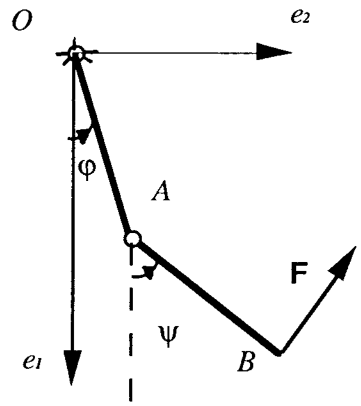
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 8 luglio 2008

(G. Tondo)



Si consideri il sistema articolato di figura costituito dalle aste omogenee OA e AB, entrambe di lunghezza l e massa m, incernierate in A e vincolate in O su un piano **verticale** (vincoli lisci e bilateri). Il sistema è soggetto alla forza $\mathbf{F}$ applicata in B, sempre ortogonale all'asta AB, ed al peso proprio delle aste.

STATICA.

1) Determinare le configurazioni di equilibrio in funzione del parametro $\lambda = \frac{2F}{mg}$;

2) calcolare, se è possibile, le reazioni in O nelle configurazioni di equilibrio;

3) calcolare, se è possibile, le reazioni in A nelle configurazioni di equilibrio.

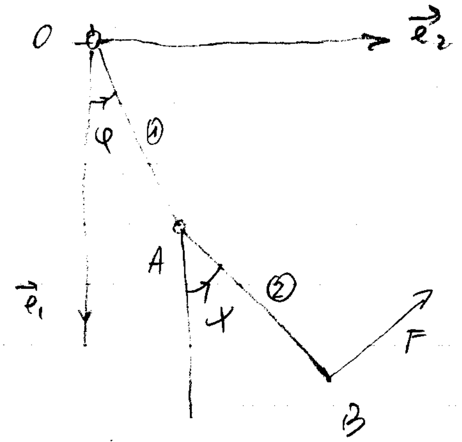
DINAMICA.

4) scrivere due equazioni differenziali pure di moto;

5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, determinarla;

6) calcolare le reazioni vincolari in O durante il moto in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate rispetto al tempo.

Tema dell' 8/07/2008



Analisi cinematica

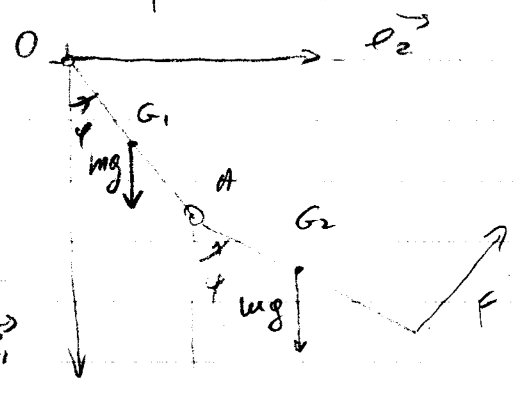
Il sistema è un sistema articolato: il cosiddetto "pendolo doppio". Dal metodo dei congelamenti successivi segue immediatamente che, se congelo lo spostamento rotatorio dell'asta OA intorno alla cerniera fissa O, l'unico campo di spostamenti virtuali dell'asta AB è un campo rotatorio intorno all'estremo A. Se congelo anche questo, il pendolo non ammette più alcun spostamento virtuale. Quindi i gradi di libertà sono 2.

Si possono prendere come coordinate libere gli angoli formati dalla verticale discendente e dalle 2 aste: φ e ψ

$$-\pi < \varphi \leq \pi \quad , \quad -\pi \leq \psi \leq \pi .$$

Statica

Diagramma delle forze attive



1) Configurazioni di equilibrio

Poichè non sappiamo a priori se il sistema è conservativo non possiamo usare l'energia potenziale (che non esiste!) ma conviene usare il PLV in modo "furbo".
Calcoleremo il LV del peso delle aste utilizzando la loro energia potenziale.

$$LV^{(peso)} = -\delta V^{(peso)}$$

$$V^{(peso)} = -m\vec{g}\cdot\vec{x}_{G_1} - m\vec{g}\cdot\vec{x}_{G_2}$$

$$\vec{x}_{G_1} = \frac{l}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$\vec{x}_{G_2} = l\left[\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos\psi\right)\vec{e}_1 + \left(\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin\psi\right)\vec{e}_2\right]$$

$$V^{(peso)} = -mg\frac{l}{2}\cos\varphi - mg\,l\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos\psi\right)$$

$$= -\frac{3}{2}mgl\cos\varphi - mg\frac{l}{2}\cos\psi$$

Quindi:

$$LV^{(peso)} = -\delta\left(-\frac{mgl}{2}\left(3\cos\varphi + \cos\psi\right)\right) = mg\frac{l}{2}\left(-3\sin\varphi\,\delta\varphi - \sin\psi\,\delta\psi\right)$$

$$= -mg\frac{l}{2}\left(3\sin\varphi\,\delta\varphi + \sin\psi\,\delta\psi\right)$$

