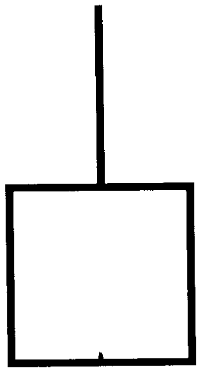
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 1 febbraio 2010

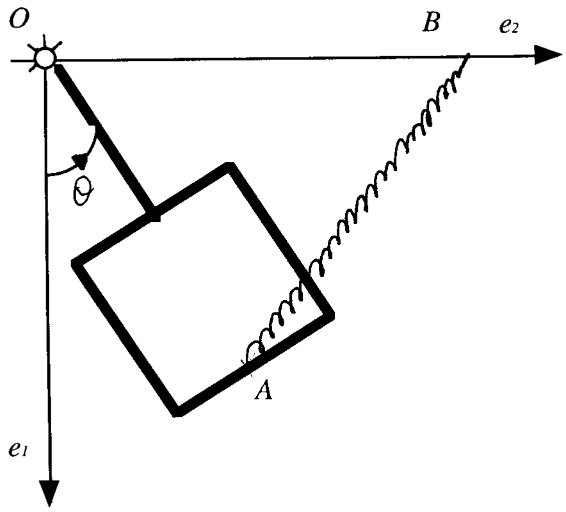
(G. Tondo)



È dato il corpo rigido formato da una **lamina** quadrata omogenea di lato a e massa M e da un'asta di lunghezza a e massa m saldata alla lamina come in figura.

1) Calcolare il momento d'inerzia del corpo rispetto ad una diagonale della lamina.

STATICA.



Si vincoli il corpo in un piano **verticale** con una cerniera liscia fissata in O. Le forze attive sono: il peso proprio del corpo e la forza di richiamo della molla di costante elastica c, collegata al punto medio A del lato della lamina e al punto fisso B, posto a distanza d da O.

2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità in funzione dei parametri del sistema;

3) calcolare le reazioni vincolari esterne all'equilibrio in O.

DINAMICA.

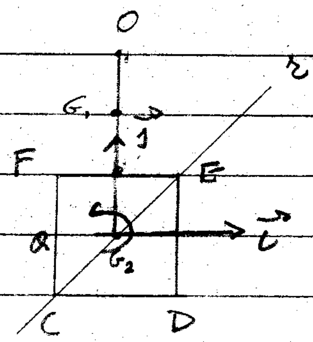
Inoltre si chiede di:

4) scrivere un' equazione differenziale pura di moto;

5) scrivere un integrale primo di moto a partire dalle condizioni iniziali $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$;

6) calcolare le reazioni vincolari in O durante il moto, in funzione della coordinate libera.

Tema del 1-02-2010



1) Calcolo di I_r e di I_O

Determino la matrice d'inerzia I_{G_2} del corpo rispetto alla terna $(G_2, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$I_{G_2} = I_{G_2}^{(\ell)} + I_2^{(a)}$$

Osservo che la terna $(G_2, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è una terna principale d'inerzia sia per la lamina, sia per l'asta, per evidenti ragioni di simmetria. Allora,

$$I_{G_2}^{(\ell)} = Ma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \qquad I_{G_2}^{(a)} = \begin{bmatrix} I_x^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_x^{(a)} \end{bmatrix} \text{ (caso degenere)}$$

$$I_x^{(a)} \overset{HS}{=} I_{G_1 x}^{(a)} + ma^2 = \frac{1}{12} ma^2 + ma^2 = \frac{13}{12} ma^2$$

Dunque,

$$I_{G_2} = a^2 \begin{bmatrix} \left(\frac{M}{12} + \frac{13}{12} m\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} M & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{6} + \frac{13}{12} m \end{bmatrix}$$

Un versore della retta r è dato da

$$\text{vers}(r) = \text{vers}(\vec{x}_E - \vec{x}_{G_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j})$$

Quindi

$$I_r = \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 1] \, a^2 \begin{bmatrix} \frac{M}{12} + \frac{13}{12} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} M \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{12} M + \frac{13}{24} m \right) a^2$$

Calcoliamo anche il momento d'inerzia I_{Oz}, rispetto all'asse ortogonale al piano e passante per O, che ci servirà in dinamica.

