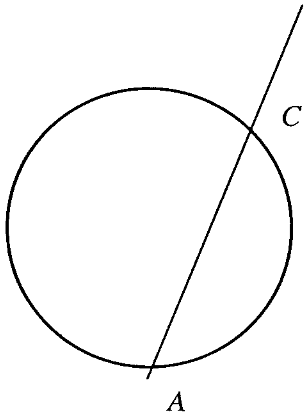
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 13 gennaio 2009

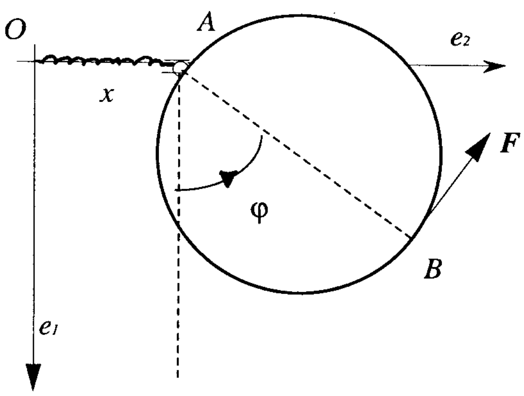
(G. Tondo)



È data una **lamina** circolare omogenea di raggio r e massa m.

1) Calcolare il momento d'inerzia della lamina rispetto alla retta passante per il punto A e per il punto C tale che $\overset{\frown}{AC} = \frac{3}{4}\pi r$.

STATICA.



Si vincoli la lamina in un piano **verticale** con una cerniera liscia in A e scorrevole su un asse orizzontale. Le forze attive sono: la forza F applicata in B e ortogonale al diametro AB, la forza di richiamo della molla di costante elastica $3c$ e il peso proprio della lamina.

2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri del sistema;

3) calcolare le reazioni vincolari in A all'equilibrio.

DINAMICA.

Inoltre si chiede di:

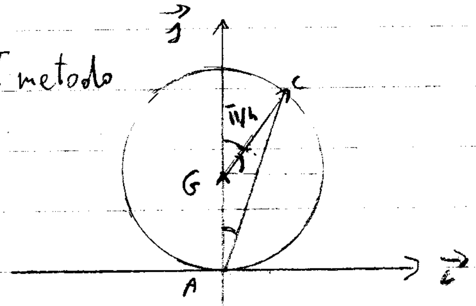
4) scrivere due equazioni differenziali pure di moto;

5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, determinarla;

6) calcolare le reazioni vincolari in A, durante il moto, in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate rispetto al tempo.

Tema del 13-01-2008

1) I metodo



Calcolo la matrice d'inerzia rispetto alla terna di figura che, per ragioni di simmetria, è una terna principale d'inerzia.

$$I_A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_1+J_2 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \frac{1}{4} m r^2$$

$$J_1 \overset{HS}{=} J_2 + m r^2 = \frac{5}{4} m r^2$$

Quindi

$$I_A = m r^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_C - \vec{x}_A = (\vec{x}_G - \vec{x}_A) + (\vec{x}_C - \vec{x}_G) =$$

$$= r\vec{j} + \frac{r}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}) = \frac{r}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + (1+\sqrt{2})\vec{j}\right)$$

$$|\vec{x}_C - \vec{x}_A| = \frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{1+(1+\sqrt{2})^2} = \frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt{2}} = r\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\text{vers}(\vec{x}_C - \vec{x}_A) = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\left(\vec{i} + (1+\sqrt{2})\vec{j}\right)$$

Allora

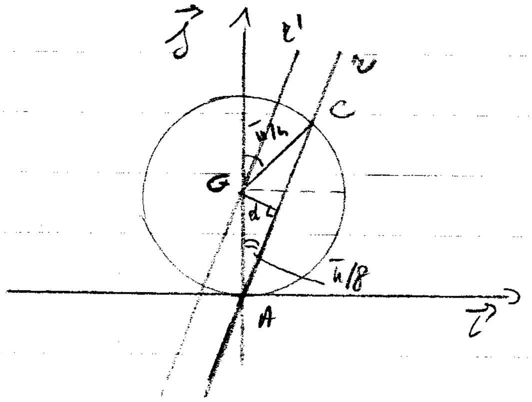
$$I_r = \text{vers}(\vec{x}_C - \vec{x}_A) \cdot \mathbb{I}_A\left(\text{vers}(\vec{x}_C - \vec{x}_A)\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}[1, 1+\sqrt{2}, 0] \; I_A \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4+2\sqrt{2}}[1, 1+\sqrt{2}]\, m\frac{r^2}{4}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{m r^2}{(4+2\sqrt{2})4}[1, 1+\sqrt{2}]\begin{bmatrix} 5 \\ (1+\sqrt{2}) \end{bmatrix} = \frac{m r^2}{(4+2\sqrt{2})4}\left(5+(1+\sqrt{2})^2\right) = \frac{4+\sqrt{2}}{4(2+\sqrt{2})} m r^2 =$$