Calcoliamo il LV del carico follower.

$$LV^{(foll)} = \vec{F}_B\cdot\delta\vec{x}_B$$

$$\vec{x}_B = \vec{x}_A + (\vec{x}_B - \vec{x}_A) = l\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right) + l\left(\cos\psi\,\vec{e}_1 + \sin\psi\,\vec{e}_2\right) = l\left[\left(\cos\varphi + \cos\psi\right)\vec{e}_1 + \left(\sin\varphi + \sin\psi\right)\vec{e}_2\right]$$

$$\delta\vec{x}_B = l\left[\left(-\sin\varphi\,\delta\varphi - \sin\psi\,\delta\psi\right)\vec{e}_1 + \left(\cos\varphi\,\delta\varphi + \cos\psi\,\delta\psi\right)\vec{e}_2\right]$$

Essendo la $\vec{F}_B$ ortogonale all'asta AB e al versore $\vec{e}_3$, si può rappresentare con

$$\vec{F}_B = F\,\vec{e}_3 \times \mathrm{vers}(\vec{x}_B - \vec{x}_A) = F\,\vec{e}_3 \times (\cos\psi\,\vec{e}_1 + \sin\psi\,\vec{e}_2) = F(-\sin\psi\,\vec{e}_1 + \cos\psi\,\vec{e}_2)$$

Quiz Verificare per esercizio che $\vec{F}_B \cdot (\vec{x}_B - \vec{x}_A) = 0$

Allora,

$$LV^{(follow)} = \vec{F}_B \cdot \delta\vec{x}_B = F(-\sin\psi\,\vec{e}_1 + \cos\psi\,\vec{e}_2) \cdot l\left[(-\sin\varphi\,\delta\varphi - \sin\psi\,\delta\psi)\vec{e}_1 + (\cos\varphi\,\delta\varphi + \cos\psi\,\delta\psi)\,\vec{e}_2\right]$$

$$= Fl\,\sin\psi(\sin\varphi\,\delta\varphi + \sin\psi\,\delta\psi) + \cos\psi(\cos\varphi\,\delta\varphi + \cos\psi\,\delta\psi)$$

$$= Fl\,(\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi)\,\delta\varphi + (\sin^2\psi + \cos^2\psi)\,\delta\psi$$

$$= Fl\left[\cos(\psi - \varphi)\,\delta\varphi + \delta\psi\right]$$

Ricapitolando,

$$LV = LV^{(peso)} + LV^{(follow)} = \left[-\frac{3}{2}mgl\sin\varphi + Fl\cos(\psi - \varphi)\right]\delta\varphi + \left(Fl - mg\frac{l}{2}\sin\psi\right)\delta\psi$$

Quindi le forze generalizzate risultano:

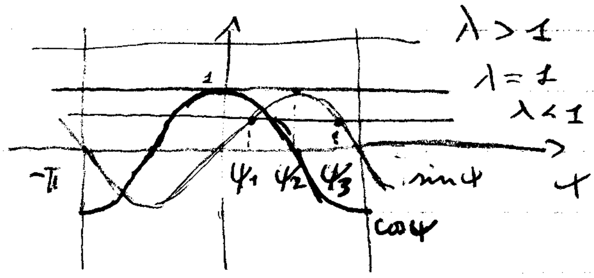
(3.1)
$$Q_\varphi = Fl\cos(\psi - \varphi) - \frac{3}{2}mgl\sin\varphi$$
$$Q_\psi = Fl - mg\frac{l}{2}\sin\psi$$

Pertanto le equazioni pure di equilibrio sono:

$$(4.1)\begin{cases} Fl\cos(\psi-\varphi)-\frac{3}{2}mgl\sin\varphi=0 \\ Fl-mg\frac{l}{2}\sin\psi=0 \end{cases}$$

Risolvendo la seconda equazione, si trova

$$(4.2) \qquad \sin\psi_E=\frac{2F}{mg}=\lambda>0$$



Quindi le soluzioni della <u>seconda</u> equazione sono:

$\lambda>1$ Nessuna

$\lambda=1$ $\psi_2=\frac{\pi}{2}$

$0<\lambda<1$ $\psi_1=\arcsin\lambda<\frac{\pi}{2}, \psi_3=\pi-\psi_1$

Risolviamo ora la prima equazione riscrivendola nella forma

$$(4.3)\ Fl\left(\cos\psi_E\cos\varphi+\sin\psi_E\sin\varphi\right)-\frac{3}{2}mgl\sin\varphi=0$$

cioè

$$(4.4)\ F\cos\psi_E\cos\varphi+\left(F\sin\psi_E-\frac{3}{2}mg\right)\sin\varphi=0$$

Sostituiamo ora i valori di $\sin\psi$ e $\cos\psi$ valutati nelle soluzioni della seconda ψ_1, ψ_2, ψ_3.