$$(2.1)\quad I_{Oz} = I_{Oz}^{(\ell)} + I_{Oz}^{(a)}$$

$$(2.2)\quad I_{Oz}^{(\ell)} \overset{HS}{=} I_{G_2 z} + M\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} M a^2 + M \frac{9}{4} a^2 = \frac{29}{12} M a^2$$

$$(2.3)\quad I_{Oz}^{(a)} = \frac{1}{3} m a^2$$

Quindi,

$$(2.4)\quad I_{Oz} = \left(\frac{29}{12} M + \frac{1}{3} m\right) a^2$$

Calcolo del baricentro

$$\vec{x}_G - \vec{x}_O = \frac{m(\vec{x}_{G_1} - \vec{x}_O) + M(\vec{x}_{G_2} - \vec{x}_O)}{m+M} \qquad \text{(proprietà distributiva)}$$

Poiché

$$(2.5)\quad (\vec{x}_{G_1} - \vec{x}_O) = \frac{a}{2}(\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2)$$

$$(2.6)\quad (\vec{x}_{G_2} - \vec{x}_O) = \frac{3}{2} a (\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2)$$

si ha che il baricentro è dato da

$$(2.7)\quad (\vec{x}_G - \vec{x}_O) = \frac{1}{m+M}\left[m \frac{a}{2}(\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2) + \frac{3}{2} M a (\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2)\right]$$

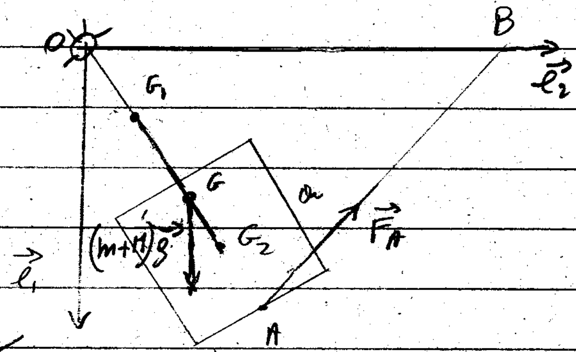
$$= \frac{a}{2}\frac{(m+3M)}{m+M}(\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2),$$

che è un punto interno al segmento $\overline{G_1G_2}$.

Statica

Il modello è un rigido piano con un punto fisso, quindi ha 1 g.l.. Consideriamo la coordinata libera $0 \le \theta < 2\pi$.

2) La sollecitazione esterna è dovuta al peso e alla forza elastica della molla. Pertanto il sistema è conservativo. Calcoliamo la sua energia potenziale $V(\theta)$.



$$(3.1)\quad V(\theta)^{(peso)} = -(m+M)\,\vec{g}\cdot(\vec{x}_G-\vec{x}_O) \overset{(2.7)}{=} -\cancel{(m+M)}\, g\, \frac{a}{2}\,\frac{(m+3M)}{\cancel{m+M}}\cos\theta$$

$$(3.2)\quad V^{(molla)}(\theta) = \frac{1}{2}\, c\, \overline{AB}^2$$

$$(3.3)\quad \overline{AB}^2 = \left|\vec{x}_A-\vec{x}_B\right|^2 \qquad (3.4)\quad \vec{x}_A-\vec{x}_B = (\vec{x}_A-\vec{x}_O)+(\vec{x}_O-\vec{x}_B) =$$

$$= 2a(\cos\theta\,\vec{e}_1+\sin\theta\,\vec{e}_2)+(-d\,\vec{e}_2)$$

$$= (2a\cos\theta\,\vec{e}_1+(2a\sin\theta-d)\,\vec{e}_2)$$

$$(3.4)\quad \overline{AB}^2 = (2a\cos\theta)^2+(2a\sin\theta-d)^2 = 4a^2\cos^2\theta+4a^2\sin^2\theta-4ad\sin\theta+d^2.$$

$$= 4a^2+d^2-4ad\sin\theta$$

Quindi

$$(3.5)\quad V^{(molla)}(\theta) = -2acd\sin\theta$$ (trascurando le costanti additive)

e

$$(3.6)\quad V(\theta) = -g\frac{a}{2}(m+3M)\cos\theta-2acd\sin\theta$$

$$(3.7)\quad V'(\theta) = g\frac{a}{2}(m+3M)\sin\theta-2acd\cos\theta = -Q_\theta$$