$$= \frac{m r^2}{4}\frac{(4+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{m r^2}{4}\frac{6-2\sqrt{2}}{2} = m r^2 \frac{3-\sqrt{2}}{4}$$



II metodo : Teorema di Huygens-Steiner

$$I_r = I_{r'} + m d^2 \qquad d = r \sin\frac{\pi}{8} = r\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = r\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Quindi

$$I_r = J_2 + m r^2\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = m r^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{m r^2}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{m r^2}{4\sqrt{2}}\left(3\sqrt{2}-2\right) = \frac{m r^2}{4}\left(3-\sqrt{2}\right) \quad \text{Ok.}$$

2) Dall'analisi cinematica si ha che il sistema è un rigido con 2 g.l., quindi 2 coordinate libere

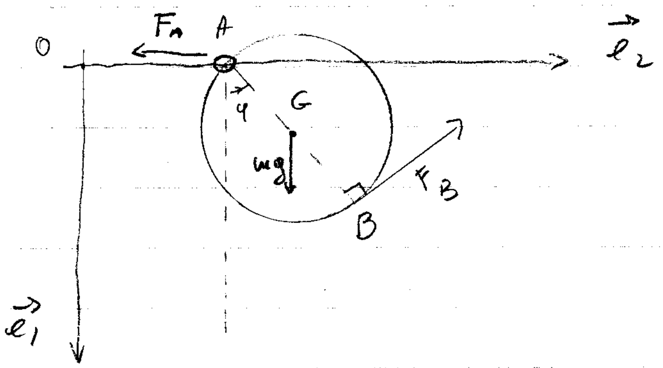
$$(x, \varphi) \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi \in \left]-\pi, \pi\right]$$

Per determinare gli equilibri, scriviamo le 2 equazioni pure di equilibrio

$$\begin{cases} Q_x(x,\varphi) = 0 \\ Q_\varphi(x,\varphi) = 0 \end{cases}$$

A tale scopo, calcoliamo il lavoro virtuale nel sistema, tenendo conto che esso è costituito da un solo rigido. Quindi

$$LV = \vec{R}^{(est)} \cdot \delta\vec{x}_A + \vec{M}_A^{(est)} \cdot \delta\varphi\,\vec{e}_3$$



$$\vec{F}_A = -3c\,x\,\vec{e}_2$$

$$\vec{F}_B = F\,\vec{e}_3 \times \text{vers}(\vec{x}_B - \vec{x}_A) = F(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2)$$

$$\vec{x}_A = x\,\vec{e}_2 \Rightarrow \delta\vec{x}_A = \delta x\,\vec{e}_2$$

$$\vec{R}^{(est)} = \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_B$$

$$\vec{M}_A^{(est)} = (\vec{x}_G - \vec{x}_A) \times m\vec{g} + (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \times \vec{F}_B$$

$$= (-mgr\sin\varphi + F\,2r)\,\vec{e}_3$$

Allora

$$LV = \left(-3cx\vec{e}_2 + mg\,\vec{e}_1 + F(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2)\right)\cdot \delta x\,\vec{e}_2$$
$$+ \left(2rF - mgr\sin\varphi\right)\vec{e}_3 \cdot \delta\varphi\,\vec{e}_3$$
$$= \left(F\cos\varphi - 3cx\right)\delta x + \left(2rF - mgr\sin\varphi\right)\delta\varphi$$