Dunque:

se $\lambda = 1$, $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\cos\psi_2 = 0$, $\sin\psi_2 = 1$

$$\left(F - \frac{3}{2}\lambda F\right)\sin\varphi = 0 \qquad \sin\varphi = 0 \qquad \varphi = 0, \pi$$

Quindi se $\lambda = 1$ le configurazioni di equilibrio $\vec{q}_E = (\psi_E, \varphi_E)$ sono:

(5.1) $\vec{q}_E^{\,(1)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\vec{q}_E^{\,(2)} = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Se $\lambda < 1$, la (4.4) diventa

(5.2) $$\operatorname{tg}\varphi_E = \frac{F\cos\psi_E}{\frac{3}{2}mg - F\sin\psi_E} = \frac{F\cos\psi_E}{\frac{3}{2}mg - F\sin\psi_E} = \frac{\pm F\sqrt{1-\lambda^2}}{\frac{3}{2}mg - F\sin\psi_E}$$

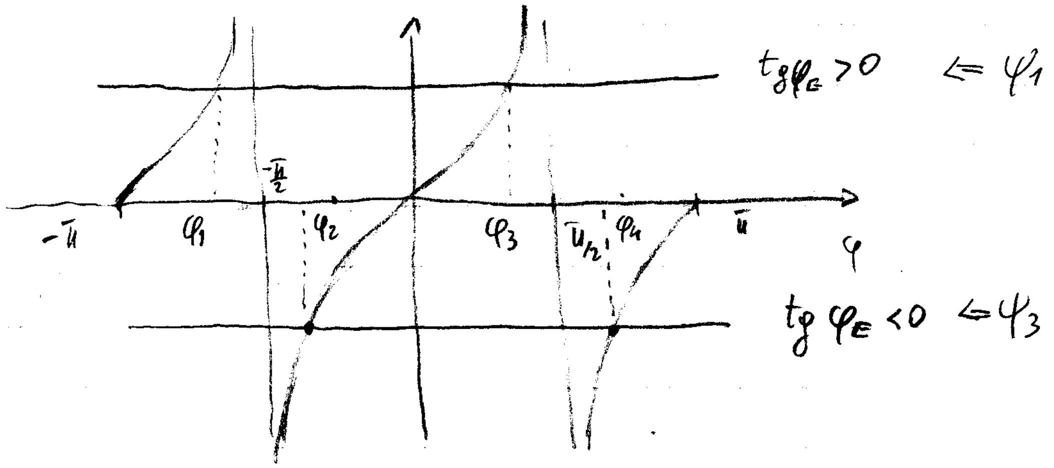
Osserviamo che il denominatore della (5.2) si può scrivere

$$\frac{3}{2}mg - F\sin\psi_E = \frac{3}{2}\frac{2F}{\lambda} - F\lambda = F\left(\frac{3}{\lambda} - \lambda\right) > 0 \quad \text{poiché } \lambda < 1 < \sqrt{3}$$

Allora, se $\lambda < 1$, vale la seguente tabella.

ψ_E	$\sin\psi_E$	$\cos\psi_E$	$\operatorname{tg}\varphi_E$
ψ_1	λ	$\sqrt{1-\lambda^2}$	$\frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{3-\lambda^2} > 0$
$\psi_2 = \pi - \psi_1$	λ	$-\sqrt{1-\lambda^2}$	$-\frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{3-\lambda^2} < 0$

Le corrispondenti φ_E si trovano dal grafico della $\mathrm{tg}\,\varphi$:



Riassumendo, le configurazioni di equilibrio per $\lambda < 1$ sono

$$\vec{q}_E^{\,(3)} = (\psi_1, \varphi_1), \quad \vec{q}_E^{\,(4)} = (\psi_1, \varphi_3)$$

$$\vec{q}_E^{\,(5)} = (\psi_3, \varphi_2), \quad \vec{q}_E^{\,(6)} = (\psi_3, \varphi_4),$$

dove $\varphi_3 := \varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{3-\lambda^2} < \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = -\varphi$, $\varphi_1 = \varphi - \pi$, $\varphi_4 = \pi - \varphi$

Pertanto il sistema ammette:

se $\lambda = 1$ le 2 configurazioni di equilibrio $\vec{q}_E^{\,(1)}, \vec{q}_E^{\,(2)}$;

se $\lambda < 1$ le 4 configurazioni di equilibrio $\vec{q}_E^{\,(3)}, \vec{q}_E^{\,(4)}, \vec{q}_E^{\,(5)}, \vec{q}_E^{\,(6)}$.

