$$\varphi_2 = \varphi\,, \quad \begin{cases} H_A = 4c\ell\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}} - F\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}} \\ V_A = (3c\ell - F)\left(-\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}}\right) \end{cases}$$



$$\varphi_3 = \frac{\pi}{2}-\varphi\,, \quad \begin{cases} H_A = -4c\ell\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}} + F\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}} \\ V_A = (3c\ell - F)\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}} \end{cases}$$



$$\varphi_4 = \pi+\varphi\,, \quad \begin{cases} H_A = -4c\ell\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}} + F\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}} \\ V_A = (3c\ell - F)\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}} \end{cases}$$



N.B. Se $\lambda=-1$, i 4 valori di equilibrio collassano in ψ_1 e ψ_2.
Analogamente succede per le reazioni vincolari.

$$\varphi_1=\varphi_2=\psi_1\,, \quad H_A = (4c\ell - F)\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad V_A = (3c\ell-F)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\varphi_3=\varphi_4=\psi_2\,, \quad H_A = (-4c\ell + F)\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad V_A = (3c\ell-F)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dinamica

Come abbiamo già osservato, il sistema è conservativo, i vincoli sono fissi e non dissipativi. Quindi vale il Teo. di conservazione dell'energia meccanica. Scriviamo l'integrale dell'energia:

$$E = K + V$$

dove $K = \frac{1}{2} I_{Az} \dot{\varphi}^2$

A: punto fisso del rigido
$I_{Az} = \frac{16}{3} m l^2$ dalla (3.1)

Quindi

$$E = \frac{1}{2} \frac{16}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{17}{2} c l^2 (\sin^2 \varphi - \lambda \varphi)$$

Calcoliamo la costante dell'energia $E(0)$ imponendo le condizioni iniziali

(13.1) $$\varphi(0) = 0 \,, \quad \dot{\varphi}(0) = 0$$

risulta

$$E(0) = 0$$

Quindi, durante il moto del sistema con le condizioni (13.1) risulta

$$\frac{8}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{17}{2} c l^2 (\sin^2 \varphi - \lambda \varphi) = 0$$

da cui

(13.2) $$\dot{\varphi}^2 = \frac{51}{16} \frac{c}{m} (\lambda \varphi - \sin^2 \varphi)$$

5) Equazione pura differenziale di moto

Scriviamo l'equazione di Lagrange non conservativa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = I_{Az}\dot\varphi = \frac{16}{3} m l^2 \dot\varphi \,, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{16}{3} m l^2 \ddot\varphi$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0 \,, \qquad Q_\varphi = \frac{17}{2} c l^2 (\lambda - \sin 2\varphi)$$

Dunque

$$\frac{16}{3} m l^2 \ddot\varphi = \frac{17}{2} c l^2 (\lambda - \sin 2\varphi)$$

da cui

$$(14.1) \quad \ddot\varphi = \frac{51}{32} \frac{c}{m} (\lambda - \sin 2\varphi)$$

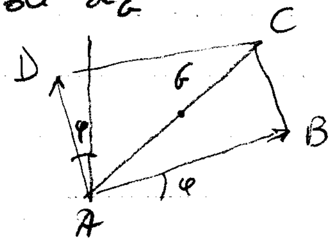
6) Reazioni vincolari in A durante il moto

Dalla I ECD si ha

$$H'_A + \vec{F}_D\cdot\vec{e}_1 + \vec{F}_C\cdot\vec{e}_1 = m\,\ddot{\vec{x}}_G\cdot\vec{e}_1$$

$$V'_A + \vec{F}_B\cdot\vec{e}_2 + \vec{F}_C\cdot\vec{e}_2 = m\,\ddot{\vec{x}}_G\cdot\vec{e}_2$$

Calcoliamo il vettore accelerazione di $\vec{x}_G$



$$\vec{x}_G = \frac{1}{2}\vec{x}_C = \frac{1}{2}\left[\vec{x}_B + \left(\vec{x}_C - \vec{x}_B\right)\right]$$

$$= \frac{3l}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{x}_D - \vec{x}_A\right)$$

$$= \frac{3l}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right) + \frac{1}{\cancel{2}}\,\cancel{2}l\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$= l\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - \sin\varphi\right)\vec{e}_1 + l\left(\frac{3}{2}\sin\varphi + \cos\varphi\right)\vec{e}_2$$

Quindi

$$\dot{\vec{x}}_G = l\left(-\frac{3}{2}\sin\varphi - \cos\varphi\right)\dot{\varphi}\,\vec{e}_1 + l\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - \sin\varphi\right)\dot{\varphi}\,\vec{e}_2$$

$$\ddot{\vec{x}}_G = l\left[\left(-\frac{3}{2}\cos\varphi + \sin\varphi\right)\dot{\varphi}^2 - \left(\frac{3}{2}\sin\varphi + \cos\varphi\right)\ddot{\varphi}\right]\vec{e}_1 +$$

$$+ l\left[\left(-\frac{3}{2}\sin\varphi - \cos\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{3}{2}\cos\varphi - \sin\varphi\right)\ddot{\varphi}\right]\vec{e}_2$$

Allora

$$\begin{cases} H'_A = -4cl\sin\varphi - F\cos\varphi + m\left[\left(-\frac{3}{2}\cos\varphi + \sin\varphi\right)\dot{\varphi}^2 - \left(\frac{3}{2}\sin\varphi + \cos\varphi\right)\ddot{\varphi}\right] \\ V'_A = (3cl - F)\sin\varphi + m\left[-\left(\frac{3}{2}\sin\varphi + \cos\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{3}{2}\cos\varphi - \sin\varphi\right)\ddot{\varphi}\right] \end{cases}$$

Sostituendo a $\dot{\varphi}^2$ la (13.2) e a $\ddot{\varphi}$ la (14.1) si ottiene la risposta