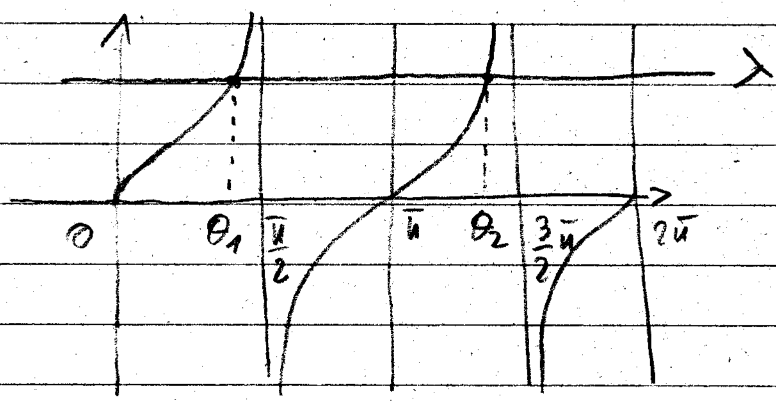
Allora, l'equazione pura di equilibrio è

(4.1) $\frac{g}{2}(m+3M)\sin\theta - 2cd\cos\theta = 0$

Poiché $\theta = \pm\pi/2$ non è soluzione dell'equazione, possiamo dividere ambo i membri per $\cos\theta$ e ottenere

(4.2) $\tan\theta = \frac{4cd}{g(m+3M)} = \lambda > 0 \Rightarrow Q_\theta = g\frac{a}{2}(m+3M)(-\sin\theta + \lambda\cos\theta)$

Discutiamo le soluzioni graficamente



Abbiamo 2 soluzioni:

(4.3) $\theta_e^{(1)} = \theta_1 = \arctan\lambda$ $\quad 0<\theta_1<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta_e^{(1)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}},\ \cos\theta_e = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$

(4.4) $\theta_e^{(2)} = \theta_2 = \pi + \theta_1$ $\quad \pi < \theta_2 < \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \sin\theta_e^{(2)} = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}},\ \cos\theta_e = -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$

Per la stabilità, calcoliamo

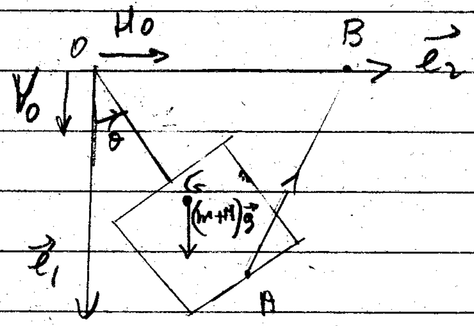
$V''(\theta) = \frac{ag}{2}(m+3M)(\cos\theta + \lambda\sin\theta)$

e osserviamo che

$V''(\theta_1) > 0 \Rightarrow \min \Rightarrow$ eq. stabile

$V''(\theta_2) < 0 \Rightarrow \max \Rightarrow$ eq. instabile

3) Reazioni esterne in O



Scriviamo la I ECS

$$(5.1)\quad \vec{R}^{\,est} = \vec{O}$$

$$(5.2)\quad V_0\,\vec{e}_1 + H_0\,\vec{e}_2 + (m+M)\vec{g} + \vec{F}_A = \vec{O}$$

$$(5.3)\quad \vec{F}_A = -c(\vec{x}_A - \vec{x}_B) \overset{(3.4)}{=} -c\left(2a\cos\theta\,\vec{e}_1 + (2a\sin\theta - d)\,\vec{e}_2\right)$$

Quindi

$$\vec{R}^{\,est}\cdot\vec{e}_1: \quad V_0 + (m+M)g - 2ac\cos\theta_e = 0$$

$$\vec{R}^{\,est}\cdot\vec{e}_2: \quad H_0 - c(2a\sin\theta_e - d) = 0$$

Pertanto,

$$V_0 = -(m+M)g + 2ac\cos\theta_e$$

$$H_0 = c(2a\sin\theta_e - d)$$

Quindi

se $\theta = \theta_e^{(1)}$ $\quad V_0 = -(m+M)g + \dfrac{2ac}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,, \quad H_0 = c\left(\dfrac{2a\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} - d\right)$

se $\theta = \theta_e^{(2)}$ $\quad V_0 = -(m+M)g - \dfrac{2ac}{\sqrt{1+\lambda^2}} < 0\,, \quad H_0 = c\left(-\dfrac{2a\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} - d\right) < 0$