II metodo: ECS

In questo caso è facile scrivere 2 equazioni pure di equilibrio utilizzando le ECS. Basta scrivere la II ECS su tutto il sistema, con polo in O e la II ECS sulla sola asta 2, con polo in A.

(6a.1) $\vec{M}_O^{(sist)} = \vec{0} \qquad \vec{x}_{G_1} \times m\vec{g} + \vec{x}_{G_2} \times m\vec{g} + \vec{x}_B \times \vec{F} = \vec{0}$

(6a.2) $\vec{M}_A^{(2)} = \vec{0} \qquad (\vec{x}_{G_2} - \vec{x}_A) \times m\vec{g} + (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \times \vec{F} = \vec{0}$

Dalle formule di pag. 2-3 segue che la (6a.1) si riscrive

$$\frac{l}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right) \times mg\,\vec{e}_1 + l\left[\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos\psi\right)\vec{e}_1 + \left(\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin\psi\right)\vec{e}_2\right] \times mg\,\vec{e}_1 +$$
$$+ \; l\left[\left(\cos\varphi + \cos\psi\right)\vec{e}_1 + \left(\sin\varphi + \sin\psi\right)\vec{e}_2\right] \times F\left(-\sin\psi\,\vec{e}_1 + \cos\psi\,\vec{e}_2\right) = 0$$

Cioè:

$$\frac{l}{2}\sin\varphi_0\, mg\left(-\vec{e}_3\right) + l\left(\sin\varphi_0 + \frac{1}{2}\sin\psi\right) mg\left(-\vec{e}_3\right) +$$
$$+ \; l\left[\left(\cos\varphi + \cos\psi\right) F\cos\psi\,\vec{e}_3 + \left(\sin\varphi + \sin\psi\right) F\sin\psi\,\vec{e}_3\right] = 0$$

Quindi la componente scalare della (6a.1) -

$$-\frac{3}{2}mgl\sin\varphi - \frac{1}{2}mgl\sin\psi + lF\left[\cos\psi\left(\cos\varphi + \cos\psi\right) + \sin\psi\left(\sin\varphi + \sin\psi\right)\right] = 0$$

(6a.3) $$-\frac{3}{2}mgl\sin\varphi - \frac{1}{2}mgl\sin\psi + Fl\left(1 + \cos(\psi - \varphi)\right) = 0$$

Analogamente, la (6a.2) si scrive

$$\frac{l}{2}\left(\cos\psi\,\vec{e}_1+\sin\psi\,\vec{e}_2\right)\times mg\vec{e}_1 + l\left(\cos\psi\,\vec{e}_1+\sin\psi\,\vec{e}_2\right)\times F\left(-\sin\psi\,\vec{e}_1+\cos\psi\,\vec{e}_2\right)=0$$

cioè

$$mg\frac{l}{2}\sin\psi\,(-\vec{e}_3)+Fl\left(\cos^2\psi+\sin^2\psi\right)\vec{e}_3=0$$

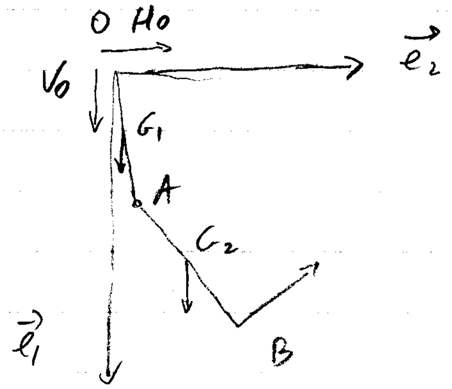
Quindi la componente scalare della (6a.2) è

$$(6b.1) \qquad -mg\frac{l}{2}\sin\psi + Fl = 0$$

N.B. Si osservi che la (6b.1) coincide con la 2ª eq. delle (4.1), cioè il primo membro della (6b.1) coincide con la forza generalizzata Q_ψ. Invece, la (6a.3) non coincide con la 1ª eq. delle (4.1) ma con la somma delle (4.1). In altri termini, risulta che

$$(6b.2) \qquad \begin{aligned} \vec{M}_A^{(2)}\cdot\vec{e}_3 &= Q_\psi \\ \vec{M}_O^{(1\cup 2)}\cdot\vec{e}_3 &= Q_\varphi+Q_\psi \end{aligned}$$

2) Calcolo delle reazioni vincolari in O.