Quindi, le forze generalizzate sono

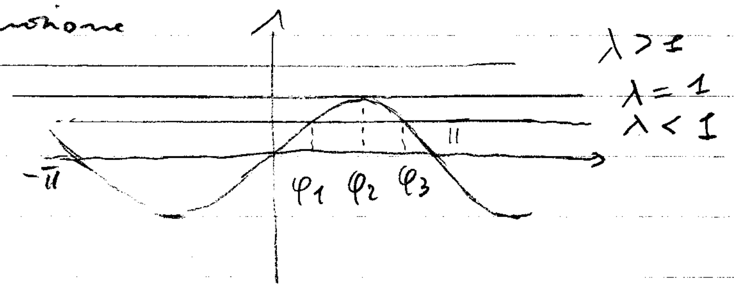
$$(3.1)\quad Q_x = F\cos\varphi - 3cx = \vec{R}^{(att)}\cdot\vec{e}_2$$
$$Q_\varphi = \left(2rF - mgr\sin\varphi\right) = \vec{M}_A^{(att)}\cdot\vec{e}_3$$

e le equazioni pure di equilibrio

$$(3.2)\quad \begin{cases} F\cos\varphi - 3cx = 0 \\ 2F - mg\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Risolviamo prima la II equazione

$$(3.3)\quad \sin\varphi = \frac{2F}{mg} = \lambda > 0$$



Se $\lambda > 1 \Rightarrow$ Nessuna soluzione

Se $\lambda = 1 \Rightarrow \exists!\ \varphi_2 = \pi/2$, $\cos\varphi_2 = 0$

Se $0 < \lambda < 1 \Rightarrow$ 2 soluz. $\varphi_1 = \arcsin\lambda < \frac{\pi}{2}$, $\varphi_3 = \pi - \varphi_1$

$\cos\varphi_1 = \sqrt{1-\lambda^2}$, $\cos\varphi_3 = -\sqrt{1-\lambda^2}$

Dalle I eq delle (3.2) segue che

$$x_e = \frac{E}{3C}\cos\varphi_e = \begin{cases} \lambda=1 & 0 \\ \lambda<1 & \begin{cases} \frac{E}{3C}\sqrt{1-\lambda^2} & \Leftarrow \varphi_1 \\ -\frac{E}{3C}\sqrt{1-\lambda^2} & \Leftarrow \varphi_3 \end{cases} \end{cases}$$

Pertanto, le configurazioni di equilibrio $\vec{q}_e = (\varphi_e, x_e)$ sono:

$$\vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \qquad \text{se } \lambda = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{q}_e^{\,(1)} &= \left(\varphi_1, \frac{E}{3C}\sqrt{1-\lambda^2}\right) \\ \vec{q}_e^{\,(2)} &= \left(\varphi_3, -\frac{E}{3C}\sqrt{1-\lambda^2}\right) \end{aligned}\right\} \text{se } \lambda < 1$$

3) <u>Reazioni vincolari in A</u>

Dall'ipotesi che la cerniera scorrevole in A è liscia e bilatera, segue che l'unica reazione è

$$\vec{\Phi}_A = V_A \vec{e}_1 .$$

Per calcolare V_A, scrivo la I ECS

$$\vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_1 = 0 \qquad V_A + mg + \vec{F}_B \cdot \vec{e}_1 = 0$$

$$V_A + mg - F\sin\varphi_e = 0$$

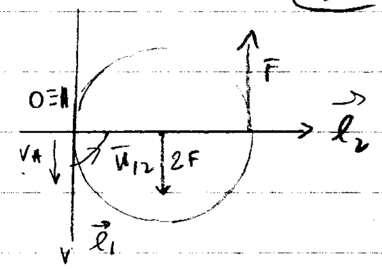
Quindi

$$V_A = F\sin\varphi_e - mg = F\lambda - mg = F\left(\lambda - \frac{2}{\lambda}\right) < 0 \quad \text{poiché } \lambda \leq 1 < \sqrt{2}$$

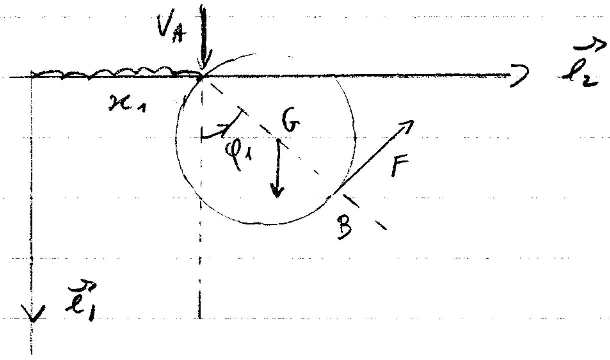
cioè è diretta verso <u>l'alto</u> in tutte le 3 configurazioni di equilibrio.