4) Scriviamo l'eq. di Lagrange (non conservativa) relativa a θ.

$$(6.1)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial K}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$(6.2)\quad K = \frac{1}{2} I_{oz}\, \dot\theta^2 \overset{(2.4)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{29}{12}M + \frac{1}{3}m\right)a^2\dot\theta^2$$

$$(6.7)\quad \frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = \left(\frac{29}{12}M + \frac{1}{3}m\right)a^2\dot\theta \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0$$

Quindi, l'eq. di Lagrange è data da

$$(6.8)\quad \left(\frac{29}{12}M + \frac{1}{3}m\right)a^2\ddot\theta \overset{(4.2)}{=} g\frac{a}{2}(m+3M)\left(\lambda\cos\theta - \sin\theta\right)$$

Risolvendo rispetto a $\ddot\theta$ si trova

$$(6.9)\quad \ddot\theta = \frac{g\,(m+3M)}{2a\left(\frac{29}{12}M + \frac{1}{3}m\right)}\left(\lambda\cos\theta - \sin\theta\right) = f(\theta)$$

5) Il sistema è conservativo, i vincoli sono lisci e fissi, quindi l'energia meccanica è un integrale primo di moto.

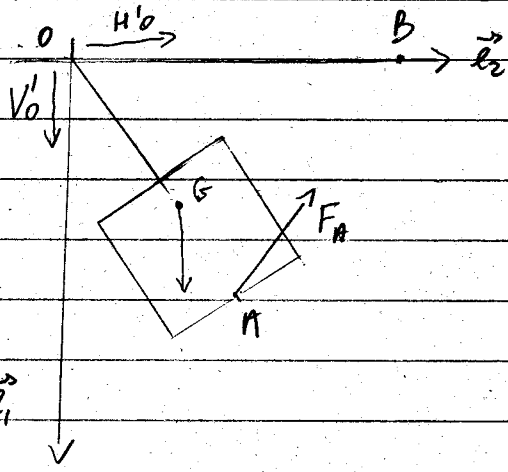
$$(6.10)\quad E = K + V = \frac{1}{2}\left(\frac{29}{12}M + \frac{1}{3}m\right)a^2\dot\theta^2 - g\frac{a}{2}(m+3M)\left(\lambda\sin\theta + \cos\theta\right)$$

$$(6.11)\quad E\big|_{t=0} = -g\frac{a}{2}(m+3M)$$

Pertanto,

$$(6.12)\quad \dot\theta^2 = \frac{g\,(m+3M)\left(\lambda\sin\theta + \cos\theta - 1\right)}{a\left(\frac{29}{12}M + \frac{1}{3}m\right)} = g^2(\theta)$$

6) Reazioni vincolari in O durante il moto, in funzione di θ



La I ECD si scrive

$$\vec{R}^{ext} = (m+M)\,\ddot{\vec{x}}_G$$

$$\dot{\vec{x}}_G \overset{(2.7)}{=} \frac{a}{2}\,\frac{m+3M}{m+M}\left(-\sin\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_2\right)$$

$$\ddot{\vec{x}}_G = \frac{a}{2}\,\frac{m+3M}{m+M}\left[\left(-\sin\theta\,\ddot\theta - \cos\theta\,\dot\theta^2\right)\vec{e}_1 + \left(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\,\dot\theta^2\right)\vec{e}_2\right]$$

Pertanto,

$$\vec{R}^{ext}\cdot\vec{e}_1: \quad V_0' + (m+M)g - 2ac\cos\theta = -\frac{a}{2}(m+3M)\left(\sin\theta\,\ddot\theta + \cos\theta\,\dot\theta^2\right)$$

$$\vec{R}^{ext}\cdot\vec{e}_2: \quad H_0' - c(2a\sin\theta - d) = \frac{a}{2}(m+3M)\left(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\,\dot\theta^2\right)$$

Quindi,

$$V_0' = -(m+M)g + 2ac\cos\theta - \frac{a}{2}(m+3M)\left(\sin\theta\,\ddot\theta + \cos\theta\,\dot\theta^2\right)$$

$$H_0' = c\,(2a\sin\theta - d) + \frac{a}{2}(m+3M)\left(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\,\dot\theta^2\right)$$

Sostituendo la (6.9) e la (6.12) si ottiene la risposta