Le reazioni incognite in O sono (V_O, H_O) e si possono determinare dalla I ECS applicate a tutto il sistema.

$$\begin{cases} \vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2mg - F \sin\varphi_E + V_O = 0 \\ F \cos\varphi_E + H_O = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} H_O = -F\cos\varphi_E \\ V_O = F\lambda - 2mg = F\lambda - \frac{4F}{\lambda} = F\left(\lambda - \frac{4}{\lambda}\right) < 0 \quad \text{poiché } \lambda < 1 < \sqrt{2} \end{cases}$$

Pertanto:

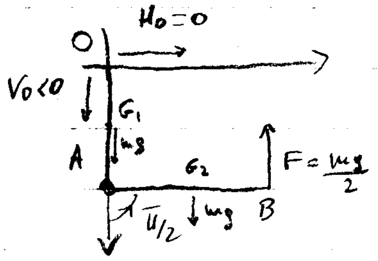
$$H_O\big|_{\vec{q}_E^{(1)}} = H_O\big|_{\vec{q}_E^{(2)}} = 0 \,, \qquad V_O\big|_{\vec{q}_E^{(1)}} = V_O\big|_{\vec{q}_E^{(2)}} = -3F < 0 \quad \Leftarrow \lambda = 1$$

$$H_O\big|_{\vec{q}_E^{(3)}} = H_O\big|_{\vec{q}_E^{(4)}} = -F\sqrt{1-\lambda^2} < 0 \,, \quad V_O\big|_{\vec{q}_E^{(3)}} = V_O\big|_{\vec{q}_E^{(4)}} = F\left(\lambda - \frac{4}{\lambda}\right) < 0$$

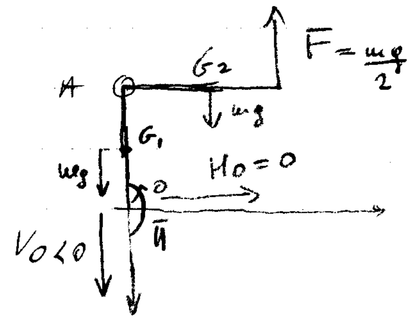
$$H_O\big|_{\vec{q}_E^{(5)}} = H_O\big|_{\vec{q}_E^{(6)}} = F\sqrt{1-\lambda^2} > 0 \,, \quad V_O\big|_{\vec{q}_E^{(5)}} = V_O\big|_{\vec{q}_E^{(6)}} = F\left(\lambda - \frac{4}{\lambda}\right) < 0$$

Ricapitolando:

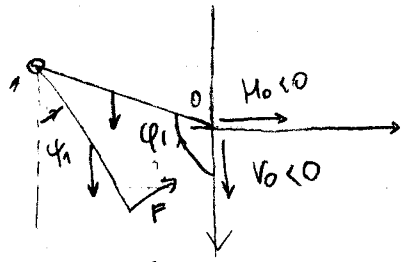
$$\vec{q}_E^{\,(1)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$



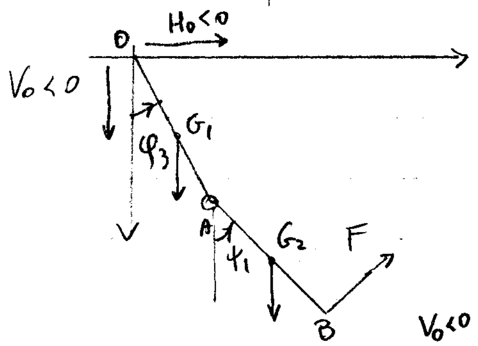
$$\vec{q}_E^{\,(2)} = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$



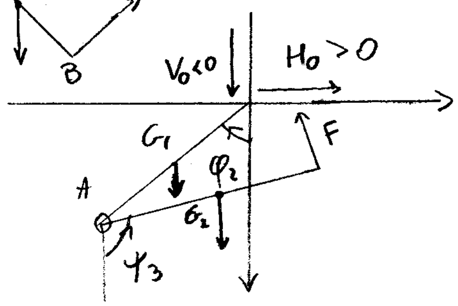
$$\vec{q}_E^{\,(3)} = \left(\varphi_1, \varphi_1\right)$$