Ricapitolando:

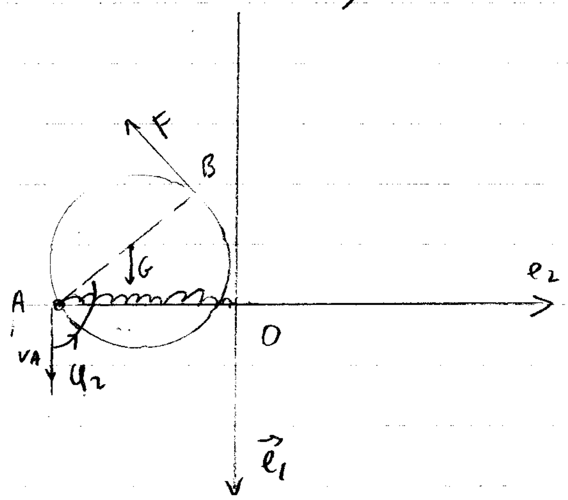
se $\lambda = 1$, $\vec{q}_e^{(2)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $V_A = -F = -\frac{mg}{2}$



se $\lambda < 1$, $\vec{q}_e^{(1)} = \left(\varphi_1, \frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2}\right)$, $V_A = F\lambda - mg < 0$



$\vec{q}_e^{(2)} = \left(\varphi_2, x_2 = -\frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2}\right)$, $F_A = F\lambda - mg < 0$



<u>Dinamica</u>

Scrivo le equazioni di Lagrange in forma non conservativa. Calcolo, quindi, l'energia cinetica K del sistema. Poiché il rigido non ha punti fissi, scrivo

$$K = \frac{1}{2} m \vec{v}_G^{\,2} + \frac{1}{2} J_{Gz} \dot{\varphi}^2 \qquad J_{Gz} = 2 J_2 = \frac{1}{2} m r^2$$

(6.1) $\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{x}_G - \vec{x}_A) = \dot{x}\, \vec{e}_2 + \dot{\varphi}\, \vec{e}_3 \times r(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2) =$

$$= \dot{x}\, \vec{e}_2 + \dot{\varphi} r (\cos\varphi\, \vec{e}_2 - \sin\varphi\, \vec{e}_1) =$$

$$= - r\dot{\varphi} \sin\varphi\, \vec{e}_1 + (\dot{x} + r\dot{\varphi} \cos\varphi)\vec{e}_2$$

$$\vec{v}_G^{\,2} = r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi + (\dot{x} + r\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 =$$

$$= r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi + \dot{x}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 2r\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$= r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + 2r\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

Dunque, l'energia cinetica vale

$$K = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 2r\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + \frac{1}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \frac{3}{2} r^2\dot{\varphi}^2 + 2r\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)$$

Scriviamo, ora, le EL.

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\left(\dot{x} + r\dot{\varphi}\cos\varphi\right); \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = m\left(\ddot{x} + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 0$$

$$(7.1) \qquad m\left(\ddot{x} + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) \overset{(3.1)}{=} F\cos\varphi - 3cx$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m\left(\frac{3}{2}r^2\dot{\varphi} + r\dot{x}\cos\varphi\right); \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\left(\frac{3}{2}r^2\ddot{\varphi} + r\ddot{x}\cos\varphi - r\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = -mr\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$(7.2) \qquad m\left(\frac{3}{2}r^2\ddot{\varphi} + r\ddot{x}\cos\varphi - \cancelto{0}{r\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi}\right) + \cancelto{0}{mr\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi} \overset{(3.1)}{=} 2rF - mgr\sin\varphi$$

5) Il sistema NON è conservativo poiché, dalla (3.1) segue che

$$\frac{\partial Q_x}{\partial \varphi} = -F \sin\varphi \neq \frac{\partial Q_\varphi}{\partial x} = 0$$

Cioè la sollecitazione attiva NON ammette energia potenziale.

6) Reazioni vincolari dinamiche in A

Utilizzo la I ECD proiettata lungo l'asse $\vec{e}_1$

$$\vec{R}^{(est)} \cdot \vec{e}_1 = m\,\vec{a}_G \cdot \vec{e}_1$$

dove

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G \overset{(6.1)}{=} -r\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\vec{e}_1 + \left(\ddot{x} + r\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\right)\vec{e}_2$$

Quindi

$$V_A' + mg - F\sin\varphi = -mr\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)$$

cioè

$$V_A' = F\sin\varphi - mg - mr\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)$$