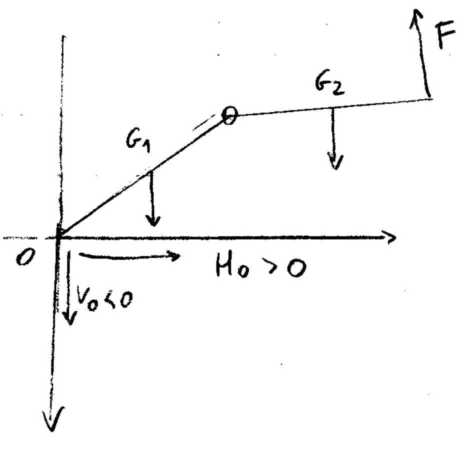
$$\vec{q}_E^{\,(4)} = \left(\varphi_1, \varphi_3\right)$$



$$\vec{q}_E^{\,(5)} = \left(\varphi_3, \varphi_2\right)$$

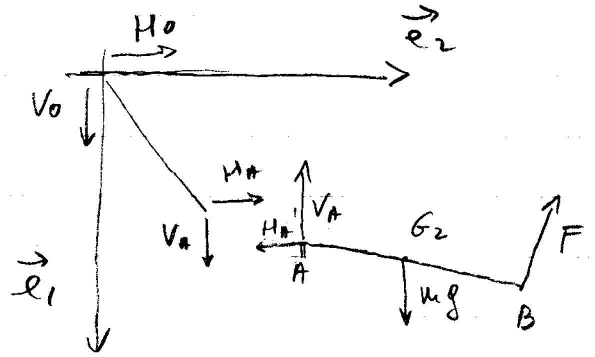


$$\vec{q}_E^{\,(6)} = \left(\varphi_3, \varphi_4\right)$$



3) Reazioni vincolari in A

Le reazioni in A sono reazioni interne, quindi bisogna "spezzare" il sistema.



Utilizzo la IECS sull'asta AB.

$$\vec{R}^{(2)}\cdot\vec{e}_1 = 0 \qquad \vec{R}^{(2)}\cdot\vec{e}_2 = 0 \qquad \begin{cases} -V_A + mg - F\sin\varphi_E = 0 \\ -H_A + F\cos\varphi_E = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$H_A = F\cos\varphi_E \quad , \quad V_A = mg - F\sin\varphi_E = mg - F\lambda = F\left(\frac{2}{\lambda} - \lambda\right) > 0$$

poiché $\lambda < 1 < \sqrt{2}$

Pertanto:

$$H_A\big|_{\vec{q}_E^{(1)}} = H_A\big|_{\vec{q}_E^{(2)}} = 0 \quad , \quad V_A\big|_{\vec{q}_E^{(1)}} = V_A\big|_{\vec{q}_E^{(2)}} = F > 0 \quad \Leftarrow \lambda = 1$$

$$H_A\big|_{\vec{q}_E^{(3)}} = H_A\big|_{\vec{q}_E^{(4)}} = F\sqrt{1-\lambda^2} > 0 \, , \quad V_A\big|_{\vec{q}_E^{(3)}} = V_A\big|_{\vec{q}_E^{(4)}} = F\left(\frac{2}{\lambda} - \lambda\right) > 0$$

$$H_A\big|_{\vec{q}_E^{(5)}} = H_A\big|_{\vec{q}_E^{(6)}} = -F\sqrt{1-\lambda^2} < 0 \, , \quad V_A\big|_{\vec{q}_E^{(5)}} = V_A\big|_{\vec{q}_E^{(6)}} = F\left(\frac{2}{\lambda} - \lambda\right) > 0$$

N.B. Come controllo, verificare che la IECS sull'asta OA è soddisfatta con i risultati precedenti.

Dinamica

4) Avendo già calcolato le forze generalizzate al punto 1) conviene scrivere le EL (in forma non conservativa).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right)-\frac{\partial K}{\partial \varphi}=Q_\varphi \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\psi}\right)-\frac{\partial K}{\partial \psi}=Q_\psi$$

A questo scopo, calcoliamo l'energia cinetica K del sistema.

$$K=K^{(1)}+K^{(2)}$$

$$K^{(1)}=\frac{1}{2}I_0\dot\varphi^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot\varphi^2$$

$$K^{(2)}=\frac{1}{2}I_{G_2}\dot\psi^2+\frac{1}{2}mv_{G_2}^2$$

Per il calcolo di $\vec{v}_{G_2}$ usiamo la formula di Poisson.

$$(10.1)\quad \vec{v}_{G_2}\overset{A\in②}{=}\vec{v}_A+\vec{\omega}_2\times(\vec{x}_{G_2}-\vec{x}_A)\overset{A\in①}{=}\vec{\omega}_1\times(\vec{x}_A-\vec{x}_O)+\vec{\omega}_2\times(\vec{x}_{G_2}-\vec{x}_A)=$$

$$=\dot\varphi\,\vec{e}_3\times l(\cos\varphi\,\vec{e}_1+\sin\varphi\,\vec{e}_2)+\dot\psi\,\vec{e}_3\times\frac{l}{2}(\cos\psi\,\vec{e}_1+\sin\psi\,\vec{e}_2)=$$

$$=l\left[-\left(\dot\varphi\sin\varphi+\frac{1}{2}\dot\psi\sin\psi\right)\vec{e}_1+\left(\dot\varphi\cos\varphi+\frac{1}{2}\dot\psi\cos\psi\right)\vec{e}_2\right]$$

Allora

$$v_{G_2}^2=l^2\left[\left(\dot\varphi\sin\varphi+\frac{\dot\psi}{2}\sin\psi\right)^2+\left(\dot\varphi\cos\varphi+\frac{\dot\psi}{2}\cos\psi\right)^2\right]=$$

$$=l^2\left[\dot\varphi^2\sin^2\varphi+\frac{1}{4}\dot\psi^2\sin^2\psi+\dot\varphi\dot\psi\sin\varphi\sin\psi+\dot\varphi^2\cos^2\varphi+\frac{1}{4}\dot\psi^2\cos^2\psi+\dot\varphi\dot\psi\cos\varphi\cos\psi\right]=$$

$$=l^2\left[\dot\varphi^2+\frac{1}{4}\dot\psi^2+\dot\varphi\dot\psi\cos(\psi-\varphi)\right]$$

Dunque:

$$K^{(2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m\ell^2\right)\dot\psi^2+\frac{1}{2}m\ell^2\left[\dot\varphi^2+\frac{1}{4}\dot\psi^2+\dot\varphi\dot\psi\cos(\psi-\varphi)\right]$$

e quindi l'energia cinetica totale è

$$K=\frac{1}{6}m\ell^2\dot\varphi^2+\frac{1}{24}m\ell^2\dot\psi^2+\frac{1}{2}m\ell^2\left[\dot\varphi^2+\frac{\dot\psi^2}{4}+\dot\varphi\dot\psi\cos(\psi-\varphi)\right]$$
$$=\frac{2}{3}m\ell^2\dot\varphi^2+\frac{1}{6}m\ell^2\dot\psi^2+\frac{1}{2}m\ell^2\dot\varphi\dot\psi\cos(\psi-\varphi)$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi}=\frac{4}{3}m\ell^2\dot\varphi+\frac{1}{2}m\ell^2\dot\psi\cos(\psi-\varphi)\quad,\quad\frac{\partial K}{\partial\varphi}=\frac{1}{2}m\ell^2\dot\varphi\dot\psi\left(+\sin(\psi-\varphi)\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi}\right)=\frac{4}{3}m\ell^2\ddot\varphi+\frac{1}{2}m\ell^2\ddot\psi\cos(\psi-\varphi)-\frac{1}{2}m\ell^2\dot\psi\left(\dot\psi-\dot\varphi\right)\sin(\psi-\varphi)$$

1ªEL: $$\boxed{\frac{4}{3}m\ell^2\ddot\varphi+\frac{1}{2}m\ell^2\ddot\psi\cos(\psi-\varphi)-\frac{1}{2}m\ell^2\dot\psi^2\sin(\psi-\varphi)=F\ell\cos(\psi-\varphi)-\frac{3}{2}mg\ell\sin\varphi}$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\psi}=\frac{1}{3}m\ell^2\dot\psi+\frac{1}{2}m\ell^2\dot\varphi\cos(\psi-\varphi)\quad,\quad\frac{\partial K}{\partial\psi}=\frac{1}{2}m\ell^2\dot\varphi\dot\psi\left(-\sin(\psi-\varphi)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\psi}\right)=\frac{1}{3}m\ell^2\ddot\psi+\frac{1}{2}m\ell^2\ddot\varphi\cos(\psi-\varphi)-\frac{1}{2}m\ell^2\dot\varphi\left(\dot\psi-\dot\varphi\right)\sin(\psi-\varphi)$$

2ªEL: $$\boxed{\frac{1}{3}m\ell^2\ddot\psi+\frac{1}{2}m\ell^2\ddot\varphi\cos(\psi-\varphi)+\frac{1}{2}m\ell^2\dot\varphi^2\sin(\psi-\varphi)=F\ell-mg\ell\sin\psi}$$

5) L'energia meccanica NON è un integrale primo di moto poichè il sistema meccanico NON è conservativo. Infatti, le forze generalizzate non passano il test delle derivate miste poichè dalle (3.1) si ha

$$\frac{\partial Q_\varphi}{\partial \psi} = -F\ell \sin(\psi-\varphi) \neq \frac{\partial Q_\psi}{\partial \varphi} = 0$$

Ciò implica che NON esiste la funzione energia potenziale del sistema.

6) <u>reazioni vincolari in O durante il moto</u>

Usiamo le ECD applicate a tutto il sistema

$$\vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_1 = m\,\vec{a}_{G_1} \cdot \vec{e}_1 + m\,\vec{a}_{G_2} \cdot \vec{e}_1$$

$$\vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_2 = m\,\vec{a}_{G_1} \cdot \vec{e}_2 + m\,\vec{a}_{G_2} \cdot \vec{e}_2$$

Si noti che al II membro abbiamo scritto la derivata (nel tempo) della quantità di moto totale del sistema.

$$\vec{a}_{G_1} = \ddot{\vec{x}}_{G_1} = \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\ell}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\ell}{2}\left(-\sin\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_2\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{\ell}{2}\left(\left(-\sin\varphi\,\ddot\varphi - \cos\varphi\,\dot\varphi^2\right)\vec{e}_1 + \left(\cos\varphi\,\ddot\varphi - \sin\varphi\,\dot\varphi^2\right)\vec{e}_2\right)\right]$$

$$\vec{a}_{G_2} = \frac{d}{dt}\vec{V}_{G_2} \overset{(10.1)}{=} \frac{d}{dt}\left[\ell\left[-\left(\dot\varphi\sin\varphi + \frac{\dot\psi}{2}\sin\psi\right)\vec{e}_1 + \left(\dot\varphi\cos\varphi + \frac{\dot\psi}{2}\cos\psi\right)\vec{e}_2\right]\right] =$$

$$= \ell\left[-\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi + \frac{\ddot\psi}{2}\sin\psi + \frac{\dot\psi^2}{2}\cos\psi\right)\vec{e}_1 +\right.$$

$$\left. + \left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi + \frac{\ddot\psi}{2}\cos\psi - \frac{\dot\psi^2}{2}\sin\psi\right)\vec{e}_2\right]$$

Pertanto le (10.1) si scrivono

$$(13.1)\quad \begin{aligned} 2mg - F\sin\psi + V_0' &= m\frac{\ell}{2}\left(-\sin\varphi\ddot\varphi - \cos\varphi\dot\varphi^2\right) - m\ell\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi + \frac{\ddot\psi}{2}\sin\psi + \frac{\dot\psi^2}{2}\cos\psi\right) \\ F\cos\psi + H_0' &= m\frac{\ell}{2}\left(\cos\varphi\ddot\varphi - \sin\varphi\dot\varphi^2\right) + m\ell\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi + \frac{\ddot\psi}{2}\cos\psi - \frac{\dot\psi^2}{2}\sin\psi\right) \end{aligned}$$

Quindi le reazioni vincolari in O durante il moto sono:

$$V_0' = F\sin\psi - 2mg - \frac{3}{2}m\ell\left(\sin\varphi\ddot\varphi + \cos\varphi\dot\varphi^2\right) - \frac{m\ell}{2}\left(\ddot\psi\sin\psi + \dot\psi^2\cos\psi\right)$$

$$H_0' = \frac{3}{2}m\ell\left(\cos\varphi\ddot\varphi - \sin\varphi\dot\varphi^2\right) + \frac{m\ell}{2}\left(\ddot\psi\cos\psi - \dot\psi^2\sin\psi\right) - F\cos\psi$$

Le reazioni precedenti si possono anche calcolare considerando le ECD nella forma

$$\vec{R}^{ext}\cdot\vec{e}_1 = 2m\,\vec{a}_G\cdot\vec{e}_1$$

$$\vec{R}^{ext}\cdot\vec{e}_2 = 2m\,\vec{a}_G\cdot\vec{e}_2$$

con G centro di massa dell'intero sistema.

Calcoliamo $\vec{x}_G$ usando la proprietà distributiva:

$$\vec{x}_G = \frac{m\vec{x}_{G_1} + m\vec{x}_{G_2}}{2m} = \frac{\vec{x}_{G_1} + \vec{x}_{G_2}}{2}$$

punto medio del segmento G_1G_2

Allora

$$\vec{x}_G = \frac{1}{2}\left[\frac{\ell}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right) + \ell\left[\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos\psi\right)\vec{e}_1 + \left(\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin\psi\right)\vec{e}_2\right]\right] =$$

$$= \frac{\ell}{4}\left[\left(3\cos\varphi + \cos\psi\right)\vec{e}_1 + \left(3\sin\varphi + \sin\psi\right)\vec{e}_2\right]$$

e derivando 2 volte risp. al tempo si ritrovano i II membri delle (13.1).